

Grundlagen der Elektrotechnik 3

Vorlesung und Übungen

Schaltungen mit RLC, komplexe Wechselstromrechnung, elektromagnetische Felder



Ausgabe 0.1, 31.10.2017
Autoren: Stephan Rupp

Steinbeis Transferzentrum Energieinformationstechnik

Kontakt: stephan.rupp@stw.de
Web: <http://www.steinbeis.de/su/1766>

Veröffentlicht unter [CC-BY-SA](#)

Inhaltsverzeichnis

1. Grundlagen.....	5
1.1. Spannungsquelle.....	6
1.2. Stromquelle.....	6
1.3. Ersatzimpedanzen.....	7
1.4. Einspeisung ins Netz.....	7
1.5. Widerstandsnetzwerk.....	8
1.6. Variable Last.....	8
2. Schaltungen mit RLC.....	10
2.1. Kapazität.....	11
2.2. Induktivität.....	11
2.3. Zweitor.....	11
2.4. Einschalten und Ausschalten.....	12
3. Komplexe Wechselstromrechnung.....	13
3.1. Schaltungen mit RLC.....	14
3.2. Komplexe Impedanzen.....	14
3.3. Ohmsch-induktive Last.....	15
3.4. Ohmsch-kapazitive Last.....	16
3.5. Kompensation.....	17
3.6. Zweitor.....	17
4. Elektrische Strömungsfelder.....	19
4.1. Physikalische Zusammenhänge.....	19
4.2. Heizdraht.....	19
4.3. Flussdichte und Feldstärke.....	20
4.4. Strömungsfeld.....	21
4.5. Einfluss der Geometrie.....	22
4.6. Stromdurchflossener Leiter.....	23
5. Elektrostatische Felder.....	25
5.1. Plattenkondensator.....	25
5.2. Flussdichte und Feldstärke.....	26
5.3. Ladungen als Quellen elektrischer Felder.....	26
5.4. Elektrisches Feld einer Raumladung.....	27
5.5. Kapazität eines Kugelkondensators.....	27
5.6. Zusammenfassung.....	29
6. Magnetische Felder.....	30
6.1. Stromdurchflossener Leiter.....	30
6.2. Feldstärke und Flussdichte.....	31
6.3. Induktivität einer Leiterschleife.....	32

6.4. Magnetischer Kreis.....	33
7. Quasistationäre elektromagnetische Felder.....	35
7.1. Induktionsgesetz.....	35
7.2. Elektrische Wirbelfelder.....	36
7.3. Ersatzschaltung für die Induktion.....	37
7.4. Stromverdrängung (Skin-Effekt).....	38
7.5. Transformator.....	39
7.6. Zusammenfassung.....	40
8. Klausuraufgaben.....	42
8.1. Netzwerk aus Leitwerten mit Stromquelle.....	42
8.2. Ohmsch-kapazitive Last.....	43
8.3. Zweitor.....	43
8.4. Stromdurchflossene Leiter.....	44
8.5. Feldstärke und Flussdichte.....	45
8.6.	47
8.7.	47
8.8.	47

1. Grundlagen

In diesem Abschnitt werden Schaltungen mit Gleichstrom betrieben. Zum Baukasten der Elektrotechnik gehören hierbei:

- Spannungsquellen
- Stromquellen
- elektrische Widerstände
- einige Definitionen und Regeln.

Eine Spannungsquelle stellt hierbei stets eine konstante Spannung U_0 bereit. Eine Stromquelle stellt stets einen konstanten Strom I_0 bereit. Im Wasserrohrmodell entspricht die Spannung dem Druck auf einer Leitung, der Strom dem Wasserstrom. Stromnetze werden üblicherweise mit konstanter Spannung betrieben. Nach Bedarf stellt sich ein passender Stromfluss ein. Diese Betriebsweise entspricht einem Wassernetz.

Strom und Spannung

Um einen gewünschten Stromfluss I durch einen Widerstand R zu erzielen, wird eine passende Spannung U benötigt. Der Strom ist proportional zur Spannung.

$$I = \frac{1}{R} U \quad (\text{Gleichung G1/7})$$

Gleichung (G1/7) beschreibt hierbei nur einen Gleichgewichtszustand, keine kausale Beziehung. Umgekehrt sorgt ein gegebener Stromfluss für einen Spannungsabfall über dem Widerstand R .

Stromquellen und Spannungsquellen

Reale Spannungsquellen werden durch eine ideale Spannungsquelle in Kombination mit einem Innenwiderstand R_0 wiedergegeben. Bei starker Belastung gibt die Klemmenspannung etwas nach. Dieses Verhalten lässt sich durch die Kombination einer idealen Spannungsquelle U_0 mit einem Innenwiderstand R_0 als Schaltung nachbilden. Ohne elektrische Last (d.h. im Leerlauf) entspricht die Klemmenspannung (= Leerlaufspannung) der Spannung der idealen Spannungsquelle. Im anderen Extremfall begrenzt der Innenwiderstand den Kurzschlussstrom.

Reale Stromquellen werden durch eine ideale Stromquelle I_0 in Kombination mit einem Innenleitwert G_0 wiedergegeben. Im Kurzschlussbetrieb entspricht der Klemmenstrom (= Kurzschlussstrom) dem Strom I_0 der idealen Stromquelle. Im Leerlauf bildet der Innenleitwert eine Leerlaufspannung an den Klemmen nach. Dieses Verhalten entspricht jedoch nicht den physikalischen Laborstromquellen, da auf diese Weise ja eine erhebliche Verlustleistung abgegeben würde. Es handelt sich hier nur um eine Ersatzschaltung für analytische Berechnungen.

Knotenregel und Maschenregel

An der Verbindungsstelle zweier Leiter muss aus Gründen der Kontinuität der aus einem Leiter ausfließende Strom vom verbundenen Leiter aufgenommen werden. Die Summe der Ströme an der Verbindungsstelle ist somit (bei vorzeichenrichtiger Addition) gleich Null. Für eine Verbindung mit N Leitern ist die Summe aller Ströme gleich Null.

Bewegt man sich auf einer Rundwanderung wieder zum Anfangspunkt zurück, so ist die Summe aller Höhenmeter gleich Null. Startpunkt und Endpunkt liegen auf gleicher Höhe, bzw. auf gleichem Potenzial. Steigungen und Gefälle dazwischen gleichen sich also aus. In beliebigen Maschen einer elektrischen Schaltung kehrt man ebenfalls wieder auf das Startpotenzial zurück. Daher ist die Summe aller Spannungen auf diesem Weg ebenfalls gleich Null.

Definitionen

Eine wesentliche Definition ist die elektrische Leistung: $P = U I$.

Diese berechnet sich aus dem Produkt als Strom und Spannung. In einer elektrischen Schaltung wird diese Leistung in einem Widerstand R in Wärme umgesetzt. Hierbei lässt sich unter Verwendung von Gleichung (G1/7) auch der Strom durch die Spannung ausdrücken, und umgekehrt: $P = U^2 / R = I^2 R$.

In einer Ersatzschaltung soll hierdurch eine Leistungsaufnahme ausgedrückt werden, auch wenn es sich in Wirklichkeit z.B. um eine mechanische Leistung an einem Antrieb, die aufgenommene Leistung in einem folgenden Netzabschnitt bzw. um eine akustische Leistung bei einem Lautsprecher handelt.

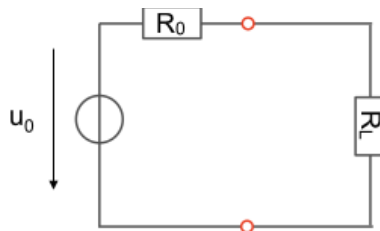
Lastfluss

Unter dem Lastfluss wird der Leistungsfluss verstanden: Hält man z.B. die Spannung konstant, so fließt die Leistung mit dem Strom. Daher ist in elektrischen Energieversorgungsnetzen auch von Stromnetzen die Rede, bzw. vom Stromverbrauch (anstelle der konsumierten elektrischen Leistung).

An der Verbindungsstelle zweier Leiter hat die Leistung somit auch das Vorzeichen des Stroms. Hierbei wird ein Vorzeichen als Abgabe von Leistung interpretiert, das umgekehrte Vorzeichen als Leistungsaufnahme.

1.1. Spannungsquelle

Folgende Abbildung zeigt eine Spannungsquelle mit Leerlaufspannung u_0 und Innenwiderstand R_0 an einer Last R_L .



Frage 1.1.1: Ergänzen Sie Zählpfeile für alle Spannungen und Ströme. Berechnen Sie Spannungen und Ströme.

Frage 1.1.2: Wandeln Sie die Spannungsquelle um in eine äquivalente Stromquelle.

Frage 1.1.3: Leistung: Welche Leistung wird im Lastwiderstand R_L umgesetzt?

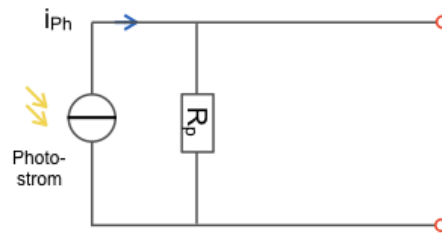
Frage 1.1.4: Wirkungsgrad. Wie groß ist der Anteil der Nutzleistung an der Gesamtleistung? Wann wird der Wirkungsgrad optimal? Welche Leistung wird dann umgesetzt?

Frage 1.1.5: Maximale Leistung. Der Lastwiderstand R_L sei variabel. Berechnen Sie die in R_L umgesetzte Leistung $P(R_L)$ in Abhängigkeit vom Lastwiderstand. Wann wird die Leistung maximal? Option: Lösen Sie die Aufgabe mit Hilfe einer Tabellenkalkulation numerisch, indem Sie für R_0 einen Wert annehmen (z.B. $R_0 = 50 \Omega$) und R_L in einem Bereich variieren (z.B. 0 bis 100Ω). Stellen Sie den Kurvenverlauf dar.

Frage 1.1.6: Fehlanpassung. Der Lastwiderstand sei $R_L = 2 R_0$ bzw. $R_L = R_0 / 2$. Berechnen Sie den Wirkungsgrad und die jeweils umgesetzte Leistung. Wie weit weicht die Leistung vom Maximum ab?

1.2. Stromquelle

Eine Photodiode wird durch das in der Abbildung gezeigte Ersatzschaltbild wiedergegeben.



Frage 1.2.1: Welche Kenngrößen hat das Ersatzschaltbild?

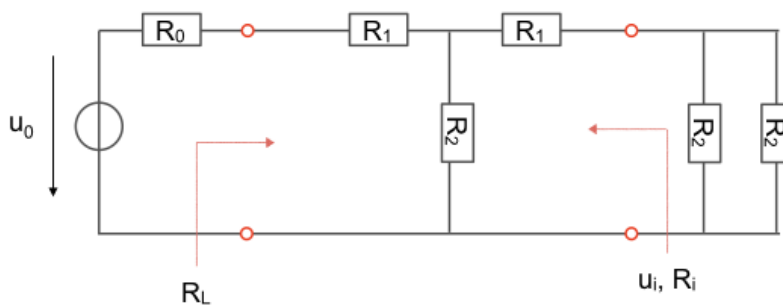
Frage 1.2.2: Wandeln Sie die Schaltung um in eine äquivalente Spannungsquelle.

Frage 1.2.3: Serienschaltung. Es werden N Photozellen in Serie (in Reihe) geschaltet. Skizzieren Sie hierfür ein summarisches Ersatzschaltbild.

Frage 1.2.4: Parallelschaltung. Es werden N Photozellen parallel geschaltet. Skizzieren Sie hierfür ein summarisches Ersatzschaltbild.

1.3. Ersatzimpedanzen

Folgende Abbildung zeigt eine Quelle mit einem Widerstandsnetzwerk und zwei Lastwiderständen. Es seien $R_0 = R_1 = 10 \, \Omega$ und $R_2 = 20 \, \Omega$.



Frage 1.3.1: Berechnen Sie den Ersatzwiderstand R_L , der die Schaltung aus Sicht der Quelle ersetzt.

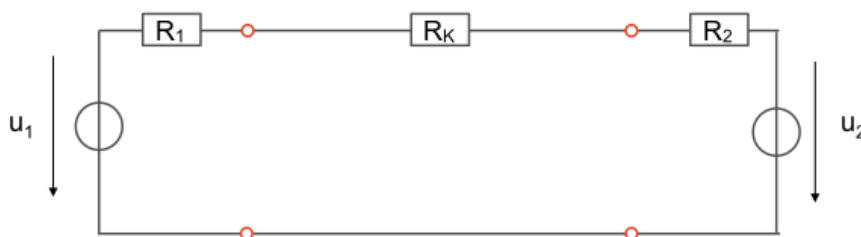
Frage 1.3.2: Berechnen Sie eine Ersatzquelle mit Leerlaufspannung u_i und Innenwiderstand R_i , die die Schaltung aus Sicht der Last ersetzt.

Frage 1.3.3: Eingangsspannung und Eingangsstrom. Berechnen Sie die Eingangsspannung und den Eingangsstrom im allgemeinen Fall (R_0 , R_1 und R_2 beliebig).

Frage 1.3.4: Ausgangsspannung und Ausgangsstrom. Berechnen Sie die Ausgangsspannung und den Ausgangsstrom im allgemeinen Fall (R_0 , R_1 und R_2 beliebig).

1.4. Einspeisung ins Netz

Eine Spannungsquelle u_2 (z.B. eine Photovoltaikanlage) speist in ein Netz ein. Das Netz wird durch eine Ersatzspannungsquelle (u_1 , R_1) und eine Kabelimpedanz (R_k) wiedergegeben, wie in folgender Abbildung gezeigt.



Frage 1.4.1: Ergänzen Sie die Zählpfeile für Ströme und Spannungen. Schreiben Sie die Gleichungen zur Schaltung auf.

Frage 1.4.2: Lastfluss. Wie groß muss u_2 sein, damit Leistung ins Netz fließt? Was geschieht, wenn $u_2 < u_1$ ist? Hinweis: Verwenden Sie die Leistung im Verbraucherzählpfeilsystem.

Frage 1.4.3: Welche Leistung geht auf dem Kabel verloren (wird am Verlustwiderstand R_K in Wärme umgesetzt)?

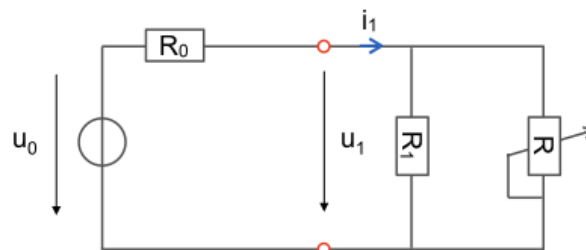
Frage 1.4.4: Welche Leistung nimmt das Netz auf? Wie lässt sich diese Leistung in der Ersatzschaltung erkennen?

Frage 1.4.5: Skizzieren Sie den Lastfluss für folgende Spannungen: (1) $u_1 = 24\text{V}$, $u_2 = 20\text{ V}$. (2) $U_1 = -24\text{ V}$, $u_2 = -20\text{ V}$.

Frage 1.4.6: Welche Probleme ergeben sich durch den Zusammenhang von Spannung und Lastfluss in der Praxis bei der Einspeisung durch Erzeuger erneuerbarer Energien?

1.5. Widerstandsnetzwerk

Eine Spannungsquelle mit Leerlaufspannung u_0 und Innenwiderstand R_0 ist an zwei Lastwiderstände R_1 und R angeschlossen, wie in folgender Abbildung gezeigt. Hierbei ist R variabel.



Frage 1.5.1: Skizzieren Sie qualitativ $u_1(R)$ und $i_1(R)$, d.h. Klemmenspannung und Klemmenstrom in Abhängigkeit von R . Variieren Sie hierbei R im Bereich $R = 0$ bis $R \rightarrow \infty$.

Frage 1.5.2: Wie groß muss R gewählt werden, damit die Spannungsquelle ihre maximale Leistung abgibt? Wie groß ist die abgegebene Leistung in diesem Fall? Wie groß ist der Wirkungsgrad?

Frage 1.5.3: Wie groß muss R gewählt werden, damit der Wirkungsgrad maximal wird? Wie groß ist die an der Klemme umgesetzte Leistung in diesem Fall?

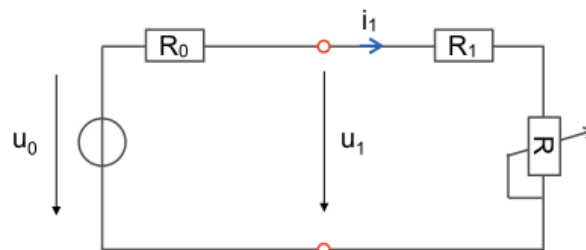
Frage 1.5.4: Berechnen Sie $u_1(R)$ und $i_1(R)$ in Abhängigkeit von R . Gegeben sind u_0 , R_0 und R_1 .

Frage 1.5.5: Berechnen Sie die Leistung an der Anschlussklemme in Abhängigkeit von R .

Frage 1.5.6: Berechnen Sie den Wirkungsgrad in Abhängigkeit von R .

1.6. Variable Last

Eine Spannungsquelle mit Leerlaufspannung u_0 und Innenwiderstand R_0 ist an zwei Lastwiderstände R_1 und R angeschlossen, wie in folgender Abbildung gezeigt. Hierbei ist R variabel.



Frage 1.6.1: Skizzieren Sie qualitativ $u_1(R)$ und $i_1(R)$, d.h. Klemmenspannung und Klemmenstrom in Abhängigkeit von R . Variieren Sie hierbei R im Bereich $R = 0$ bis $R \rightarrow \infty$.

Frage 1.6.2: Wie groß muss R gewählt werden, damit die Spannungsquelle ihre maximale Leistung abgibt? Wie groß ist die abgegebene Leistung in diesem Fall? Wie groß ist der Wirkungsgrad?

Frage 1.6.3: Wie groß muss R gewählt werden, damit der Wirkungsgrad maximal wird? Wie groß ist die an der Klemme umgesetzte Leistung in diesem Fall?

Frage 1.6.4: Berechnen Sie $u_1(R)$ und $i_1(R)$ in Abhängigkeit von R . Gegeben sind u_0 , R_0 und R_1 .

Frage 1.6.5: Berechnen Sie die Leistung an der Anschlussklemme in Abhängigkeit von R .

Frage 1.6.6: Berechnen Sie den Wirkungsgrad in Abhängigkeit von R .

2. Schaltungen mit RLC

In diesem Abschnitt wird der Baukasten der Elektrotechnik erweitert um den Bedarf zur Berechnung beliebiger Schaltungen mit den Elementen R (Widerstand), (L) Induktivität, und C (Kapazität). Hierbei sind als Signalformen der Spannungsquellen bzw. Stromquellen beliebige zeitabhängige Signale zugelassen. Dieser Baukasten beinhaltet nun zusätzlich:

- Spannungsquellen und Stromquellen mit beliebigen Signalen $u(t)$ und $i(t)$
- die Bauelemente R, L und C
- die zugehörigen Gleichungen (Differenzialgleichungen)
- Methoden zum Lösen der Gleichungen.

Kapazität

Die Kapazität einer Anordnung bzw. eines Bauelements ist wie folgt definiert:

$$C = \frac{Q_c}{u_c}$$

Ein Bauelement besitzt eine Kapazität C für Ladungsträger, der Ladungsmenge Q entspricht, die das Bauelement bei einer vorgegebenen Spannung U halten kann. Durch den Bezug auf die Spannung lassen sich die Ladungsmengen unterschiedlicher Bauelemente vergleichen.

Aus der Definition folgt

$$Q_c = C u_c$$

und schliesslich durch Differenzieren nach der Zeit (mit $i_c(t) = dQ_c(t)/dt$)

$$i_c(t) = C \frac{du_c(t)}{dt} \quad (\text{Gleichung G2/7})$$

Gleichung (G2/7) beschreibt wiederum nur einen Gleichgewichtszustand, keine kausale Beziehung. Die Gleichung lässt sich so lesen, dass bei vorgegebener Spannung $u_c(t)$ über der Kapazität C der Strom $i_c(t)$ der zeitlichen Ableitung der Spannung folgt.

Umgekehrt lässt sich Gleichung (G2/7) so interpretieren, dass bei vorgegebenem Strom $i_c(t)$ durch den Kondensator C (z.B. durch eine Stromquelle) die Spannung $u_c(t)$ über dem Kondensator dem Integral des Stromes über der Zeit folgt.

Induktivität

Da die Definition der Induktivität für die Berechnung der Schaltungen keine Rolle spielt, wird an dieser Stelle auf eine Herleitung verzichtet. Die Beziehung zwischen Strom und Spannung an einer gegebenen Induktivität gibt folgende Gleichung wieder.

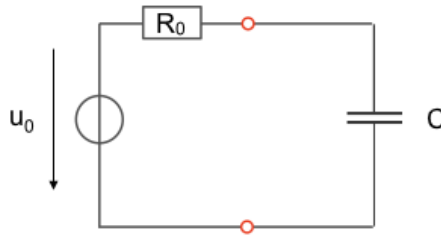
$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \quad (\text{Gleichung G3/7})$$

Auch Gleichung (G3/7) beschreibt nur einen Gleichgewichtszustand, der sich wie folgt interpretieren lässt. Bei vorgegebenem Strom $i_L(t)$ durch die Induktivität L wird eine die Spannung $u_L(t)$ über dem der Induktivität induziert, die dem Verlauf der zeitlichen Ableitung des Stroms entspricht.

Umgekehrt lässt sich Gleichung (G3/7) so interpretieren, dass bei vorgegebener Spannung $u_L(t)$ über der Induktivität L der Strom $i_L(t)$ dem Integral der Spannung über der Zeit folgt.

2.1. Kapazität

Folgende Abbildung zeigt eine Kapazität, die an einer Spannungsquelle betrieben wird.



Frage 2.1.1: Ergänzen Sie die Zählpfeile für Ströme und Spannungen. Erstellen Sie die Systemgleichungen.

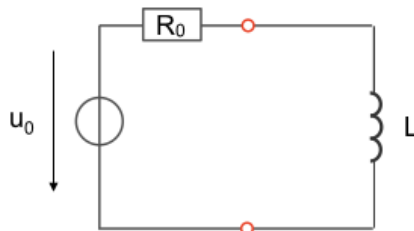
Frage 2.1.2: Wie berechnet sich u_2 in Abhängigkeit von u_1 ?

Frage 2.1.3: Skizzieren Sie das Verhalten der Schaltung beim Einschalten einer Gleichstromquelle (alle Ströme und Spannungen). Hinweis: Verwenden Sie den Zustand vor dem Einschalten und den eingeschwungenen Zustand. Erläutern Sie dann mit Hilfe der Systemgleichungen, wie der eingeschwungene Zustand aus der Ausgangsposition erreicht wird.

Frage 2.1.4: Erzwungene Schwingung mit Wechselspannung. Die Schaltung sei mit einer Wechselspannungsquelle betrieben, wobei der eingeschwungenen Zustand abgewartet wird. Wie verhalten sich Ströme und Spannungen in Abhängigkeit der Frequenz? Hinweis: Verwenden Sie zur Argumentation die Systemgleichungen.

2.2. Induktivität

Folgende Abbildung zeigt eine Induktivität, die an einer Spannungsquelle betrieben wird.



Frage 2.2.1: Ergänzen Sie die Zählpfeile für Ströme und Spannungen. Erstellen Sie die Systemgleichungen.

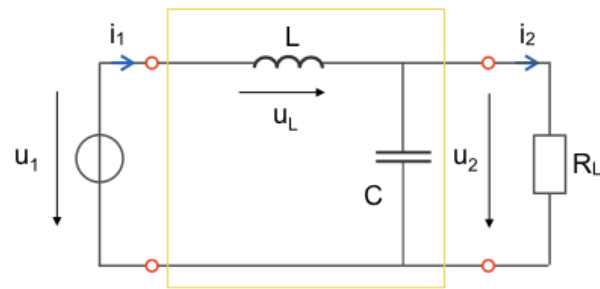
Frage 2.2.2: Wie berechnet sich u_2 in Abhängigkeit von u_1 ?

Frage 2.2.3: Skizzieren Sie das Verhalten der Schaltung beim Einschalten einer Gleichstromquelle (alle Ströme und Spannungen). Hinweis: Verwenden Sie den Zustand vor dem Einschalten und den eingeschwungenen Zustand. Erläutern Sie dann mit Hilfe der Systemgleichungen, wie der eingeschwungene Zustand aus der Ausgangsposition erreicht wird.

Frage 2.2.4: Erzwungene Schwingung mit Wechselspannung. Die Schaltung sei mit einer Wechselspannungsquelle betrieben, wobei der eingeschwungenen Zustand abgewartet wird. Wie verhalten sich Ströme und Spannungen in Abhängigkeit der Frequenz? Hinweis: Verwenden Sie zur Argumentation die Systemgleichungen.

2.3. Zweitor

Folgende Schaltung zeigt ein Zweitor (bestehend aus L und C), das an einer Spannungsquelle und einer Last betrieben wird.



Frage 2.3.1: Ergänzen Sie die Zählpfeile für Ströme und Spannungen. Erstellen Sie die Systemgleichungen.

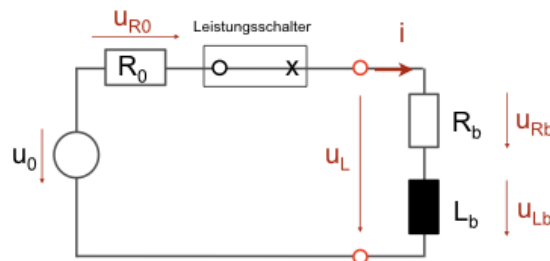
Frage 2.3.2: Skizzieren Sie das Verhalten der Schaltung beim Einschalten einer Gleichstromquelle (alle Ströme und Spannungen).

Frage 2.3.3: Leistung. Welchen Einfluss hat das Zweitor auf die von der Quelle zur Last übertragene Leistung? Hat das Zweitor Verluste?

Frage 2.3.4: Erzwungene Schwingung mit Wechselspannung. Wie verhält sich die Ausgangsspannung u_2 im Verhältnis zur Eingangsspannung u_1 , wenn man die Schaltung mit einer Wechselspannung betreibt und die Frequenz kontinuierlich erhöht? Es wird jeweils der eingeschwungenen Zustand abgewartet.

2.4. Einschalten und Ausschalten

Ein Antrieb soll durch einen Leistungsschalter eingeschaltet bzw. ausgeschaltet werden, wie in folgender Abbildung gezeigt. Der Antrieb ist durch einen ohmschen Widerstand und eine Wicklungsinduktivität wiedergegeben.



Frage 2.4.1: Welche Leistung nimmt der Antrieb auf? Welche Bedeutung hat der Lastwiderstand R_b ?

Frage 2.4.2: Einschalten. u_0 sei eine Gleichspannungsquelle. Skizzieren Sie die Ströme und Spannungen beim Einschalten.

Frage 2.4.3: Ausschalten. Der Antrieb soll nun aus dem eingeschalteten Zustand (Frage 8.2) mit Hilfe des Leistungsschalters ausgeschaltet werden. Worauf ist hierbei zu achten? Welche Spannung entsteht über dem geöffneten Leistungsschalter? Skizzieren Sie die Verläufe der Ströme und Spannungen.

Frage 2.4.4: Betrieb mit Wechselspannung. Welche Unterschiede ergeben sich, wenn die Last bei gleicher Ersatzschaltung mit Wechselspannung betrieben wird. Welche Unterschiede gibt es speziell beim Einschalten und beim Ausschalten?

3. Komplexe Wechselstromrechnung

In diesem Abschnitt wird der Baukasten der Elektrotechnik spezialisiert auf Berechnungen zu einem sehr wichtigen Spezialfall: den Betrieb einer Schaltung mit der festen Frequenz eines harmonischen Signals, d.h. also $s(t) = \hat{s} \cos(\omega t + \phi)$. Dieses Signal ist gekennzeichnet durch:

- die Signalform (hier als Kosinus mit Frequenz ω über der Zeit)
- den Betrag (bzw. die Amplitude oder der Scheitelwert) $\hat{s}$
- die Phasenverschiebung (bzw. Phase) ϕ .

Dieser Spezialfall umfasst nachrichtentechnische und energietechnische Schaltungen. Die Betrachtungen gehen daher auch über den bisherigen Umfang hinaus und umfassen Abhängigkeiten von Bauelementen, Abhängigkeiten von der Frequenz, bzw. die Verkettung von Schaltungen.

Die Vereinfachung beruht auf folgendem Prinzip: Wenn einem System durch äußere Anregung eine Schwingung aufgezwungen wird, folgt das System nach einer Einschwingdauer der erzwungenen Schwingung. Die Signalform bleibt also erhalten. Beeinflusst werden lediglich Betrag und Phase. Durch einen passenden mathematischen Ansatz eliminiert man die spezielle Zeitabhängigkeit.

Vorteile der Methode:

- Differenzialgleichungen werden durch algebraische Gleichungen ersetzt und sind somit algebraisch lösbar.
- Das Vorgehen entspricht den Berechnungen mit Gleichstrom.

Preis der Methode:

- erfordert algebraische Berechnungen mit komplexen Zahlen
- gestattet keine Betrachtung von Einschwingvorgängen (z.B. beim Einschalten und Ausschalten).

Da die komplexe Wechselstromrechnung einen Spezialfall der Berechnung von Schaltungen mit RLC darstellt, bleiben die bisher genannten Gleichungen weiterhin gültig. Es kommen für den Spezialfall vier weitere Gleichungen dazu. Der überwiegende Teil ist also wiederum methodisches Wissen. Zu den Methoden finden sich weitere Informationen in den Anhängen.

Komplexe Impedanz

$\underline{U} = \underline{Z} \underline{I}$	(Gleichung G4/7)
---	------------------

Diese Gleichung entspricht dem ohmschen Gesetz der Gleichstromrechnung. Es findet universell auf alle Bauelement der Wechselstromrechnung Anwendung. Allerdings werden die Bauelemente nun mit einer komplexen Impedanz $\underline{Z}$ beschrieben. Komplexe Werte werden durch einen Unterstrich gekennzeichnet. Strom $\underline{I}$ und Spannung $\underline{U}$ enthalten die gewünschten Informationen über Betrag und Phasenwinkel, jedoch keinen Zeitbezug. Letzterer ist entbehrlich, da der Zeitbezug ohnehin klar ist (aufgezwungene Schwingung der Frequenz ω).

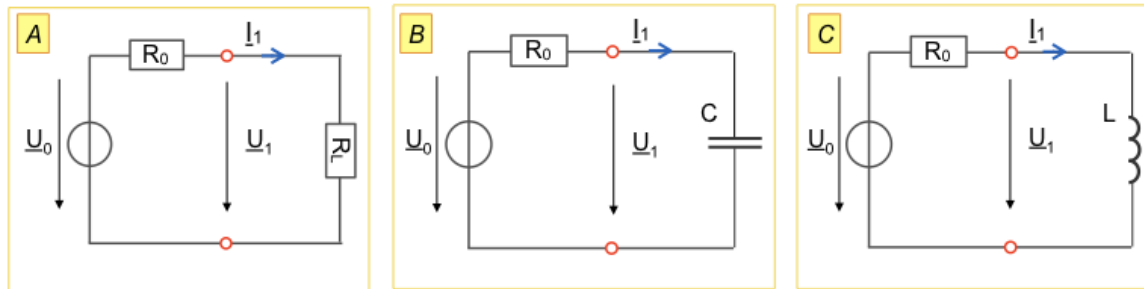
Gleichungen der Bauelemente

$\underline{U}_R = R \underline{I}_R$	$(\underline{Z} = R)$	(Gleichung G5/7)
$\underline{U}_L = j \omega L \underline{I}_L$	$(\underline{Z} = j \omega L)$	(Gleichung G6/7)
$\underline{U}_C = \frac{1}{j \omega C} \underline{I}_C$	$(\underline{Z} = \frac{1}{j \omega C})$	(Gleichung G7/7)

Die komplexen Impedanzen der Bauelemente folgen aus den Gleichungen G1/7, G2/7 und G3/7, die den allgemeinen Fall darstellen. Es ist jedoch üblich, gleich die komplexen Gleichungen zu verwenden.

3.1. Schaltungen mit RLC

Folgende Schaltungen werden mit Wechselspannung der konstanten Frequenz $\omega = 2\pi f$ betrieben. Die Spannung $\underline{U}_0$ sowie der Innenwiderstand R_0 sind gegeben. Außerdem sind gegeben: R (in Schaltung A), C (in Schaltung B), L (in Schaltung C).



Frage 3.1.1 Berechnen Sie für die gezeigten Schaltungen A, B und C:

1. Den Strom $\underline{I}_1$ in Abhängigkeit der Klemmenspannung $\underline{U}_1$.
2. Die Impedanz $\underline{Z}_1 = \underline{U}_1/\underline{I}_1$.
3. Die Klemmenspannung $\underline{U}_1$ in Abhängigkeit von $\underline{U}_0$ und R_0 .
4. Den Phasenwinkel zwischen Spannung $\underline{U}_1$ und Strom $\underline{I}_1$.
5. Den Phasenwinkel zwischen Spannung $\underline{U}_0$ und Strom $\underline{I}_1$.

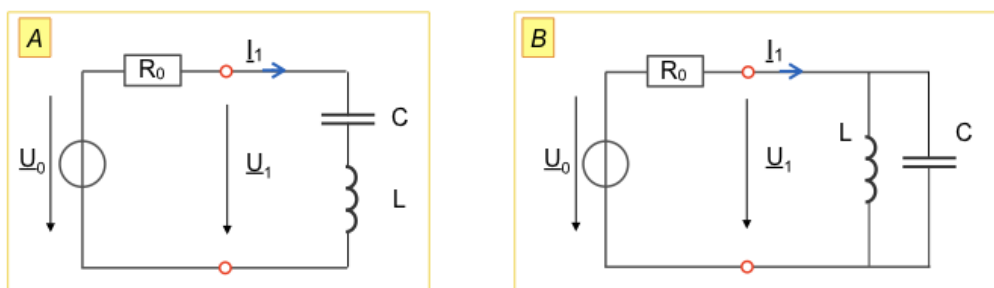
Frage 3.1.2: Skizzieren Sie die Zeigerdiagramme der Spannungen und Ströme zu den Schaltungen.

Frage 3.1.3: Leistung. Berechnen Sie Scheinleistung, Wirkleistung und Blindleistung an den Klemmen der Schaltungen.

Frage 3.1.4: Welche Bedeutung hat der Leistungsfaktor $\cos(\phi)$? Welche Unterschiede ergeben sich zwischen den Schaltungen bzgl. des Leistungsfaktors?

3.2. Komplexe Impedanzen

Folgende Schaltungen sind mit Induktivität und Kapazität aufgebaut.



Frage 3.2.1: Berechnen Sie für die gezeigte Schaltung A:

1. Die Klemmenspannung $\underline{U}_1$ in Abhängigkeit des Stromes $\underline{I}_1$.

2. Die Impedanz $\underline{Z}_1 = \underline{U}_1 / \underline{I}_1$.

Frage 3.2.2: Frequenzabhängigkeit der Impedanz. Es sei angenommen, dass man an die Frequenz ω durch einen Drehknopf an der Quelle im Bereich $\omega = 0$ bis $\omega \rightarrow \infty$ verändern kann. Welchen Verlauf über der Frequenz hat die Impedanz $\underline{Z}_1(\omega)$? Skizzieren Sie den Verlauf. Welche Bedingung gilt bei der Frequenz $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$? Gibt es eine plausible physikalische Erklärung hierfür?

Frage 3.2.3: Leistung. Berechnen Sie Scheinleistung, Wirkleistung und Blindleistung an der Klemme. Welche Abhängigkeit von der Frequenz ω ergibt sich?

Frage 3.2.4: Berechnen Sie für die gezeigte Schaltung B:

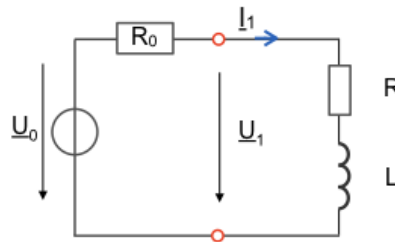
1. Den Strom $\underline{I}_1$ in Abhängigkeit der Klemmenspannung $\underline{U}_1$.
2. Die Admittanz $\underline{Y}_1 = \underline{I}_1 / \underline{U}_1$ sowie die Impedanz $\underline{Z}_1 = \underline{U}_1 / \underline{I}_1$.

Frage 3.2.5: Frequenzabhängigkeit der Admittanz und Impedanz. Es sei angenommen, dass man an die Frequenz ω durch einen Drehknopf an der Quelle im Bereich $\omega = 0$ bis $\omega \rightarrow \infty$ verändern kann. Welchen Verlauf über der Frequenz hat die Admittanz $\underline{Y}_1(\omega)$? Welchen Verlauf über der Frequenz hat die Impedanz $\underline{Z}_1(\omega)$? Skizzieren Sie den Verlauf. Welche Bedingung gilt bei der Frequenz $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$? Gibt es eine plausible physikalische Erklärung hierfür?

Frage 3.2.6: Leistung. Berechnen Sie Scheinleistung, Wirkleistung und Blindleistung an der Klemme. Welche Abhängigkeit von der Frequenz ω ergibt sich?

3.3. Ohmsch-induktive Last

Folgende Schaltung zeigt eine Last mit ohmschen Anteil (R) und induktivem Anteil (L) an einer Quelle mit Leerlaufspannung $\underline{U}_0$ und Innenwiderstand R_0 .



Frage 3.3.1: Berechnen Sie die Impedanz $\underline{Z}_1 = \underline{U}_1 / \underline{I}_1$.

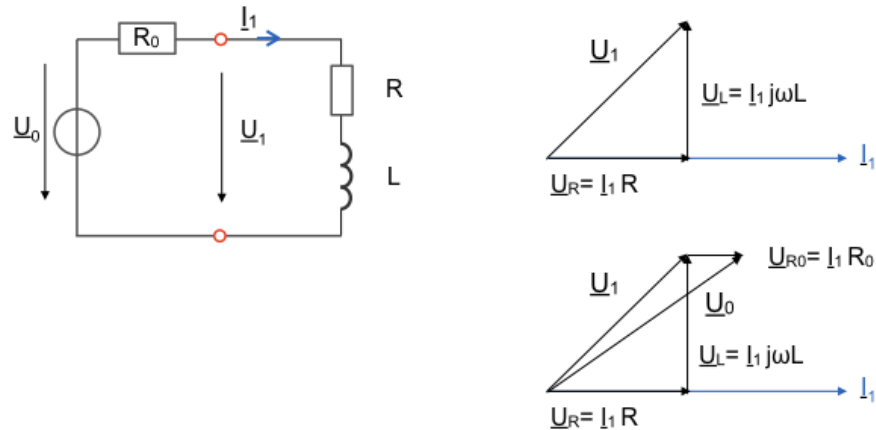
Lösung: $\underline{Z}_1 = R + j\omega L$

Frage 3.3.2: Erstellen Sie ein Zeigerdiagramm für $\underline{U}_1$ und $\underline{I}_1$.

Lösung: $\underline{Z}_1 \underline{I}_1 = \underline{U}_1$. In Parallelschaltung beginnt man mit dem Strompfeil $\underline{I}_1$ und fügt dann die Spannungen hinzu, siehe Abbildung unter Frage 3.3.3.

Frage 3.3.3: Erstellen Sie ein Zeigerdiagramm für alle Ströme und Spannungen der Schaltung. Hinweis: Verwenden Sie das Ergebnis von Frage 3.3.2.

Lösung: Das Diagramm aus Frage 3.3.2 wird um den Spannungsabfall über R_0 ergänzt, der in Richtung von $\underline{I}_1$ erfolgt, wie in folgender Abbildung gezeigt.



Frage 3.3.4: Berechnen Sie Scheinleistung, Wirkleistung und Blindleistung an der Klemme. Hinweis: Verwenden Sie die Effektivwerte der Spannungen und Ströme.

Lösung: (1) $\underline{S}_1 = \underline{U}_1 \underline{I}_1^* = \underline{I}_1 \underline{I}_1^* \underline{Z}_1^* = I_1^2 (R + j\omega L) = P + jQ$

(2) Wirkleistung: $P = I_1^2 R$;

(3) Blindleistung: $Q = I_1^2 \omega L$

Den Betrag I_1 von $\underline{I}_1$ erhält man aus der Maschenregel: $\underline{U}_0 = \underline{I}_1 (R_0 + R + j\omega L)$.

Frage 3.3.5: Berechnen Sie den Leistungsfaktor $\cos(\varphi)$ an der Klemme. Hinweis: Verwenden Sie hierzu das Zeigerdiagramm aus Frage 3.3.2.

Lösung: Es gilt $\tan(\varphi) = \omega L/R$. Hieraus folgen φ und somit $\cos(\varphi)$. Hinweis: Der Winkel $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ zeigt als Phasendifferenz vom Strom zur Spannung.

Frage 3.3.6: Welchen Einfluss hat die Induktivität L auf die Klemmenspannung $\underline{U}_1$ und den Klemmenstrom $\underline{I}_1$? Welchen Einfluss hat die Induktivität L auf die Wirkleistung an der Klemme? Hinweis: Schätzen Sie den Einfluss zunächst mit Hilfe der extremen Fälle $L = 0$ und $L \rightarrow \infty$ ab. Betrachten Sie außerdem als Näherung $R_0 \ll R$.

Lösung: siehe Impedanz aus Frage 3.3.1 bzw. Zeigerdiagramm zu Frage 3.3.3.

Extreme Fälle:

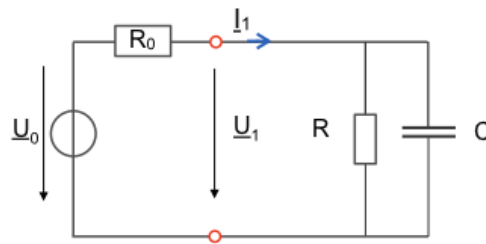
(1) $L = 0$: Einfache Serienschaltung aus R_0 und R . $\underline{U}_1 = \underline{U}_0 R / (R_0 + R)$, $\underline{I}_1 = \underline{U}_0 / (R_0 + R)$. $P = U_0^2 R / (R_0 + R)^2$.

(2) $L \rightarrow \infty$: Offene Klemme, $\underline{I}_1 = 0$, $\underline{U}_1 = \underline{U}_0$. Keine Wirkleistung an der Klemme ($P=0$).

Näherung $R_0 \ll R$: Die Klemmenspannung $\underline{U}_1$ kann unmittelbar durch $\underline{U}_0$ ersetzt werden.

3.4. Ohmsch-kapazitive Last

Folgende Schaltung zeigt eine Last mit ohmschen Anteil (R) und kapazitivem Anteil (C) an einer Quelle mit Leerlaufspannung $\underline{U}_0$ und Innenwiderstand R_0 .



Frage 3.4.1: Berechnen Sie die Admittanz $\underline{Y}_1 = I_1/\underline{U}_1$.

Frage 3.4.2: Erstellen Sie ein Zeigerdiagramm für $\underline{U}_1$ und $\underline{I}_1$.

Frage 3.4.3: Erstellen Sie ein Zeigerdiagramm für alle Ströme und Spannungen der Schaltung.

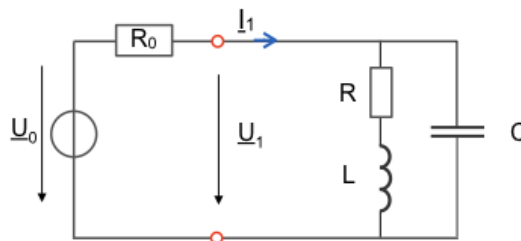
Frage 3.4.4: Berechnen Sie Scheinleistung, Wirkleistung und Blindleistung an der Klemme.

Frage 3.4.5: Berechnen Sie den Leistungsfaktor $\cos(\phi)$.

Frage 3.4.6: Welchen Einfluss auf die Gesamtleistung hat die Kapazität C? Vergleichen Sie den Beitrag von C zur Leistung mit dem Beitrag von L aus Aufgabe 4. Welche Unterschiede ergeben sich?

3.5. Kompensation

Folgende Schaltung zeigt eine Last mit ohmschen Anteil (R) und induktiven Anteil (L) an einer Quelle mit Leerlaufspannung $\underline{U}_0$ und Innenwiderstand R_0 .



Frage 3.5.1: Da $\{R, L\}$ und C in parallelen Zweigen zur Klemmenspannung angeordnet sind, ist eine getrennte Berechnung möglich: Berechnen Sie die Admittanz des RL-Zweiges.

Frage 3.5.2: Berechnen Sie die Admittanz des C-Zweiges.

Frage 3.5.3: Berechnen Sie die gesamte Admittanz $\underline{Y}_1 = I_1/\underline{U}_1$.

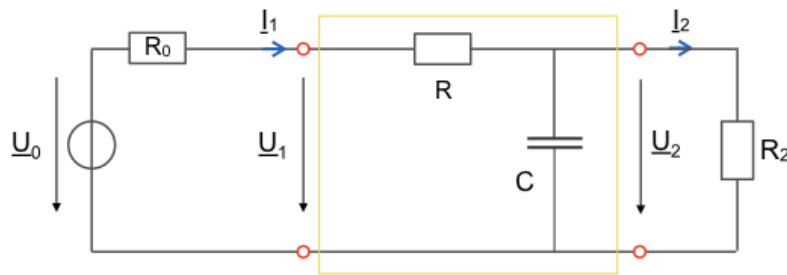
Frage 3.5.4: Wie müsste C gewählt werden, damit die Admittanz $\underline{Y}_1$ ihren Imaginärteil verliert?

Frage 3.5.5: Kompensation. Die in Frage 6.4 berechnete Antwort wird auch als Kompensation bezeichnet. Erklären Sie diesem Begriff. Welchen Zweck verfolgt die Kompensation? Hinweis: Verwenden Sie die Begriffe Wirkleistung und Blindleistung. Verwenden Sie ein Zeigerdiagramm für Ströme und Spannungen an der Klemme.

Frage 3.5.6: Physikalische Erklärung. Gibt es eine plausible physikalische Erklärung für den in Frage 6.5 beschriebenen Zusammenhang, ohne dass man die komplexe Wechselstromrechnung bemühen muss?

3.6. Zweitor

Folgende Abbildung zeigt ein RC-Glied, das zwischen den Klemmen der Quelle $\underline{U}_0$ mit Innenwiderstand R_0 und dem Lastwiderstand R_2 betrieben wird. Gegeben sind $\underline{U}_0$, R_0 , R_2 , sowie R und C.



- Frage 3.6.1: Berechnen Sie die Spannung $\underline{U}_2$ in Abhängigkeit von $\underline{U}_1$. Hinweis: Betrachten Sie C als hierzu als komplexe Impedanz.
- Frage 3.6.2: Plausibilität. Überprüfen Sie Ihre Berechnung auf Plausibilität, indem Sie für C die extremen Fälle $C = 0$ und $C \rightarrow \infty$ annehmen.
- Frage 3.6.3: Übertragungsfunktion. Das Verhältnis der Ausgangsspannung $\underline{U}_2$ zur Eingangsspannung $\underline{U}_1$ wird als komplexe Übertragungsfunktion des Zweitports definiert. Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $\underline{G} = \underline{U}_2 / \underline{U}_1$.
- Frage 3.6.4: Vereinfachte Übertragungsfunktion. Es sei angenommen, dass der Lastwiderstand $R_2 \gg R$ ist (d.h. an Klemme 2 ist eine hochohmige Schaltung angeschlossen). Welche Vereinfachung ergibt sich hierdurch für die Übertragungsfunktion?
- Frage 3.6.5: Frequenzabhängigkeit. Die Übertragungsfunktion ist abhängig von der Frequenz, mit der die Schaltung betrieben wird. Stellen Sie die Abhängigkeit der Übertragungsfunktion $\underline{G}(\omega)$ in Abhängigkeit der Frequenz nach Betrag und Phase dar. Wie lässt sich das Verhalten abhängig von der Frequenz charakterisieren? Hinweis: Verwenden Sie die vereinfachte Übertragungsfunktion ($R_2 \gg R$). Überprüfen Sie Ihr Ergebnis auf Plausibilität mit Hilfe der Spezialfälle $\omega = 0$ und $\omega \rightarrow \infty$. Eine qualitative Skizze genügt.
- Frage 3.6.6: Abhängigkeit des Frequenzganges von R und C . Welche Rolle spielen die Werte von R und C im Frequenzgang der Übertragungsfunktion $\underline{G}(\omega)$?
- Frage 3.6.7: Grenzfrequenz. Auf welchen Wert hat sich der Betrag der Übertragungsfunktion $|\underline{G}(\omega)|$ bei der Frequenz $\omega_g = 1/RC$ reduziert?
- Frage 3.6.8: Signalpegel und Leistung. Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Ausgangsspannung $\underline{U}_2$ an der Klemme 2 und der Leistung P_2 an dieser Klemme? Auf welchen Wert hat sich der Betrag der Leistung an Klemme 2 bei der Frequenz $\omega_g = 1/RC$ reduziert?

4. Elektrische Strömungsfelder

In stationären elektrischen Strömungsfeldern (= Gleichstrom) ist die Stromdichte proportional zur elektrischen Feldstärke:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

(Gleichung 1/7)

Mit σ ist hierbei eine Konstante bezeichnet, die die Leitfähigkeit des Materials beschreibt.

4.1. Physikalische Zusammenhänge

Frage 4.1.1: Physikalische Einheiten. Welche physikalischen Einheiten besitzen E und J ? Welche physikalische Einheit besitzt folglich σ ?

Frage 4.1.2: Skizzieren Sie ein Stück leitfähiges Material mit σ_1 , z.B. einen Leiter der Länge d mit rundem Querschnitt A . An den beiden Rändern werden Elektroden angebracht, die auf folgende Potenziale gebracht werden: $\phi_1 = 10V$, $\phi_2 = 0V$.

Frage 4.1.3: Feldstärke und Potenzial. Welche Feldstärke elektrische ergibt sich in der in Frage 1.2 gezeigten Anordnung? Welche Konsequenz ergibt sich aus dieser Feldstärke gemäß Gleichung 1/7?

Lösungsweg: Spannung = Potenzialdifferenz => elektrische Feldstärke => Stromdichte

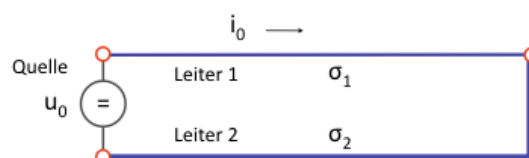
Frage 4.1.4: Welcher Zusammenhang besteht zwischen Strom und Stromdichte?

Frage 4.1.5: Welcher Zusammenhang besteht zum ohmschen Gesetz? Welchen ohmschen Widerstand besitzt der Leiter?

Frage 4.1.6: Kausalität. Im Beispiel wurde über die Spannung die Feldstärke vorgegeben. Hieraus folgt gemäß Gleichung 1/7 die Stromdichte. Könnte man Ursache und Wirkung auch vertauschen, d.h. eine Stromdichte vorgeben? Beschreibt Gleichung 1/7 einen kausalen Zusammenhang?

4.2. Heizdraht

Eine Spannungsquelle u_0 treibt einen Heizdraht mit Rückleitung, wie in folgender Abbildung gezeigt.



Frage 4.2.1: Die Leiter besitzen folgende Eigenschaften: Querschnitte $A_1 = A_2 = 0,2 \text{ mm}^2$, Längen $l_1 = l_2 = 10 \text{ m}$, spezifische Widerstände: $\rho_1 = 0,5 \text{ Ohm mm}^2/\text{m}$, $\rho_2 = 0,03 \text{ Ohm mm}^2/\text{m}$. Berechnen Sie den Leiterstrom i_0 und den Spannungsabfall über beiden Leitern.

Frage 4.2.2: Welche Stromdichte ergibt sich in beiden Leitern? Skizzieren Sie das elektrische Ersatzschaltbild mit zwei diskreten Widerständen.

Lösung: Die Leitfähigkeiten entsprechen den Kehrwerten der spezifischen Widerstände, d.h. $\sigma_1 = 2 \text{ A m / V mm}^2$ und $\sigma_2 = 33,3 \text{ A m / V mm}^2$. Die Ersatzwiderstände berechnen sich nach $R = \rho l / A$ zu $R_1 = 25 \text{ Ohm}$ und $R_2 = 1,5 \text{ Ohm}$. Somit ergibt sich der Strom $i_0 = u_0 / (R_1 + R_2)$ und die Spannungsabfälle $u_1 = 0,94 u_0$ und $u_2 = 0,04 u_0$.

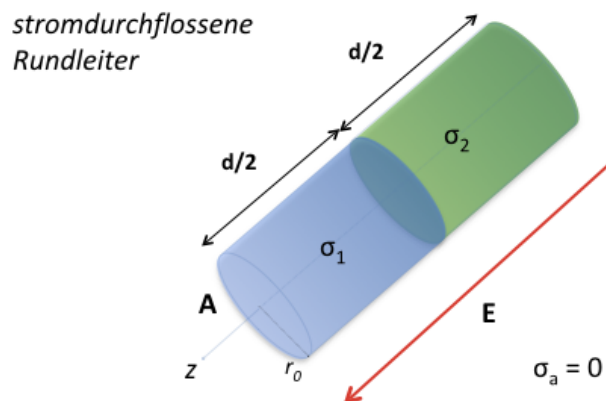
Strom und Stromdichte sind konstant: $J = \sigma_1 E_1 = \sigma_2 E_2$.

4.3. Flussdichte und Feldstärke

Stromdichte (= Flussdichte) und elektrische Feldstärke verhalten sich an Grenzflächen zwischen zwei Materialien völlig unterschiedlich. Dieses Verhalten geht aus der Gleichung 1/7 hervor und soll an zwei Beispielen illustriert werden.

Serielle Anordnung

In der seriellen Anordnung sind zwei Abschnitte unterschiedlicher Leitfähigkeit aneinander gefügt, wie in folgender Abbildung gezeigt. Gegeben seien die Leitfähigkeiten σ_1 und σ_2 . Die Leitfähigkeit im Äußeren der Leiter sei $\sigma_a = 0$. Die beiden Leiterabschnitte besitzen die Länge $d/2$ und den Querschnitt A. An den Stirnflächen der Leiter wird mit Hilfe einer Spannungsquelle die Potenzialdifferenz U_0 angebracht.

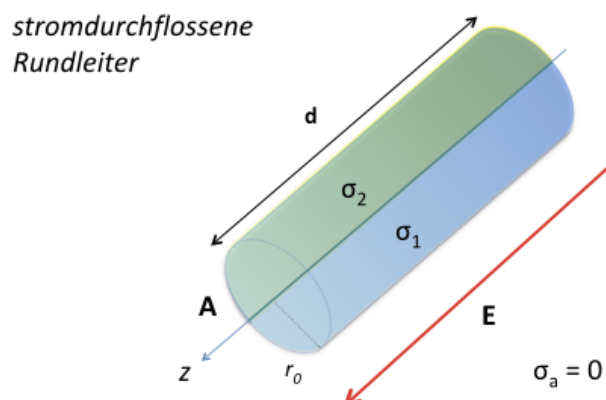


Frage 4.3.1: Berechnen Sie die Stromdichten J_1 und J_2 durch die Leiterabschnitte.

Frage 4.3.2: Berechnen Sie die Feldstärken E_1 und E_2 über den Leiterabschnitten. Skizzieren Sie den Verlauf der Stromdichten und Feldstärken in der Anordnung.

Parallele Anordnung

Es werden nun zwei halbrunde Leiterprofile aus unterschiedlichem Material zusammengesetzt. Die Länge der Profile beträgt d , die Leitfähigkeiten betragen σ_1 und σ_2 . An den Stirnflächen der Leiter wird mit Hilfe einer Spannungsquelle die Potenzialdifferenz U_0 angebracht.



Frage 4.3.3: Berechnen Sie die Stromdichten J_1 und J_2 durch die Leiterabschnitte.

Frage 4.3.4: Berechnen Sie die Feldstärken E_1 und E_2 über den Leiterabschnitten. Skizzieren sie den Verlauf der Stromdichten und Feldstärken in der Anordnung.

Frage 4.3.5 Grenzflächen. Vergleichen Sie das Verhalten der Flussdichte und der Feldstärke an den Grenzflächen zwischen den beiden Materialien in beiden Fällen. Welches Verhalten ist charakteristisch für die Flussdichte? Welches Verhalten ist charakteristisch für die Feldstärke?

Frage 4.3.6. Feldstärken. Über welchem Material ergibt sich in der seriellen Anordnung die höhere Feldstärke? Wie hoch wäre die Feldstärke bei einem ideal leitenden Material? Wie hoch wäre die Feldstärke bei einem nicht leitenden Material?

Ersatzschaltungen beider Anordnungen

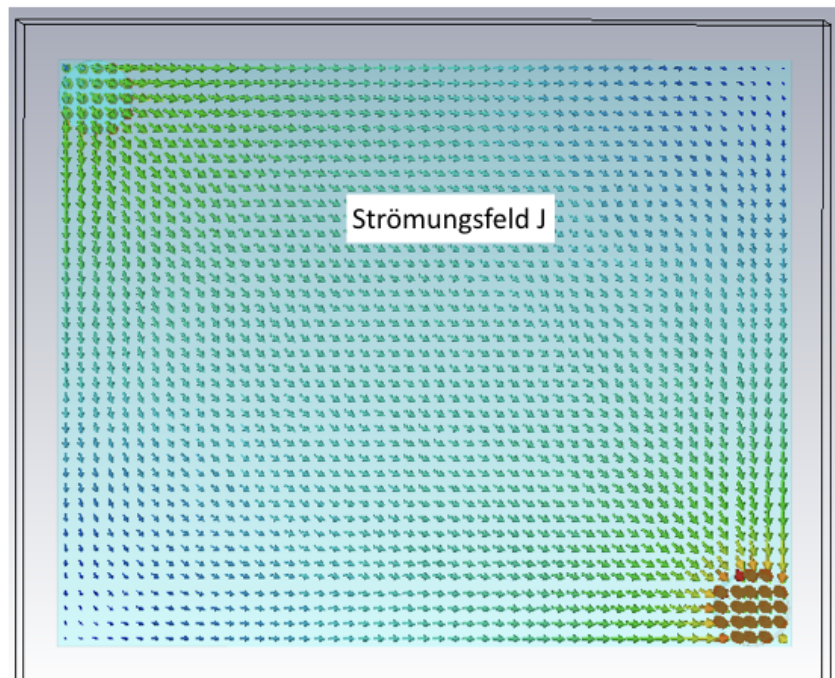
Die beiden Anordnungen sollen durch ein Ersatzschaltungen wiedergegeben werden, in denen die Leiteranschnitte durch konzentrierte Bauelemente wiedergegeben werden (d.h. R_1 und R_2).

Frage 4.3.6: Skizzieren Sie die beiden Ersatzschaltungen. Welche Eigenschaften der beiden Anordnungen geben die Ersatzschaltungen korrekt wieder? Welche Eigenschaften gehen in der Ersatzschaltung verloren?

Frage 4.3.6. Welche Gleichungen sind Ihnen zu diesen Ersatzschaltungen geläufig? Welcher Zusammenhang besteht zu Gleichung 1/7?

4.4. Strömungsfeld

Die vektorielle Form der Gleichung 1/7 lässt sich verwenden, um den Einfluss einer gegebenen Geometrie zusammen mit den Materialeigenschaften zu berechnen. Die Berechnung erfolgt mit Hilfe eines Programme zur Feldsimulation. In folgender Abbildung ist als Beispiel eine homogene Leiterplatte der Leitfähigkeit σ_1 gezeigt, die von den Kanten aus mit Hilfe kreisförmiger Anschlussflächen bestromt wird. Das Äußere der Platte ist nicht leitfähig.

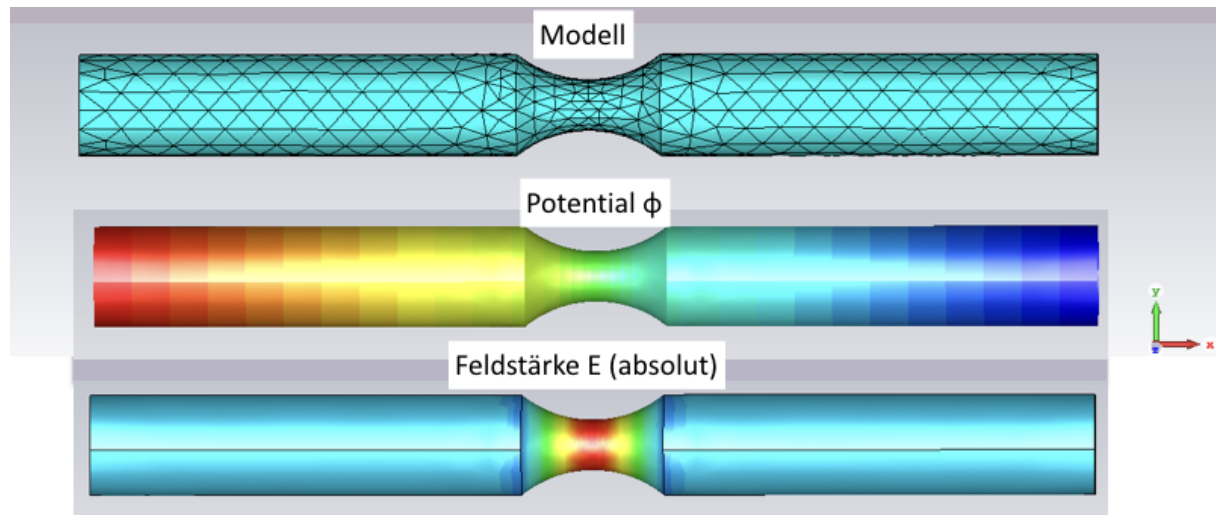


Frage 4.4.1: Vektorfeld. Die Pfeile zeigen das Vektorfeld der Stromdichte. Erläutern Sie diesen Begriff. Was genau geben die gezeigten Pfeile wieder?

Frage 4.4.2: Erläutern Sie die Strömungsverhältnisse im gezeigten Beispiel. Vergleichen Sie mit einer Flüssigkeit in einem Wasserbecken mit Zulauf und Ablauf. Warum ist die Stromdichte nicht konstant, obwohl die Leiterplatte vollständig homogen bzgl. ihrer Leitfähigkeit ist?

4.5. Einfluss der Geometrie

Als weiteres Beispiel für den Einfluss der Geometrie wird ein homogener Rundleiter untersucht ($\sigma = \sigma_1$), der jedoch in der Mitte eine Einschnürung besitzt, wie in folgender Abbildung gezeigt.

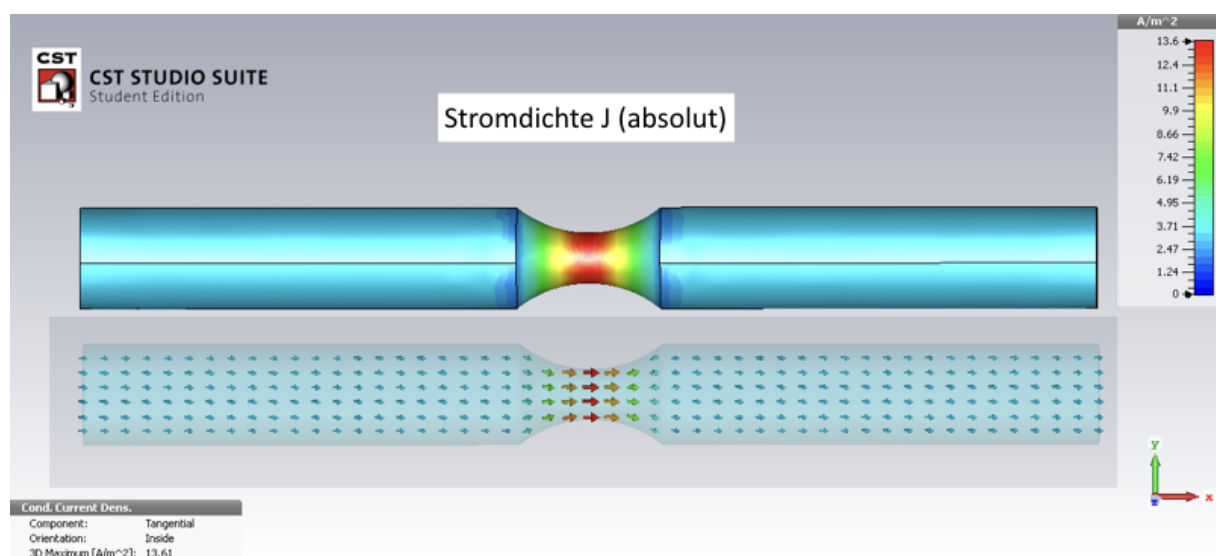


Der oberste Teil der Abbildung zeigt die gegebene Geometrie, darunter ist der Verlauf des Potentials zwischen den beiden Stirnflächen des Leiters gezeigt, wobei eine Farbskala von rot nach blau für die größten bis kleinsten Werte verwendet wird. Der untere Teil der Abbildung zeigt den Verlauf der Feldstärke.

Frage 5.1: Wie erklärt sich der Verlauf der Feldstärke? Hinweis: Verwenden Sie eine Skizze für Potential und Feldstärke.

Frage 5.2: Welcher Verlauf der Stromdichte ergibt sich aus dem in der Abbildung unten gezeigten Verlauf der Feldstärke? Erläutern Sie diesen Effekt. Kennen Sie ähnliche Beispiele für solche Strömungsfelder?

Lösung:



Erläuterung: konstanter Strom => Stromdichte anhängig von Querschnitt. Weniger Querschnitt => höhere Stromdichte.

4.6. Stromdurchflossener Leiter

Ströme verursachen Magnetfelder (und umgekehrt). Dieser Zusammenhang lässt sich durch folgende Gleichung ausdrücken:

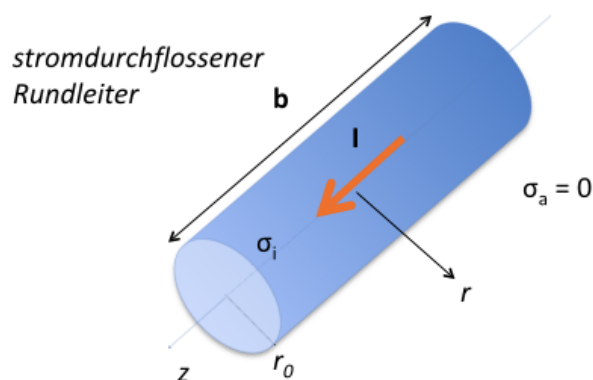
$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J}$$

(Gleichung 2/7)

Frage 4.6.1: Physikalische Einheiten. Welche physikalischen Einheiten besitzen H und J ? Welche physikalische Einheit besitzt folglich der Operator rot ?

Frage 4.6.2: Wenn die Stromdichte in einem linearen Leiter vorgegeben wird, welches Magnetfeld stellt sich ein? Skizzieren Sie die Anordnung. Wie lässt sich der Operator rot interpretieren? Welchen Zusammenhang beschreibt Gleichung 2/7 somit?

Frage 4.6.3: Folgende Abbildung zeigt einen homogenen stromdurchflossenen Leiter der Leitfähigkeit σ_i mit rundem Querschnitt (Radius r_0), der von einem Strom I durchflossen wird. Die Leitfähigkeit außerhalb des Leiters sei $\sigma_a = 0$. Skizzieren Sie das Magnetfeld im Äußeren des Leiters. Gibt es auch im Inneren des Leiters ein Magnetfeld? Hinweis: Es ist keine Berechnung erforderlich. Argumentieren Sie aus Ihrem physikalischen Verständnis heraus.



Berechnung des Feldes im Äußeren des Leiters

Frage 4.6.4: Berechnen Sie die magnetische Feldstärke $H(r)$ in Abhängigkeit der Entfernung r . Hinweis: Das magnetische Feld ist ein Wirbelfeld. Verwenden Sie daher die Beziehung $\text{rot } \vec{H} = \vec{J}$ in der Integralform in Kombination mit einer geeigneten Geometrie für das Linienintegral.

Lösung: Integralform der Gleichung 2/7 mit Strom I : $\oint \vec{H} \cdot d\vec{r} = I$

In Zylinderkoordinaten $r = (r, \alpha, z)$ ist das Linienelement dr des Kreises im Abstand r : $dr = r d\alpha$. Somit

erhält man für das Linienintegral: $\int_{\alpha=0}^{2\pi} H r d\alpha = I = H 2\pi r$

Hieraus erhält man für die magnetische Feldstärke

$$H(r) = \frac{I}{2\pi r}$$

$H = I / 2\pi r$. Die Feldstärke fällt linear mit dem Abstand zum Leiter.

Frage 4.6.5: Abhängigkeit von der Geometrie. Was genau verursacht den Verlauf der Feldstärke in Abhängigkeit der Entfernung? Warum ändert sich die Feldstärke linear mit wachsender Entfernung? Welche Rolle spielen hierbei Materialeigenschaften, welche Rolle spielt die Geometrie?

Lösung: siehe Aufgabe 6.5. Dass die Feldstärke mit der Entfernung linear abnimmt, ist ein reiner Effekt der Geometrie, bedingt durch die Verteilung auf den Kreisumfang der zylindersymmetrischen Anordnung. Mit wachsender Entfernung verteilt sich die Feldstärke auf einen größeren Radius.

Berechnung des Feldes im Inneren des Leiters

Frage 4.6.6: Skizzieren Sie den Verlauf der tangentialen Komponente von H in Abhängigkeit vom Radius im Bereich $-2r_0 < r < 2r_0$.

Lösung: Im Innenraum des Leiters ist $0 < r < r_0$. In diesem Bereich ist nur der vom Radius r umschlossene Anteil des Stroms zu berücksichtigen (Integralform von Gleichung 2/7):

$$\oint \vec{H} d\vec{r} = \int_A \vec{J} d\vec{A} \quad \text{mit } J = I / \pi r_0^2$$

Für die rechte Seite mit der umschlossenen Kreisfläche $A = \pi r^2$ erhält man:

$$\int_A \vec{J} d\vec{A} = \int_0^{2\pi} \int_0^r J r dr d\alpha = \pi r^2 J = I \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \quad (4.6.1)$$

Für die linke Seite erhält man für die tangential verlaufende Feldstärke H:

$$\oint \vec{H} d\vec{r} = \int_0^{2\pi} H r d\alpha = 2\pi r H \quad (4.6.2)$$

Somit ergibt sich für die Feldstärke innerhalb des Leiters (durch Gleichsetzen von (4.6.1) und (4.6.2)):

$$H(r) = \frac{I}{2\pi} \frac{r}{r_0^2}$$

Die Feldstärke steigt somit linear vom Leiterinneren bis zum äußeren Rand r_0 .

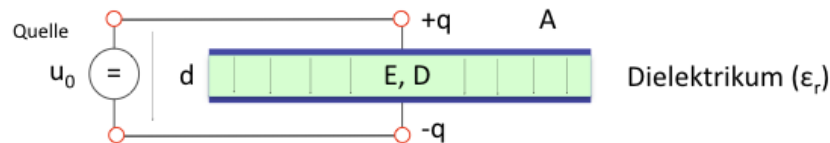
5. Elektrostatische Felder

Für elektrische Felder ohne bewegte Ladungen (Elektrostatik) gibt es einen Zusammenhang zwischen der elektrischen Ladungsdichte und der elektrischen Feldstärke:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

(Gleichung 3/7)

Hierbei bezeichnet die Permittivität ϵ die Eigenschaften des Materials im Feld (des sogenannten Dielektrikums, daher auch die Bezeichnung Dielektrizitätskonstante). Üblicherweise wird ϵ als Produkt der relativen Materialkonstanten ϵ_r und der Permittivität ϵ_0 im Vakuum dargestellt (siehe auch Abkürzungen und Konstanten am Ende dieser Unterlage): $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$.



Wie in der Abbildung oben gezeigt, sind diese Verhältnisse im Zusammenhang mit dem Plattenkondensator bekannt. Bringt man ein Material mit der Eigenschaft ϵ zwischen zwei Elektroden und lädt diese auf eine Potentialdifferenz u_0 , so bildet sich ein elektrisches Feld über der Anordnung mit Feldstärke E . D beschreibt dielektrische Flussdichte bzw. Ladungsdichte.

5.1. Plattenkondensator

Frage 5.1.1 Physikalische Einheiten. Welche physikalischen Einheiten besitzen E und D ? Welche physikalische Einheit besitzt folglich ϵ ? Welche physikalischen Einheiten besitzen ϵ_r und ϵ_0 ?

Frage 5.1.2: Feldstärke und Flussdichte. Gegen sei der in der Abbildung oben gezeigte Plattenkondensator mit den Abmessungen $A = 100 \text{ mm}^2$, $d = 2,5 \text{ mm}$. Als Dielektrikum wird eine Epoxidharzplatte mit der relativen Permittivität $\epsilon_r = 3,5$ verwendet. Der Kondensator wird mit Hilfe einer Gleichspannungsquelle mit $u_0 = 10 \text{ V}$ aufgeladen. Berechnen Sie Feldstärke und Flussdichte im Kondensator. Welche physikalische Einheit hat die Flussdichte? Welchen Einfluss hat das Dielektrikum?

Lösung: Feldstärke $E = u_0 / d = 10 \text{ V} / 2,5 \text{ mm} = 4000 \text{ V/m}$. Flussdichte $D = \epsilon E = \epsilon_r \epsilon_0 E = 3,5 * 8,86 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm} * 4000 \text{ V/m} = 1,2 \cdot 10^{-7} \text{ As/m}^2$. Einfluss des Dielektrikums: erhöht die Flussdichte und somit die Ladungsmenge, z.B. im Vergleich zu Luft mit $\epsilon_r = 1$.

Frage 5.1.3: Kapazität. Berechnen Sie die Kapazität des Kondensators aus Aufgabe 7.2. Auf welche Weise könnte man die Kapazität des Kondensators erhöhen?

Lösung: Kapazität = Ladungsmenge, die bei gegebener Potentialdifferenz (Spannung) gehalten werden kann. Die Ladungsmenge geht aus der Flussdichte und der Fläche des Kondensators hervor. $C = Q/u_0 = D A / u_0 = (1,2 \cdot 10^{-7} \text{ As/m}^2 * 100 \text{ mm}^2) / 10 \text{ V} = 1,2 \text{ pF}$.

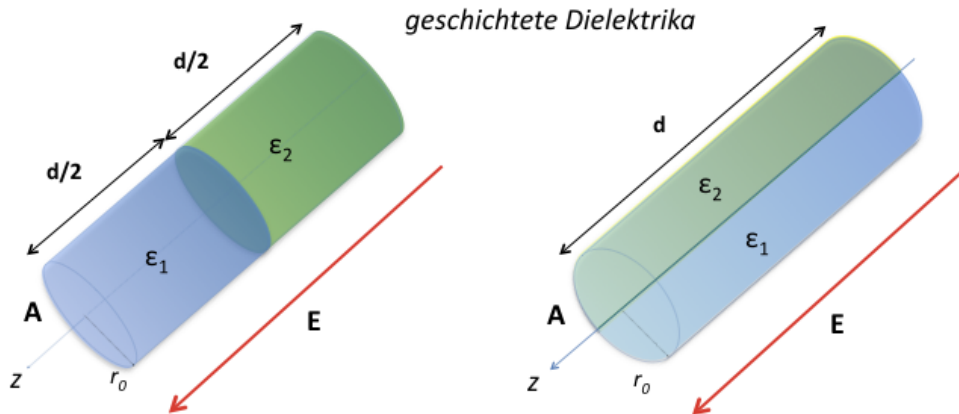
Maßnahmen zur Erhöhung der Kapazität: (1) Geometrie: die Fläche A vergrößern (mehr Ladungen) bzw. den Abstand d der Elektroden verringern (höhere Feldstärke), (2) Material: Dielektrikum mit höherer Permittivität verwenden (höhere Flussdichte z.B. durch Verwendung von Tantalexid mit $\epsilon_r = 25$).

Somit ist die Kapazität eine Eigenschaft der Geometrie und der Permittivität ϵ . Sie kennzeichnet die Fähigkeit einer Anordnung mit gegebenen Materialien, Ladungen (= elektrischer Fluss) aufzunehmen.

Frage 5.1.4: Flussdichte und Feldstärke. Welcher Zusammenhang besteht zwischen Flussdichte und Feldstärke? Worin bestehen die Unterschiede? Vergleichen Sie mit dem elektrischen Strömungsfeld.

5.2. Flusssdichte und Feldstärke

Folgende Abbildung zeigt zwei unterschiedlich geschichtete Dielektrika (in serieller bzw. paralleler Anordnung). An die Stirnseiten sind Elektroden aufgebracht. Die Elektroden werden mit Hilfe einer Spannungsquelle auf die Potenzialdifferenz u_0 gebracht.



Frage 5.2.1: Skizzieren Sie die Beträge (Pfeile) der Feldstärken und Flusssichten qualitativ. Berechnen Sie die Flusssichten D_1 und D_2 in den Anordnungen.

Frage 5.2.2: Berechnen Sie die Feldstärken E_1 und E_2 in den Anordnungen. Skizzieren Sie den Verlauf der Stromdichten und Feldstärken in der Anordnung.

Frage 5.2.3 Grenzflächen. Vergleichen Sie das Verhalten der Flusssdichte und der Feldstärke an den Grenzflächen zwischen den beiden Materialien in beiden Fällen. Welches Verhalten ist charakteristisch für die Flusssdichte? Welches Verhalten ist charakteristisch für die Feldstärke?

Frage 5.2.4. Feldstärken. Über welchem Material ergibt sich in der seriellen Anordnung die höhere Feldstärke? Wie hoch wäre die Feldstärke bei einem Material mit hoher Permittivität? Wie hoch wäre die Feldstärke bei einem Material mit niedriger Permittivität? Hinweis: Werte für ϵ_r siehe Aufgabe 5.1.

5.3. Ladungen als Quellen elektrischer Felder

Die Quellen elektrischer Felder sind elektrische Ladungen. Diese Aussage lässt sich in mathematischer Schreibweise wie folgt formulieren:

$$\oint_A \vec{D} d\vec{A} = Q \quad \text{bzw.} \quad \text{div } \vec{D} = \rho \quad (\text{Gleichung 4/7})$$

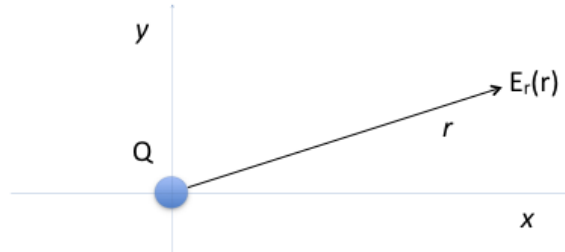
Die Integralform bedeutet hierbei, dass eine Oberfläche, die die Ladung umschließt, dazu verwendet werden kann, diese Ladung aus der Flusssdichte zu berechnen. Das spezielle Integralsymbol mit Kringel und der Bezeichnung A für Fläche deutet auf eine geschlossene Oberfläche hin (z.B. eine Kugeloberfläche). Die Differenzialform bedeutet, dass divergierende Feldlinien in einem Raumpunkt auf eine Raumladungsdichte in diesem Punkt hindeuten.

Hinweis: Beide Schreibweisen werden hier nur dazu verwendet, diese Zusammenhänge zu beschreiben. Diese Beschreibung in Vektorform ist vollständig und allgemeingültig. Einige Bilder zur Veranschaulichung der Zusammenhänge finden sich in Anhang C.

Analytische Berechnungen erfolgen nur an ausgewählten, einfachen Geometrien. Die Methoden der Vektoranalyse (siehe Anhang B) sind hierzu nicht erforderlich. Mit Hilfe numerischer Methoden lassen sich jedoch beliebige Geometrien hieraus durch ein Feldsimulationsprogramm berechnen.

5.4. Elektrisches Feld einer Raumladung

Folgende Abbildung zeigt eine punktförmige Raumladung im Koordinatensystem. Im Unendlichen wird Nullpotential angenommen. Die Permittivität im Raum beträgt $\epsilon_r = 1$.



Frage 5.4.1: Elektrische Feldstärke. Skizzieren Sie den zu erwartenden Verlauf der elektrischen Feldlinien (qualitative Skizze genügt). Welche Symmetrien besitzt die Anordnung?

Frage 5.4.2: In welchem Koordinatensystem wäre die elektrische Feldstärke in diesem Fall am einfachsten zu beschreiben (z.B. kartesische Koordinaten, Zylinderkoordinaten, Kugelkoordinaten)? Welche Vereinfachung ergibt sich für die elektrische Feldstärke beim passenden Koordinatensystem?

Lösungsbeispiel: Kugelkoordinaten zur Diskussion, siehe Anhang C

Frage 5.4.3: Flussdichte. Welcher Zusammenhang besteht zwischen der elektrischen Flussdichte und der elektrischen Feldstärke? Kann die elektrische Flussdichte im gleichen Koordinatensystem ebenfalls in einfacher Form beschrieben werden?

Frage 5.4.4: Berechnen Sie analytisch die elektrische Feldstärke im Abstand r außerhalb der Ladung Q. Hinweis: Verwenden Sie hierzu die Beziehung $\text{div } \vec{D} = \rho$ in der Integralform in Kombination mit einer geeigneten Geometrie für die Integrationsfläche (Kugeloberfläche). Welchen Einfluss hat der Raum auf die Feldstärke $E(r)$? Wie groß ist das elektrische Potential $\phi(r)$ in Abhängigkeit der Entfernung?

Lösung: Integralform der Quellengleichung: $\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q$

In Kugelkoordinaten $r = (r, \alpha, \theta)$ erhält man im Abstand r erhält für das Flächenelement dA der Kugeloberfläche: $dA = r \, d\alpha \, r \sin(\theta) \, d\theta = r^2 \sin(\theta) \, d\theta \, d\alpha$. Somit erhält man für das Flächenintegral:

$$\int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} D r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\alpha = Q = D r^2 4\pi$$

Mit $D = \epsilon E$ ergibt sich hieraus für die elektrische Feldstärke $E = Q / 4\pi\epsilon r^2$.

Dass die Feldstärke mit dem Quadrat der Entfernung abnimmt, ist somit ein reiner Effekt der Geometrie, bedingt durch die Verteilung auf die Kugeloberfläche. Das Potential $\phi(r)$ erhält man durch Integration der Feldstärke.

5.5. Kapazität eines Kugelkondensators

Es sei folgende Anordnung gegeben:

- eine kugelförmige innere Elektrode mit Radius R_1
- eine äußere Elektrode als Hohlkugel mit Radius R_2
- ein Dielektrikum mit Materialkonstante im Innenraum.

Die Elektroden werden auf eine Potenzialdifferenz u_0 gebracht. Die Anordnung stellt somit einen Kugelkondensator dar.

Frage 5.5.1: Skizzieren Sie die Anordnung. Welche Unterschiede bestehen zum Plattenkondensator?

Frage 5.5.2: Wie verlaufen die Feldlinien des elektrischen Feldes? Wie verlaufen die Feldlinien der elektrischen Flussdichte?

Frage 5.5.3: In welchem Koordinatensystem lassen sich E und D am einfachsten beschreiben?

Frage 5.5.4: Analytische Berechnung der Kapazität. Berechnen Sie die Kapazität des Kugelkondensators analytisch.

Lösungsansatz: siehe Feld einer Raumladung, Aufgabe 5.4:

$$Q = D 4 \pi r^2 \quad (5.5.1)$$

Ziel: $C = Q / U_{12} \quad (5.5.2)$

In Gleichung (5.5.2) bedeutet U_{12} die Potenzialdifferenz zwischen innerer und Äußerer Elektrode. Diese berechnet sich aus:

$$U_{12} = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (5.5.3)$$

In Kugelkoordinaten erhält man hieraus mit der radiale Komponente E_r :

$$U_{12} = \int_{R_1}^{R_2} E_r dr \quad (5.5.3')$$

Die radiale Komponente des Vektors E ergibt sich aus der Materialgleichung:

$$E_r = \frac{1}{\epsilon} D_r \quad (5.5.4)$$

Einsetzen von (5.5.4) in (5.5.3') ergibt:

$$U_{12} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{\epsilon} D_r dr \quad (5.5.5)$$

Nach Einsetzen von (5.5.1) in (5.5.5) erhält man:

$$U_{12} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{4 \pi \epsilon r^2} Q dr = \frac{Q}{4 \pi \epsilon} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r^2} dr \quad (5.5.6)$$

Hierdurch ergibt sich nach Berechnung des Integrals:

$$U_{12} = \frac{Q}{4 \pi \epsilon} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)$$

Die gesuchte Kapazität C erhält man hieraus gemäß der Definition 5.5.2.

Ergebnis:

$$C = 4 \pi \epsilon \left(\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \right)$$

5.6. Zusammenfassung

Stationäre elektrischen Strömungsfelder und elektrostatischen Felder werden durch folgende Gleichungen beschrieben:

Stationäre elektrische Strömungsfelder:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (\text{Gleichung 1/7})$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} \quad (\text{Gleichung 2/7})$$

Elektrostatische Felder:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (\text{Gleichung 3/7})$$

$$\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q \quad \text{bzw.} \quad \text{div } \vec{D} = \rho \quad (\text{Gleichung 4/7})$$

Diese Gleichungen lassen sich nach folgendem Schema ordnen:

Feldgleichungen:

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J}$$

Quellen:

$$\text{div } \vec{D} = \rho$$

Materialgleichungen:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

Die Gleichungen lassen sich wie folgt interpretieren: Die Feldgleichung zeigt den Zusammenhang von Stromdichte und Magnetfeld. Die Quellen elektrostatischer Felder sind Raumladungen. Die Materialgleichungen beschreiben den Zusammenhang zwischen der elektrischen Feldstärke und den Flussdichten: der Stromdichte in leitendem Material (σ), bzw. der elektrischen Flussdichte in einem Dielektrikum ($\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$).

6. Magnetische Felder

Magnetfeld stationärer Ströme

Stromdurchflossene Leiter erzeugen magnetische Wirbelfelder:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} \quad (\text{Gleichung 2/7})$$

Dieser Fall wurde bereits im Zusammenhang mit den elektrischen Strömungsfeldern dargestellt. Hierbei wurde angenommen, daß es sich um stationäre Ströme handelt (Gleichstrom, keine zeitliche Veränderung). In diesem Fall sind auch die Magnetfelder zeitlich unveränderlich und somit magnetostatisch. Die Berechnung des Magnetfeldes $\vec{H}$ kann direkt aus der Stromdichte $\vec{J}$ erfolgen.

Magnetische Flussdichte

Wie im elektrischen Strömungsfeld und im elektrostatischen Feld gibt es im magnetischen Feld ebenfalls eine Flussdichte:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (\text{Gleichung 5/7})$$

Die magnetische Flussdichte ist proportional zur magnetischen Feldstärke. Hierbei kennzeichnet die Materialkonstante μ die Permeabilität des Materials.

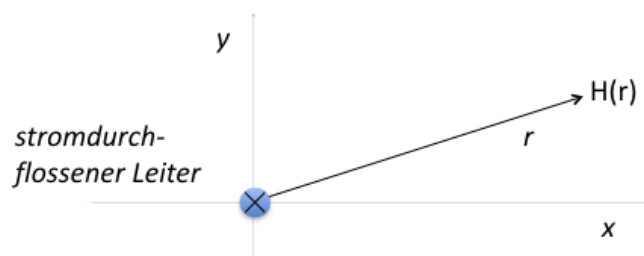
Als Ursachen magnetischer Felder kommen entweder Ströme (Gleichung 2/7) oder Permanentmagnete (Gleichung 5/7) in Frage. Im Unterschied zu elektrischen Feldern gibt es jedoch keine Quellen im Sinne magnetischer Monopole:

$$\oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (\text{Gleichung 6/7})$$

Magnetische Felder sind quellenfrei in dem Sinne, dass magnetische Feldlinien immer geschlossen sind und niemals von einem isolierten Pol ausgehen.

6.1. Stromdurchflossener Leiter

Folgende Abbildung zeigt den Querschnitt eines stromdurchflossenen Leiters. Der Leiter befindet sich auf der z-Achse des gewählten Koordinatensystems. Der Strom beträgt I , der Leiter hat den Radius r_0 .



Frage 6.1.1: Skizzieren Sie das magnetische Feld im Äußeren des Leiters. Hinweis: Geben Sie hierfür eine Stromrichtung vor.

Frage 6.1.2: Welche Symmetrie besitzt die Anordnung? Welche Komponente der magnetischen Feldstärke genügt dieser Symmetrie? Welches Koordinatensystem wäre zur Beschreibung dieser Komponente der magnetischen Feldstärke geeignet.

Lösung: Die Anordnung ist radialsymmetrisch: Die tangentielle Komponente der magnetischen Feldstärke $H_t(x,y,z)$ ist nur von der Entfernung r abhängig. Somit sind Kreiskoordinaten (Polarkoordinaten) zur Beschreibung geeignet: $H_t(x,y,z) = H_t(r)$.

Frage 6.1.3: Ansatz zur Berechnung der Feldstärke im Äußeren des Leiters. Wie lässt sich das Magnetfeld im Äußeren des Leiters berechnen? Beschreiben Sie den Lösungsansatz und den Lösungsweg.

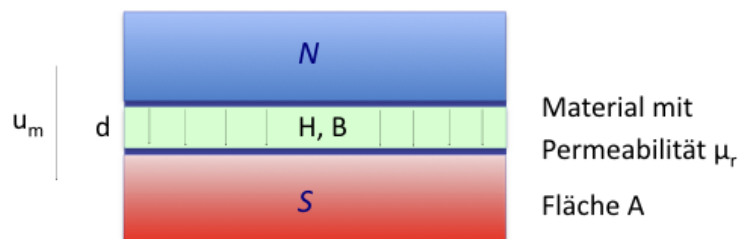
Lösung: siehe elektrische Strömungsfelder, Aufgabe 4.6.

Frage 6.1.4: Berechnen Sie die Feldstärke im Äußeren des Leiters. In welcher Weise hängt diese Feldstärke von der Entwerfung ab? Woraus ergibt sich diese spezielle Abhängigkeit von der Entfernung?

Lösung: siehe elektrische Strömungsfelder, Aufgabe 4.6.

6.2. Feldstärke und Flussdichte

In folgender Abbildung befindet sich ein Material mit der Permeabilität μ zwischen den Polschuhen eines Permanentmagneten. Die Anordnung besitzt die Abmessungen $A = 100 \text{ mm}^2$, $d = 2,5 \text{ mm}$. Als Material wird eine Stahlplatte mit der relativen Permeabilitätszahl $\mu_r = 1000$ verwendet. Als magnetische Potenzialdifferenz wird ein Wert von $u_m = I = 10 \text{ A}$ angenommen.



Frage 6.2.1: Berechnen Sie die magnetische Feldstärke und Flussdichte. Welche physikalische Einheit hat die Flussdichte?

Lösung: Feldstärke $H = I/d = 4000 \text{ A/m}$. Flussdichte: $B = \mu_r \mu_0 H = 1000 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/Am} \cdot 4000 \text{ A/m} = 5,03 \text{ Vs/m}^2$.

Frage 6.2.2: Berechnen Sie den magnetischen Fluss Φ und den Proportionalitätsfaktor Λ zwischen magnetischem Fluss und magnetischer Potenzialdifferenz $u_m = I$. Wie lässt sich der Proportionalitätsfaktor Λ interpretieren?

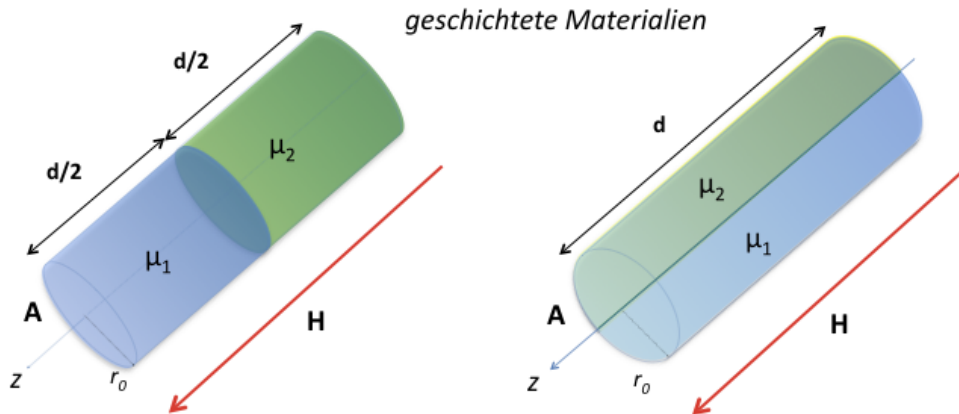
Lösung: Magnetischer Fluss Φ : Die Flussdichte B multipliziert mit der Fläche A ergibt $\Phi = B A = 5,03 \cdot 10^{-4} \text{ Vs}$.

Interpretiert man $\Phi = \Lambda I$, so ist $\Lambda = \Phi / I = 50,3 \cdot 10^{-6} \text{ Vs/A}$ (Henry) ein Indikator für den magnetischen Fluss, den die Anordnung bei gegebenen magnetischer Potentialdifferenz I aufnehmen kann. Diese magnetische Kapazität (= Induktivität) ist abhängig von der Geometrie der Anordnung und von den Materialeigenschaften (μ_r).

Frage 6.2.3: in der oben gezeigten Anordnungen sei angenommen, dass sich ein Luftspalt der Breite d durch mangelnde Passgenauigkeit ergibt. Für Luft wird eine Permeabilität $\mu_r = 1$ angenommen. Welchen Effekt hat ein solcher Luftspalt zwischen den Polschuhen? Skizzieren Sie Feldstärke und Flussdichte zwischen den Polschuhen mit zusätzlichen Luftspalt.

Lösung: Einfluss des Materials zwischen den Polschuhen: Erhebliche Verstärkung der Flussdichte bei Stahl ($\mu_r = 1000$) gegenüber nicht magnetischem Material, wie z.B. Luft ($\mu_r = 1$).

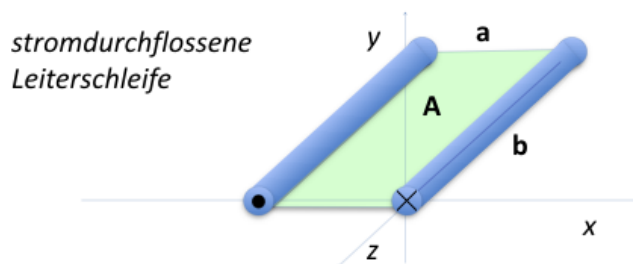
Frage 6.2.4: Ferromagnetische Stoffe. Im Unterschied zur Permittivität ϵ_r gibt es in Bezug auf die Permeabilität μ_r wenig Spielraum. Es gibt im Grunde genommen nur magnetische und nicht magnetische Materialien. Bei den nicht magnetischen Materialien gibt es keine nennenswerten Unterschiede in der Permeabilität: die Werte bewegen um $\mu_r \approx 1$. Magnetische (ferromagnetische) Stoffe besitzen deutlich größere Permeabilitätszahlen ab $\mu_r > 1000$.



Wie verlaufen magnetische Feldstärke und magnetische Flussdichte in einer geschichteten Anordnung zweier Materialien mit den Permeabilitäten $\mu_{r1}=1$ und $\mu_{r2} = 1000$? Skizzieren Sie den Verlauf.

6.3. Induktivität einer Leiterschleife

Wie die Kapazität im elektrischen Fall ist die magnetische Induktivität eine geometrische und stoffliche Eigenschaft einer Anordnung. Statt mit Hilfe magnetisierter Materialien (Permanentmagnete) soll das magnetische Feld nun durch einen stromdurchflossenen Leiter erzeugt werden. Folgende Abbildung zeigt eine Anordnung mit der Fläche A, die durch einem Leitungsabschnitt der Länge b im Abstand a Leiter dargestellt wird.



Frage 6.3.1: Skizzieren Sie den Verlauf der magnetischen Feldstärke. Der Strom I wird vorgegeben.

Frage 6.3.2: Wie lässt sich der magnetische Fluss durch die Fläche A berechnen?

Frage 6.3.3: Erläutern Sie den Lösungsweg zur Berechnung der Induktivität der Leiterschleife.

Lösung: Der Lösungsweg führt vom Strom I über die Feldstärke H. Mit Hilfe der Permeabilität $\mu_r \mu_0$ folgt aus H die magnetische Flussdichte B.

Den magnetischen Fluss durch die Fläche A berechnet man somit aus der Beziehung $\Phi = \int B \, dA = \mu_r \mu_0 \int H \, dA$. Hierzu ist eine Berechnung der magnetischen Feldstärke H erforderlich. Aus dem magnetischen Fluss Φ folgt dann aus der Beziehung $\Lambda = \Phi / I$ die Induktivität der Anordnung.

Frage 6.3.4: Berechnen Sie die Induktivität der oben gezeigten Leiterschleife. Erläutern Sie das Ergebnis in Bezug auf Materialeigenschaften und den Einfluss der Geometrie.

Lösung: Das Feld H eines mit dem Strom I durchflossenen Leiters mit Radius r_0 : entnimmt man entweder der Literatur bzw. einer eigenen Berechnung, wie bei den stationären Strömungsfeldern gezeigt: $H(x) = I / 2\pi x$.

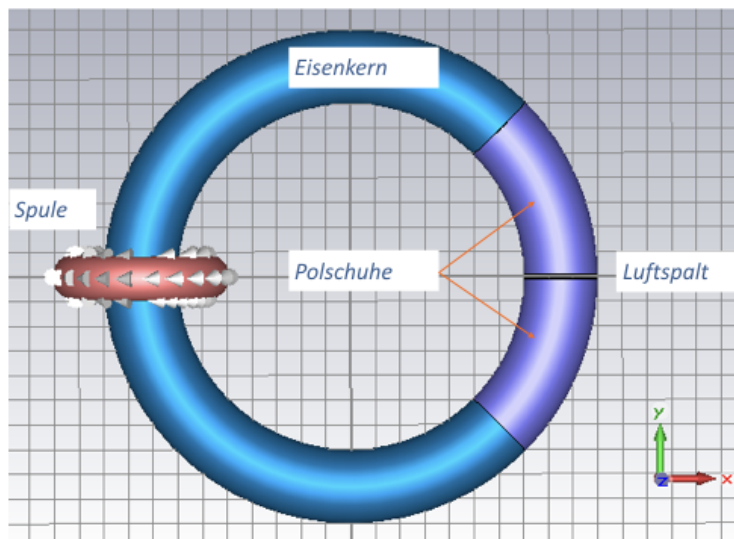
Für den magnetischen Fluss eines Leiters der Länge b im Abstand $x = r_0$ bis $x = a$ erhält man somit aus $\Phi_1 = \int B \, dA = \mu_r \mu_0 \int H \, dA = ((\mu_r \mu_0 I b) / 2\pi) \int (1/x) \, dx = ((\mu_r \mu_0 I b) / 2\pi) \ln (a/r_0)$.

Da die Anordnung symmetrisch ist, ergibt sich der gesamte Fluss beider Leiter aus $\Phi = 2 \Phi_1 = ((\mu_r \mu_0 I b) / \pi) \ln (a/r_0)$. Somit beträgt die Induktivität der Anordnung $\Lambda = \Phi / I = ((\mu_r \mu_0 b) / \pi) \ln (a/r_0)$.

Das Ergebnis zeigt, dass die Induktivität eine Eigenschaft der Geometrie und der Materialeigenschaften ist (Abmessungen b und a , Permeabilität μ). Sie kennzeichnet die Fähigkeit einer Anordnung mit gegebenen Materialien, magnetischen Fluss aufzunehmen.

6.4. Magnetischer Kreis

Folgende Anordnung zeigt einen magnetischen Kreis bestehend aus Erregerspule, Eisenkern, Polschuhen und Luftspalt. Der Querschnitt der beteiligten magnetischen Komponenten ist konstant. Die Spule soll aus $N=100$ Windungen bestehen, mit Strom von $I = 1A$.



Der Magnet ist ringförmig mit einem Außenradius von 10 cm und Innenradius 7 cm. Die Längen im Mittelpunkt des Querschnitts betragen $l_1 = 400,6$ mm, $l_2 = 131,5$ mm und $l_3 = 2$ mm. Für den Eisenkern wird $\mu_{r1} = 1000$ angenommen, für die Polschuhe $\mu_{r2} = 100000$. Die Permeabilität des Luftspaltes beträgt $\mu_{r3} = 1$.

Qualitative Betrachtung

Frage 6.4.1: Skizzieren Sie den Verlauf der magnetischen Flussdichte. Welche Bedingungen gelten an den Grenzflächen zwischen den Materialien?

Frage 6.4.2: Skizzieren Sie den Verlauf der magnetischen Feldstärke. Welche Bedingungen gelten an den Grenzflächen zwischen den Materialien?

Frage 6.4.3: Welche Konsequenzen ergeben sich aus den Materialeigenschaften μ_r ? Welchen Einfluss hat die Geometrie? Wo vermuten Sie die größte magnetische Feldstärke?

Berechnung der Feldstärken

Frage 6.4.4: Berechnen Sie die magnetischen Feldstärken H_1 , H_2 und H_3 in den Abschnitten 1 (Eisenkern), 2 (Polschuhe) und 3 (Luftspalt) unter der Annahme, dass der Streufluss vernachlässigbar ist.

Lösung: Aus der Stetigkeit der Flussdichte ($B_1 = B_2 = B_3$) folgt, dass

$$\mu_1 H_1 = \mu_2 H_2 = \mu_3 H_3. \quad (\text{F4.4.1})$$

Die Anordnung entspricht einer Serienschaltung der drei Abschnitte, somit gilt:

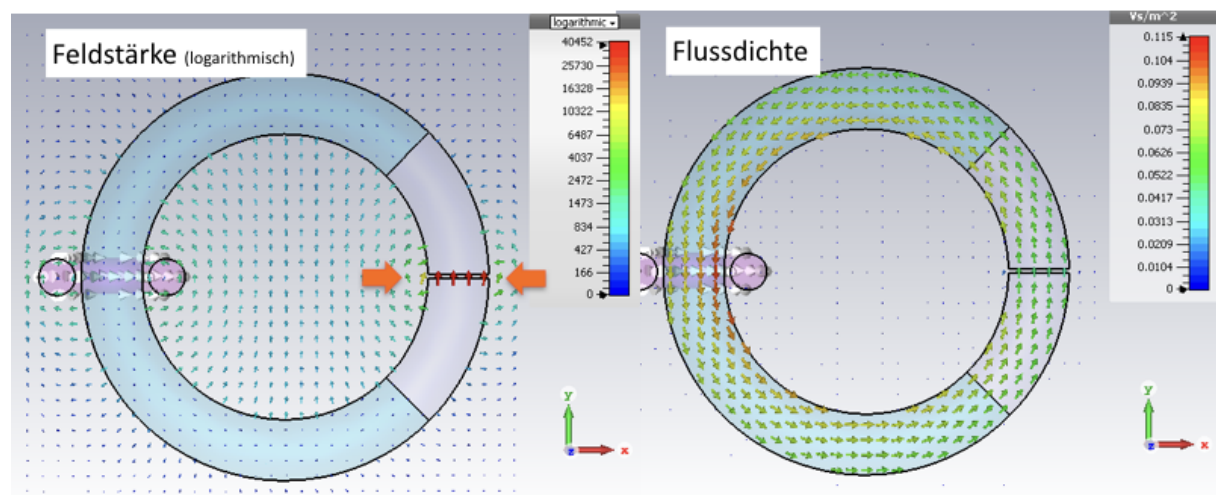
$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{r} = NI = 100 \text{ A} = \int_{l_1} H_1 dl + \int_{l_2} H_2 dl + \int_{l_3} H_3 dl = H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_3 l_3 \quad (\text{F4.4.2})$$

Durch Einsetzen der Verhältnisse aus Gleichung (F4.4.1) erhält man:

$$100 \text{ A} = NI = \frac{\mu_3}{\mu_1} H_3 l_1 + \frac{\mu_3}{\mu_1} H_3 l_2 + \mu_3 H_3 l_3$$

Hieraus errechnet sich H_3 und somit die übrigen Komponenten.

Eine numerische Berechnung zeigt folgende Ergebnisse:



7. Quasistationäre elektromagnetische Felder

Unter quasistationären Feldern versteht man Felder, die zeitlich veränderlich sind. Jedoch sind diese zeitlichen Änderungen so langsam, dass Laufzeiteffekte in der betrachteten Anordnung keine Rolle spielen. Beispiele:

- 50 Hz Wechselstromsystem: Bei einer Ausbreitungsgeschwindigkeit von $v = 300 \cdot 10^6 \text{ m/s}$ beträgt die Wellenlänge $\lambda = v / f = 6000 \text{ km}$. In Anordnungen bis zu 100 km sind die Signale also annähernd in Phase.
- Nachrichtentechnisches System mit Datenrate 1 Mbit/s: Pro Sekunde werden 10^6 Bits übertragen; die Dauer eines Bits beträgt somit $1 \mu\text{s}$. Bei einer Ausbreitungsgeschwindigkeit von $v = 300 \cdot 10^6 \text{ m/s}$ beträgt die Laufzeit für eine Strecke von 30 m etwa $0.1 \mu\text{s}$. Gegenüber der Dauer eines Bits ist diese Laufzeit vergleichsweise gering. Eine Anordnung, die kürzer als 30 m ist, verhält sich also annähernd synchron in dem Sinne, dass überall der gleiche Spannungspegel gemessen werden kann.

Zwischen diesen genannten Beispielen bestehen erhebliche Unterschiede in der Geschwindigkeit der zeitlichen Veränderungen der Signale. Beide Systeme sind jedoch quasistationär im Sinne von annähernd synchron innerhalb der relevanten Entfernungen. Zu den Anwendungsfeldern gehören die Leistungselektronik, die Energieversorgung und alle niederfrequenten Schaltungen.

Für die elektrische Feldstärke bei zeitlich veränderlichen Systemen gilt:

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{Gleichung 7/7})$$

Änderungen der magnetischen Flussdichte erzeugen elektrische Wirbelfelder.

7.1. Induktionsgesetz

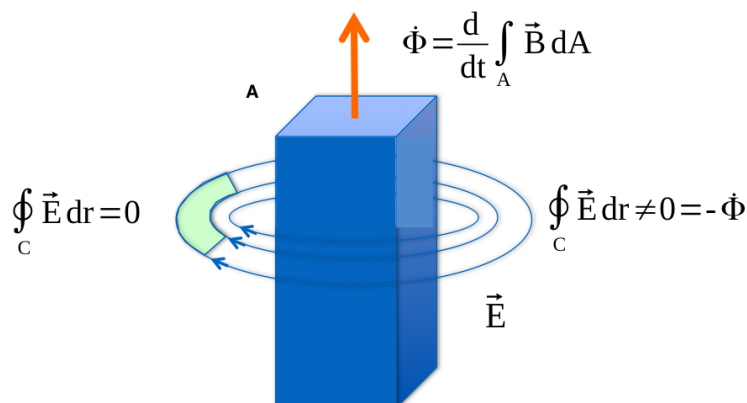
Gleichung (7/7) lässt sich wie folgt interpretieren: Durch eine magnetische Flussänderung wird ein elektrisches Wirbelfeld induziert. In Integralform gilt:

$$\oint \vec{E} d\vec{r} = \frac{d}{dt} \int_A \vec{B} d\vec{A} \quad (\text{Integralform von Gleichung 7/7})$$

Hierbei bedeutet das Integral über der Flussdichte B und der durchflossenen Fläche A den magnetischen Fluss Φ :

$$\Phi = \int_A \vec{B} d\vec{A} \quad (\text{magnetischer Fluss})$$

Folgende Abbildung zeigt das durch die zeitliche Änderung des magnetischen Flusses induzierte Wirbelfeld.



Frage 7.1.1: Erläutern Sie die Begriffe magnetische Flussdichte und magnetischen Fluss. Welcher Unterschied besteht zur magnetischen Feldstärke?

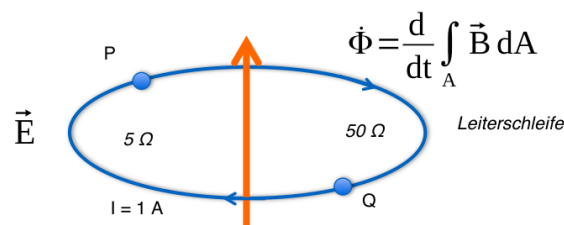
Frage 7.1.2: Würde ohne zeitliche Änderung des magnetischen Flusses ein elektrisches Wirbelfeld entstehen? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Frage 7.1.3: Gleichung 7/7 (für die elektrische Feldstärke) besitzt Ähnlichkeit mit Gleichung 2/7 (für die magnetische Feldstärke). Worin bestehen die Ähnlichkeiten? Welche Unterschiede gibt es?

Frage 7.1.4: Ob Wirbel auftreten, ist eine Frage des jeweils betrachteten Raumes. Erläutern Sie, warum in den gezeigten Integrationspfaden Wirbel auftreten oder nicht.

7.2. Elektrische Wirbelfelder

Würde man eine Leiterschleife um den Polschenkel legen, in dem sich der magnetische Fluss ändert, so würde das elektrische Wirbelfeld zu einem elektrischen Wirbelstrom führen, wie in folgender Abbildung gezeigt.



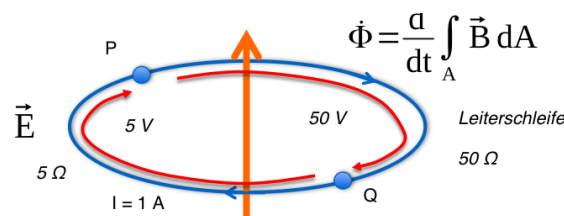
Frage 7.2.1: Nennen Sie einige Beispiele, wo Wirbelfelder und Wirbelströme entstehen.

Frage 7.2.2: Wann führt ein elektrisches Wirbelfeld zu einem Wirbelstrom? Mit welcher Gleichung lässt sich dieser Zusammenhang begründen?

Frage 7.2.3: Wovon hängt die Größe des Stroms ab?

Frage 7.2.4: Es sei angenommen, dass die Leiterschleife aus zwei Abschnitten mit den Widerständen 5 Ohm und 50 Ohm besteht, wie in der Abbildung gezeigt. Welche Umlaufspannung erhält man zwischen den Punkten P und Q? Berechnen Sie die Umlaufspannung in den beiden Abschnitten sowie die gesamte Umlaufspannung. Lässt sich das Ergebnis mit Hilfe der Maschengleichung begründen?

Lösung:



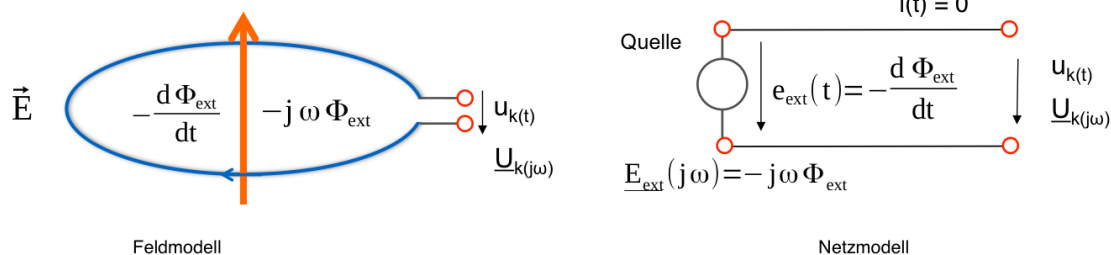
Zwischen P und Q erhält man 50 V, zwischen Q und P 5 V; insgesamt somit 55 Volt, Die Umlaufspannung ist abhängig von gewählten Integrationspfad.

7.3. Ersatzschaltung für die Induktion

Für den praktischen Gebrauch sind Ersatzschaltungen mit Hilfe von Spannungsquellen und diskreten Komponenten R, L, und C hilfreich. Daher soll für die Induktion eine solche Ersatzschaltung als Netzmodell erstellt werden.

Netzwerkmodell der Induktion im Leerlauf

Die induzierte Spannung stellt in der elektrischen Ersatzschaltung (Netzwerkmodell) eine Spannungsquelle dar, wie in der folgenden Abbildung gezeigt. Hierbei wurde die Schreibweise im Zeitbereich, sowie die Schreibweise mit komplexen Zeigern, gewählt, wie bei Anwendungen mit fester Frequenz üblich.

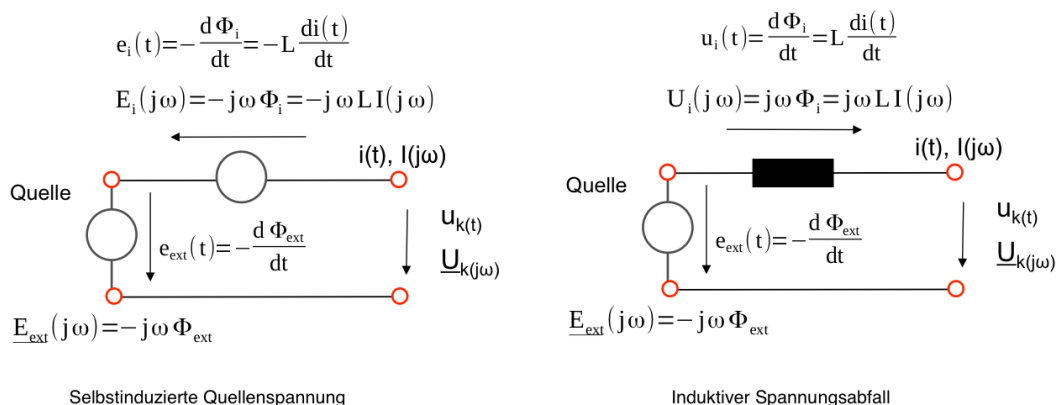


Frage 7.3.1: Erläutern Sie das Funktionsprinzip der Induktion im Feldmodell (physikalisches Modell) und im Netzmodell (Ersatzschaltung). Welche Rolle spielt die Spannungsquelle? Hinweis: Verwenden Sie den Begriff Leerlaufspannung.

Frage 7.3.2: Welchem Zweck dient diese Ersatzschaltung und für welche Anwendungsgebiete eignet sich? Wo sind die Grenzen dieses Modells?

Netzwerkmodell der Induktion unter Last

Bei der oben gezeigten offenen Leiterschleife fließt kein Strom. Unter Last würde der Wirbelstrom seinerseits eine Spannung an der Leiterschleife induzieren, der proportional ist zur Induktivität der Leiterschleife. Dieser Strom wirkt der Quellenspannung entgegen.



Frage 7.3.3: Erläutern Sie die kausale Kette, die mit einem Stromfluss verbunden ist.

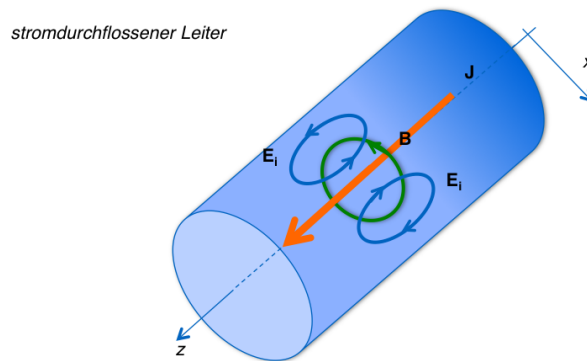
Lösung: Sofern ein Strom fließt, ist dieser mit einem magnetischen Fluss verbunden, der wiederum eine Spannung in der Leiterschleife induziert, die der ursprünglich induzierten Spannung entgegen wirkt.

Frage 7.3.4: Ersatzschaltung. In der oben gezeigten Ersatzschaltung kann man die selbstinduzierte Spannung entweder als Spannungsquelle oder als induktiven Spannungsabfall berücksichtigen. Erläutern Sie die beiden Varianten in der Ersatzschaltung. Welche der beiden Varianten ist Ihnen aus Schaltungen mit RLC bzw. aus der komplexen Wechselstromrechnung geläufig?

7.4. Stromverdrängung (Skin-Effekt)

Im Inneren eines mit Wechselstrom durchflossenen Leiters erzeugt die Stromdichte $\mathbf{J}$ ein magnetisches Wechselfeld $\mathbf{H}$ gemäß $\text{rot } \vec{H} = \vec{J} = \sigma \vec{E}$. Nach dem Induktionsgesetz erzeugt die mit diesem Magnetfeld verbundene Änderung der magnetischen Flussdichte wiederum ein elektrisches

Wirbelfeld: $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. Dieses Feld wirkt im Inneren des Leiters dem ursprünglichen elektrischen Feld $\mathbf{E}$ entgegen, wodurch der Strom dort geschwächt wird. An den Rändern des Leiters wird der Strom verstärkt. Bei hohen Frequenzen ist dieser Effekt umso ausgeprägter: der leitenden Bereich reduziert sich auf die Ränder des Leiters (die äußere Hülle, engl. Skin). Folgende Abbildung zeigt des Zusammenhang.



Frage 7.4.1: Qualitative Erläuterung. Skizzieren Sie die kausale Kette und erläutern Sie den Effekt der Stromverdrängung qualitativ. Welche praktischen Konsequenzen ergeben sich hieraus für die Stromführung in Leitern bei Wechselstrom? Welche Abhängigkeit von der Frequenz wird sich vermutlich ergeben? Begründen Sie Ihre Aussagen qualitativ mit den Feldgleichungen.

Bonusfragen

Die folgenden Betrachtungen sollen nur exemplarisch zeigen, was man mit den Feldgleichungen anstellen kann. Die mathematischen Methoden hierfür (Vektoranalyse) sind nicht Teil der Grundlagen der Elektrotechnik. Die Grundbegriffe der Vektoranalyse finden sich im Anhang dieses Skriptes. Dennoch ermöglichen die Feldgleichungen ein qualitatives Verständnis der Zusammenhänge und der physikalischen Effekte.

Frage 7.4.2: Elektrisches Feld. Wie lautet die Feldgleichung des resultierenden elektrischen Feldes? Hinweis: Verwenden Sie die beiden oben genannten Beziehungen für das Durchflutungsgesetz und für das Induktionsgesetz.

Lösung: Aus $\text{rot } \vec{H} = \sigma \vec{E}$ und $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ eliminiert man H , indem man auf die zweite Gleichung nochmals den Operator rot anwendet und die Reihenfolge der Ableitungen vertauscht:

$$\text{rot rot } \vec{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{H}.$$

Einsetzen der ersten Gleichung ergibt: $\text{rot rot } \vec{E} = -\mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. Die Operation $\text{rot rot } X$ ist gleich $\text{grad div } X - \Delta X$, wobei Δ den Laplace Operator bezeichnet. Da das Strömungsfeld quellenfrei ist ($\text{div } J = \text{div } \sigma E = 0$), erhält man als Feldgleichung:

$$\Delta \vec{E} = -\mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Frage 7.4.3: Wie lautet die Feldgleichung in komplexer Schreibweise (Phasoren, für Anwendungen mit einer festen Frequenz)? Welche Lösung besitzt die Feldgleichung?

Lösung: Feldgleichung in komplexer Schreibweise: $\Delta \vec{E} = -j \omega \mu \sigma \vec{E} = k^2 \vec{E}$

Lösungen der Feldgleichung sind vom Typ $E_z(x) = E_z(0) e^{-kx}$ mit $k = 1/\delta + j/\delta$. Der erste Anteil beschreibt die Dämpfung mit fortschreitender Eindringtiefe in den Leiter, der zweite Anteil beschreibt eine Phasendrehung.

Frage 7.4.4: Eindringtiefe. Die Lösung der Feldgleichung führt auf einen Ausdruck $|E_z(x)| = |E_z(0)| e^{-x/\delta}$ für den Betrag der elektrischen Feldstärke. Bei einer Eindringtiefe von $x = \delta$ hat der Betrag der Feldstärke somit auf den Anteil e^{-1} abgenommen. Welche Abhängigkeit von der Frequenz besitzt die Eindringtiefe δ ? Untersuchen Sie das Ergebnis auf Plausibilität.

Lösung: Verwendet man $k^2 = \omega \mu \sigma = (1/\delta)^2$, so erhält man $\delta = 1/\sqrt{\omega \mu \sigma}$. Vervierfachung der Frequenz $f = \omega/2\pi$ der Wechselspannung führt also zu einer Halbierung der Eindringtiefe.

Die Eindringtiefe ist außerdem abhängig von der Leitfähigkeit und der Permeabilität. Diese Abhängigkeiten erklären sich aus der Entstehung des Effekts (Strom induziert Magnetfeld, Änderung des magnetischen Flusses (μ) induziert elektrisches Wirbelfeld, elektrisches Wirbelfeld führt zu Wirbelströmen im Leiter (σ)).

7.5. Transformator

Bei einem Übertrager (Transformator) wird das Induktionsgesetz gezielt dazu genutzt, um auf der Primärseite einen periodischen magnetischen Fluss zu erzeugen, der auf der Sekundärseite wiederum eine periodische elektrische Spannung induziert. Anwendungsbeispiele finden sich in der elektrischen Energieversorgung, bzw. zur Anpassung von Impedanzen (Verstärker an Lautsprecher).

Frage 7.5.1: Skizzieren Sie den Aufbau eines einfachen Transformators, bestehend aus Primärwicklung, Eisenkern und Sekundärwicklung.

Frage 7.5.2: Beschreiben Sie die Funktionsweise des Transformators. Nehmen Sie hierzu an, dass an der Primärseite eingespeist wird, und an der Sekundärseite Leistung konsumiert wird.

Frage 7.5.3: Erläutern Sie das Funktionsprinzip mit Hilfe einer kausalen Kette beginnend mit der Vorgabe der Spannung auf der Primärseite.

Frage 7.5.4: Begründen Sie das Funktionsprinzip mit Hilfe der Feldgleichungen.

7.6. Zusammenfassung

Elektromagnetische Felder werden durch folgende Gleichungen beschrieben:

Stationäre elektrische Strömungsfelder:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (\text{Gleichung 1/7})$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} \quad (\text{Gleichung 2/7})$$

Die Stromdichte ist proportional zur elektrischen Feldstärke. Hierbei kennzeichnet die Materialkonstante σ die Leitfähigkeit des Materials. Die Stromdichte erzeugt ein magnetisches Wirbelfeld.

Elektrostatistische Felder:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (\text{Gleichung 3/7})$$

$$\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q \quad \text{bzw.} \quad \text{div } \vec{D} = \rho \quad (\text{Gleichung 4/7})$$

Die elektrische Flussdichte ist proportional zur elektrischen Feldstärke. Hierbei kennzeichnet die Materialkonstante ϵ die Permittivität des Materials. Die Quellen elektrischer Felder sind Ladungen.

Magnetische Felder:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (\text{Gleichung 5/7})$$

$$\oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \text{div } \vec{B} = 0 \quad (\text{Gleichung 6/7})$$

Die magnetische Flussdichte ist proportional zur magnetischen Feldstärke. Hierbei kennzeichnet die Materialkonstante μ die Permeabilität des Materials. Magnetische Felder sind quellenfrei.

Quasistationäre elektromagnetische Felder:

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{Gleichung 7/7})$$

Änderungen der magnetischen Flussdichte erzeugen elektrische Wirbelfelder.

Diese Gleichungen lassen sich nach folgendem Schema ordnen:

Feldgleichungen:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Quellen:

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

Materialgleichungen:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

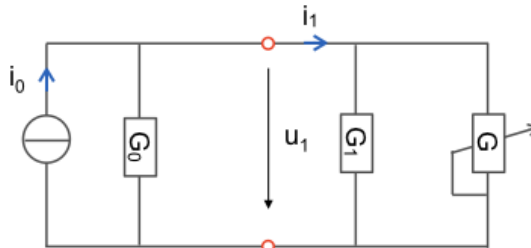
Die Gleichungen lassen sich wie folgt interpretieren:

- **Feldgleichungen:** Die Feldgleichungen zeigen den Zusammenhang von Feldstärke und Strömen bzw. zeitlichen Änderungen der Flussdichten.
- **Quellen:** Die Quellen elektrostatischer Felder sind Ladungen. Magnetische Felder sind quellenfrei.
- **Materialgleichungen:** Die Materialgleichungen beschreiben den Zusammenhang von Feldstärken und Flussdichten. Materialeigenschaften werden hierbei durch die Materialkonstanten beschrieben: der elektrischen Leitfähigkeit (σ), der elektrischen Permittivität ($\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$), sowie der magnetischen Permeabilität ($\mu = \mu_r \mu_0$).

8. Klausuraufgaben

8.1. Netzwerk aus Leitwerten mit Stromquelle

Eine Stromquelle mit Kurzschlussstrom i_0 und Leitwert G_0 ist an zwei Lastwiderstände mit den Leitwerten G_1 und G angeschlossen, wie in folgender Abbildung gezeigt. Hierbei ist G variabel. Gegeben sind i_0 , G_0 und G_1 .



Frage 8.1.1: Skizzieren Sie qualitativ $u_1(G)$ und $i_1(G)$, d.h. Klemmenspannung und Klemmenstrom in Abhängigkeit von G . Variieren Sie hierbei G im Bereich $G = 0$ bis $G \rightarrow \infty$.

Lösung: (1) Für $G \rightarrow \infty$ fließt der Kurzschlussstrom i_0 . Die Klemmenspannung $u_1 = 0$.

(2) Für $G \rightarrow 0$ (Leerlauf) ergibt sich ein endlicher Wert für i_1 und für u_1 . Ist G_1 größer als G_0 , so bestimmt G_1 den Klemmenstrom und die Klemmenspannung. Berechnung: Es gilt $i_0 = (G_0 + G_1) u_1$, woraus u_1 folgt. Hieraus ergibt sich dann der Klemmenstrom $i_1 = u_1 G_1$.

Frage 8.1.2: Wie groß muss G gewählt werden, damit die Stromquelle ihre maximale Leistung abgibt? Wie groß ist die abgegebene Leistung in diesem Fall? Wie groß ist der Wirkungsgrad?

Lösung: (1) Für eine maximale Leistungsausbeute muss $(G_1 + G) = G_0$ betragen. Sofern $G_1 < G_0$ ist, lässt sich G entsprechend einstellen. (2) Der Wirkungsgrad beträgt dann 50%.

Frage 8.1.3: Wie groß muss G gewählt werden, damit der Wirkungsgrad maximal wird? Wie groß ist die an der Klemme umgesetzte Leistung in diesem Fall?

Lösung: (1) Im Kurzschlussfall ($G \rightarrow \infty$) ist der Wirkungsgrad optimal. (2) An der Klemme wird dann keine Leistung umgesetzt (am Leitwert G_0 ebenfalls nicht).

Frage 8.1.4: Berechnen Sie $u_1(G)$ und $i_1(G)$ in Abhängigkeit von G . Gegeben sind i_0 , G_0 und G_1 .

Lösung: (1) Aus $i_0 = (G_0 + G_1 + G) u_1$ folgt $u_1(G) = i_0 / (G_0 + G_1 + G)$.

(2) Den Klemmenstrom i_1 erhält man aus u_1 : $i_1(G) = (G_1 + G) u_1 = i_0 (G_1 + G) / (G_0 + G_1 + G)$.

Frage 8.1.5: Berechnen Sie die Leistung an der Anschlussklemme in Abhängigkeit von G .

Lösung: $P_1 = u_1^2 (G_1 + G)$. Durch Einsetzen der Klemmenspannung aus Frage 1.4 erhält man:

$$P_1(G) = i_0^2 (G_1 + G) / (G_0 + G_1 + G)^2.$$

Diese Leistung wird maximal für $G_1 + G = G_0$.

Frage 8.1.6: Berechnen Sie den Wirkungsgrad an der Anschlussklemme in Abhängigkeit von G .

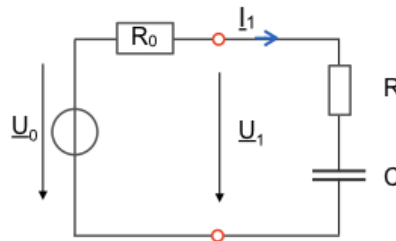
Lösung: Die von der Quelle insgesamt umgesetzte Leistung beträgt $P_0 = u_1^2 (G_0 + G_1 + G)$.

Der Wirkungsgrad berechnet sich aus dem Verhältnis $\eta = P_1 / P_0 = (G_1 + G) / (G_0 + G_1 + G)$.

(1) Den besten Wirkungsgrad erzielt man somit im Kurzschlussfall ($G \rightarrow \infty$). (2) Für $G = 0$ berechnet sich $\eta = G_1 / (G_0 + G_1)$. (3) Für $G_0 = (G_1 + G)$ beträgt der Wirkungsgrad somit 50%.

8.2. Ohmsch-kapazitive Last

Folgende Schaltung zeigt eine Last mit ohmschen Anteil (R) und kapazitivem Anteil (C) an einer Quelle mit Leerlaufspannung $\underline{U}_0$ und Innenwiderstand R_0 .



Frage 8.2.1: Berechnen Sie die Impedanz $\underline{Z}_1 = \underline{U}_1 / \underline{I}_1$.

Frage 8.2.2: Erstellen Sie ein Zeigerdiagramm für $\underline{U}_1$ und $\underline{I}_1$.

Frage 8.2.3: Erstellen Sie ein Zeigerdiagramm für alle Ströme und Spannungen der Schaltung.

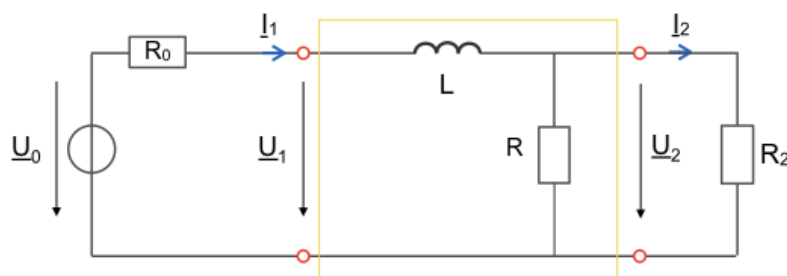
Frage 8.2.4: Berechnen Sie Scheinleistung, Wirkleistung und Blindleistung an der Klemme.

Frage 8.2.5: Berechnen Sie den Leistungsfaktor $\cos(\phi)$.

Frage 8.2.6: Welchen Einfluss hat die Kapazität C auf die Klemmenspannung und den Klemmenstrom? Welchen Einfluss hat die Kapazität C auf die Wirkleistung an der Klemme? Hinweis: Schätzen Sie den Einfluss zunächst mit Hilfe der extremen Fälle $C = 0$ und $C \rightarrow \infty$ ab. Betrachten Sie außerdem als Näherung $R_0 \ll R$.

8.3. Zweitor

Folgende Abbildung zeigt ein LR-Glied, das zwischen den Klemmen der Quelle $\underline{U}_0$ mit Innenwiderstand R_0 und dem Lastwiderstand R_2 betrieben wird. Gegeben sind $\underline{U}_0$, R_0 , R_2 , sowie R und L .



Frage 8.3.1: Berechnen Sie die Spannung $\underline{U}_2$ in Abhängigkeit von $\underline{U}_1$. Hinweis: Betrachten Sie L als hierzu als komplexe Impedanz.

Frage 8.3.2: Plausibilität. Überprüfen Sie Ihre Berechnung auf Plausibilität, indem Sie für C die extremen Fälle $C = 0$ und $C \rightarrow \infty$ annehmen.

Frage 8.3.3: Übertragungsfunktion. Das Verhältnis der Ausgangsspannung $\underline{U}_2$ zur Eingangsspannung $\underline{U}_1$ wird als komplexe Übertragungsfunktion des Zweitors definiert. Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $\underline{G} = \underline{U}_2 / \underline{U}_1$.

Frage 8.3.4: Vereinfachte Übertragungsfunktion. Es sei angenommen, dass der Lastwiderstand $R_2 \gg R$ ist (d.h. an Klemme 2 ist eine hochohmige Schaltung angeschlossen). Welche Vereinfachung ergibt sich hierdurch für die Übertragungsfunktion?

Frage 8.3.5: Frequenzabhängigkeit. Die Übertragungsfunktion ist abhängig von der Frequenz, mit der die Schaltung betrieben wird. Stellen Sie die Abhängigkeit der Übertragungsfunktion $\underline{G}(\omega)$ in Abhängigkeit der Frequenz nach Betrag und Phase dar. Wie lässt sich das Verhalten abhängig von der Frequenz charakterisieren? Hinweis: Verwenden Sie die vereinfachte Übertragungsfunktion ($R_2 \gg R$). Überprüfen Sie Ihr Ergebnis auf Plausibilität mit Hilfe der Spezialfälle $\omega = 0$ und $\omega \rightarrow \infty$. Eine qualitative Skizze genügt.

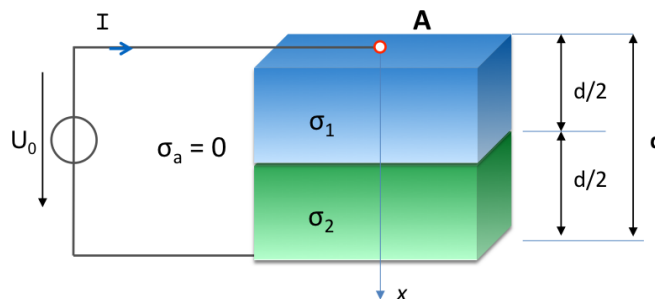
Frage 8.3.6: Abhängigkeit des Frequenzganges von R und L. Welche Rolle spielen die Werte von R und L im Frequenzgang der Übertragungsfunktion $\underline{G}(\omega)$?

Frage 8.3.7: Grenzfrequenz. Auf welchen Wert hat sich der Betrag der Übertragungsfunktion $|\underline{G}(\omega)|$ bei der Frequenz $\omega_g = R/L$ reduziert?

Frage 8.3.8: Signalpegel und Leistung. Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Ausgangsspannung $\underline{U}_2$ an der Klemme 2 und der Leistung P_2 an dieser Klemme? Auf welchen Wert hat sich der Betrag der Leistung an Klemme 2 bei der Frequenz ω_g reduziert?

8.4. Stromdurchflossene Leiter

Folgende Abbildung zeigt einen aus zwei unterschiedlichen Materialien geschichteten Leiter. Die Kontaktflächen mit der Fläche A wurden mit näherungsweise ideal leitenden Elektroden versehen und an eine näherungsweise ideale Spannungsquelle angeschlossen. Die Höhe des Leiters beträgt insgesamt d, wobei die obere Hälfte aus Material mit der elektrischen Leitfähigkeit σ_1 besteht, das untere Hälfte aus Material mit der Leitfähigkeit σ_2 . Es sei angenommen, dass $\sigma_1 = 9 \sigma_2$ ist. Schicht 1 ist somit der bessere Leiter.



Frage 4.1: Stromdichte. Welche Stromdichte ergibt sich, wenn man in der Zuleitung den Strom I misst? Wie verläuft die Stromdichte durch die beiden Schichten? Welchen Wert besitzt die Stromdichte in den jeweiligen Materialien?

Lösung: Stromdichte $J = I/A$. (1) Die Stromdichte verteilt sich gleichmäßig auf dem Querschnitt A und folgt der x-Koordinate. (2) Die Stromdichte in beiden Materialien ist gleich.

Frage 4.2: Elektrisches Ersatzschaltbild. Skizzieren Sie ein elektrisches Ersatzschaltbild der Anordnung. In welchem Verhältnis stehen die beiden Widerstände zueinander? Ist das Ergebnis plausibel?

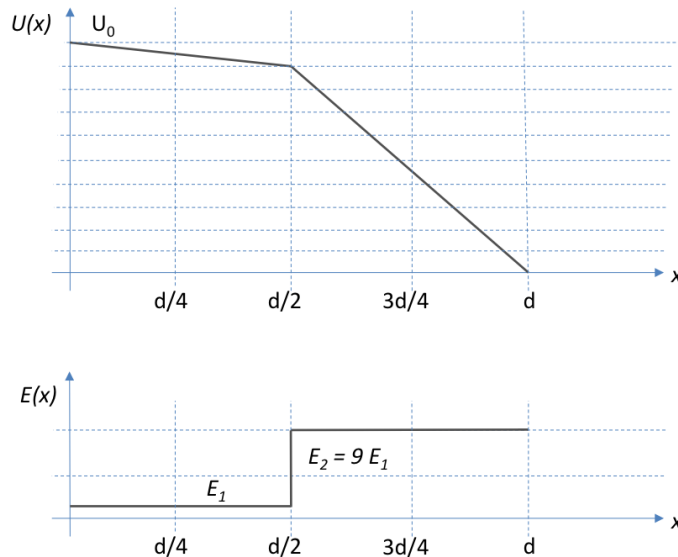
Lösung: Serienschaltung aus R_1 und R_2 . Es gilt hierbei $R \sim d/\sigma$ und somit $R_2/R_1 = \sigma_1/\sigma_2$. Mit den gegebenen Verhältnissen errechnet man: $R_2/R_1 = 9$. Schicht 1 leitet um einen Faktor 9 besser, somit ist der Widerstand um diesen Faktor geringer. Das Ergebnis ist somit plausibel.

Frage 4.3: Welche Spannungen errechnen sich aus dem elektrischen Ersatzschaltbild, wenn z.B. $U_0 = 10 \text{ V}$ angenommen wird?

Lösung: Es gilt $U_2/U_1 = R_2/R_1 = 9$. Begründung: Serienschaltung mit Strom $I=I_1=I_2$. Wegen $U_0 = U_1 + U_2$ ergeben sich $U_1 = U_0 R_1 / (R_1 + R_2) = U_0/10 = 1 \text{ V}$ und folglich $U_2 = 9 U_0/10 = 9 \text{ V}$.

Frage 4.4: Verlauf der elektrischen Spannung. Skizzieren Sie den Verlauf der elektrischen Spannung in Richtung der x-Koordinate über der Anordnung.

Lösung: Die Spannung fällt kontinuierlich bis zu den errechneten Werten ab, d.h. im ersten Abschnitt um 1 V, im zweiten Abschnitt um 9 V.

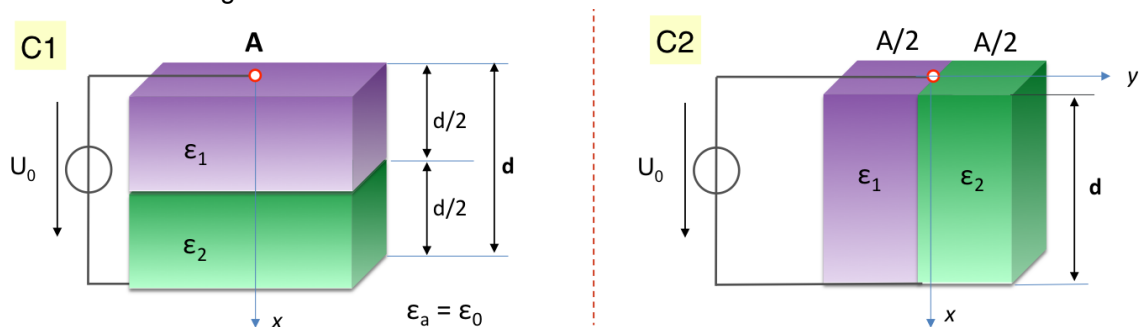


Frage 4.5: Elektrischen Feldstärke. Skizzieren Sie den qualitativen Verlauf der elektrischen Feldstärke über der x-Koordinate. Welcher Leiter besitzt die höhere Feldstärke? Vergleichen Sie den Verlauf mit dem der elektrischen Spannung. Welche Beziehung besteht zwischen Spannung und Feldstärke?

Lösung: Es gilt $J = \sigma_1 E_1 = \sigma_2 E_2$. Aus (1) folgt $E_2 = E_1 \sigma_1 / \sigma_2 = 9 E_1$ mit den oben gegebenen Werten. Die größte Feldstärke findet sich über dem schlechteren Material. Die Feldstärke entspricht dem fallenden Gradienten (= Ortsableitung) der Spannung: $E = -dU(x) / dx$. Im ersten Abschnitt errechnet man $2 U_0/d$, im zweiten Abschnitt errechnet man $18 U_0/d$. Somit ist $E_2 = 9 E_1$.

8.5. Feldstärke und Flussdichte

Ein Kondensator soll aus zwei unterschiedlichen, nicht leitfähigen Materialien geschichtet werden, wie in folgender Abbildung gezeigt. Material 1 besitzt eine relative Permittivität von $\epsilon_{r1} = 5$, beim zweiten Material beträgt $\epsilon_{r2} = 25$.



Der Materialaufwand für die beiden Anordnungen C1 und C2 ist gleich. Bei Anordnung C1 werden die beiden Dielektrika horizontal geschichtet, in Anordnung C2 vertikal.

Die oberen und unteren Kontaktflächen mit dem Querschnitt A wurden mit näherungsweise ideal leitenden Elektroden versehen und an eine konstante Spannungsquelle angeschlossen. Die Höhe der Anordnung beträgt insgesamt d.

Frage 5.1: Welche Anordnung besitzt die höhere Kapazität? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Lösung: Anordnung C2 mit den gegebenen Werten für ϵ_{r1} und ϵ_{r2} . Begründung:

(1) Wegen der bei C1 gegenüber C2 halbierten Entfernung und verdoppelten Fläche sind die beiden Teilkondensatoren in C1 jeweils 4 Mal so groß wie die Teilkondensatoren in C2.

(2) Die Anordnung (C1) entspricht einer Serienschaltung zweier Kondensatoren C_{11} und C_{12} . Die Gesamtkapazität ist kleiner als die kleinere der beiden Kapazitäten.

(3) Anordnung (C2) entspricht der Parallelschaltung zweier Kondensatoren C_{21} und C_{22} . Die Gesamtkapazität ist die Summe beider Kapazitäten.

(4) Es gilt wegen der Materialkonstanten in jeder Anordnung jeweils $C_{12} = 5 C_{11}$, bzw. $C_{22} = 5 C_{21}$.

(5) Somit besitzt Anordnung C2 die größere Kapazität.

Frage 5.2: Skizzieren Sie den Verlauf der elektrischen Feldstärke und den Verlauf der elektrischen Flussdichte in beiden Anordnungen. Worin bestehen die Unterschiede? Hinweis: Seitenansicht ohne 3D-Effekte genügt.

Lösung: (1) Anordnung C1: Die elektrische Flussdichte ist konstant wegen Kontinuität an der Grenzfläche, d.h. $D = D_1 = D_2$. Somit gilt $\epsilon_1 E_1 = \epsilon_2 E_2$. Es gilt somit $E_1 = 5 E_2$. Über dem schlechteren Material findet sich die größere Feldstärke.

(2) Anordnung C2: Die elektrische Feldstärke in beiden Teilen ist gleich (wegen der gleichen Potentialdifferenz), d.h. $E = E_1 = E_2$. Demnach sind die elektrischen Flussdichten $D_1 = \epsilon_1 E$ und $D_2 = \epsilon_2 E$. Die elektrische Ladungsdichte in Material 2 ist somit um einen Faktor 5 höher als im Material 1.

Frage 5.3: Berechnen Sie die Kapazität C_1 der Anordnung C1.

Lösung: Definition: $C_1 = Q / U_0$. Hierbei berechnet sich die Ladung aus der Ladungsdichte D und der Oberfläche A: $Q = D A = \epsilon_1 E_1 A = \epsilon_2 E_2 A$.

Zur Berechnung der beiden Teilkapazitäten sind die Spannungen U_1 und U_2 erforderlich. Aus den elektrischen Feldstärken errechnet man: $U_1 = E_1 d/2$ und $U_2 = E_2 d/2$. Somit erhält man $C_{11} = 2 \epsilon_1 A / d$ und $C_{12} = 2 \epsilon_2 A / d = 10 \epsilon_1 A / d$.

Die beiden Teilspannungen ergeben $U_1 + U_2 = U_0$. Somit gilt auch $U_1/Q + U_2/Q = U_0/Q$. Hieraus folgt $1/C_{11} + 1/C_{12} = 1/C_1$.

Man erhält $C_1 = 2 \epsilon_1 \epsilon_2 A / ((\epsilon_1 + \epsilon_2) d) = 5 \epsilon_1 A / (3d)$.

Frage 5.4: Berechnen Sie die Kapazität C_2 der Anordnung C2.

Lösung: Definition: $C_1 = Q / U_0$. Die Ladung Q berechnet sich hierbei aus der Ladungsdichte D und der Oberfläche A: $Q = D A$. Für die beiden Halbfächen erhält man $Q_1 = \epsilon_1 E A/2$ und $Q_2 = \epsilon_2 E A/2 = 5 \epsilon_1 E A/2$.

Die Feldstärke errechnet sich zu $E = U_0/d$.

Somit erhält man $C_{21} = \epsilon_1 A / (2d)$ und $C_{22} = \epsilon_2 A / (2d) = 5 \epsilon_1 A / (2d)$.

Die gesamte Kapazität beträgt $C_2 = C_{21} + C_{22} = 6 \epsilon_1 A / (2d) = 3 \epsilon_1 A / d$.

8.6. ...

...

8.7. ...

...

8.8. ...

...

Englisch - Deutsch

Active power	Wirkleistung
Apparent power	Scheinleistung
Capacitor	Kapazität
Circuit breaker	Leistungsschalter
Line voltage	Leiter-zu-Leiter Spannung (Effektivwert)
Inductor	Induktivität
Nominal power	Nennleistung
Nominal voltage	Nennspannung
Peak value	Spitzenwert
Phase voltage	Leiter-zu-Nullleiter Spannung (Effektivwert)
Reactive power	Blindleistung
Resistor	Widerstand
Transformer	Transformator
Transmission	Übertragung
Voltage source	Spannungsquelle
Winding	Wicklung
...	
...	

Abkürzungen

AC	Alternating Current, Wechselstrom
DC	Direct Current, Gleichstrom
$T = 1/f$	Schwingungsdauer, Periodendauer [s]
$f = 1/T$	Frequenz, Anzahl der Schwingungen pro Zeiteinheit [1/s]
$\omega = 2\pi f = 2\pi/T$	Kreisfrequenz, Winkelgeschwindigkeit der Kreisbewegung [1/s]
E	Energie [Joule, J, N m, W s, kg m ² /s ²] potentielle Energie $E_p = \frac{1}{2} k y^2$, kinetische Energie, Translation $E_k = \frac{1}{2} m v^2$, kinetische Energie, Rotation $E_r = \frac{1}{2} J \omega^2$, Energie elektrisches Feld $E_C = \frac{1}{2} C U^2$, Energie magnetisches Feld $E_L = \frac{1}{2} L I^2$
RMS	Root mean square (Effektivwert)
$\underline{Z}$	komplexer Widerstand (Impedanz, impedance)
R	Wirkwiderstand (resistance)
X	Blindwiderstand (Reaktanz, reactance)
$\underline{Y}$	komplexer Leitwert (Admittanz, admittance)
G	Wirkleitwert (conductance)
B	Blindleitwert (susceptance)
$\underline{S}$	Scheinleistung (apparent power, in VA = Volt Ampere)
P	Wirkleistung (power, in Watt)
Q	Blindleistung (reactive power, in Var = Volt ampere reactive)
A	Ampere
deg	degrees (Phasenwinkel in Grad)
kV	Kilo Volt (1000V)
kVA	Kilo Volt Ampere (Scheinleistung S, im Unterschied zu kW = Wirkleistung))
kVar	Kilo Volt Ampere reactive (Blindleistung, Q)
W	Watt (Wirkleistung, P)

Literatur

- (1) Gert Hagmann, Grundlagen der Elektrotechnik, AULA-Verlag, 17. Auflage, 2017, ISBN-13: 978-3891048047
- (2) Gert Hagmann, Aufgabensammlung zu den Grundlagen der Elektrotechnik: Mit Lösungen und ausführlichen Lösungswegen, AULA-Verlag, 17. Auflage, 2017, ISBN-13: 978-3891048108
- (3) Thomas Harriehausen und Dieter Schwarzenau, Moeller Grundlagen der Elektrotechnik, Springer-Vieweg, 23 Auflage, 2013
- (4) Horst Kuchling, Taschenbuch der Physik, Carl Hanser Verlag GmbH & Co. KG; 21. Auflage, 2014; ISBN-13: 978-3446442184, ISBN-13: 978-3834817853
- (5) Adolf J. Schwab, Begriffswelt der Feldtheorie: Elektromagnetische Felder, Maxwell Gleichungen, Gradient. Rotation, Divergenz; Springer, 2013 (7. Au.), ISBN 978-3-642-34566-1

Anhang A – Schaltungen mit RLC

Grundlagen

$$I = \frac{1}{R} U \quad (\text{Gleichung G1/7})$$

Allgemeiner Fall (beliebige zeitliche Abläufe)

$$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} \quad (\text{Gleichung G2/7})$$

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \quad (\text{Gleichung G3/7})$$

Komplexe Wechselstromrechnung

Komplexe Impedanz

$$\underline{U} = \underline{Z} \underline{I} \quad (\text{Gleichung G4/7})$$

Gleichungen der Bauelemente

$$\underline{U}_R = R \underline{I}_R \quad (\underline{Z} = R) \quad (\text{Gleichung G5/7})$$

$$\underline{U}_L = j \omega L \underline{I}_L \quad (\underline{Z} = j \omega L) \quad (\text{Gleichung G6/7})$$

$$\underline{U}_C = \frac{1}{j \omega C} \underline{I}_C \quad (\underline{Z} = \frac{1}{j \omega C}) \quad (\text{Gleichung G7/7})$$

Anhang B – Komplexe Zeiger

Phasorenschreibweise

Unter Phasoren bzw. komplexen Zeigern werden komplexe Zahlen verstanden, die bei Wechselstromkreisen mit sinusförmigen Signalen fester Frequenz die Phasenlage der Spannungen, Ströme bzw. Impedanzen oder Admittanzen darstellen. Diese Interpretation vereinfacht die Berechnung von Schaltungen, die mit konstanter Frequenz betrieben werden, im eingeschwungenen Zustand. An dieser Stelle seien die Grundlagen dieser Methode noch einmal zusammengefasst.

Elektrische Schaltungen werden durch Differenzialgleichungen beschrieben. Beim Betrieb mit sinusförmigen Signalen fester Frequenz (harmonische Schwingung, erzwungene Schwingung) ist die Lösung der Differenzialgleichung ebenfalls ein sinusförmiges Signal. Für die Lösung der Differenzialgleichung kann man somit folgende Annahme treffen:

$$u(t) = \hat{u} \cos(\omega t + \phi_u) \quad (\text{A.1})$$

Hierbei bedeuten $\hat{u}$ die Amplitude des Signals $u(t)$ und ϕ_u den Phasenwinkel des Signals mit Kreisfrequenz ω . Für die Phasorenschreibweise wird das Signal mit Hilfe eines Imaginärteils zu einer komplexen Funktion ergänzt.

$$\underline{u}(t) = \hat{u} \cos(\omega t + \phi_u) + j \hat{u} \sin(\omega t + \phi_u) \quad (\text{A.2})$$

Diese Konstruktion dient der Vereinfachung der Berechnung. Das ursprüngliche Signal $u(t)$ im Zeitbereich erhält man aus dem Realteil der komplexen Funktion, d.h. $u(t) = \text{Re}\{\underline{u}(t)\}$. Die komplexe Schreibweise lässt sich nun mit Hilfe der Eulerschen Beziehung $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j \sin(\theta)$ wie folgt umwandeln.

$$\underline{u}(t) = \hat{u} e^{j\omega t} e^{j\phi_u} = \hat{u} e^{j\phi_u} e^{j\omega t} \quad (\text{A.3})$$

Letzterer Ausdruck $e^{j\omega t}$ beschreibt als Zeitfaktor eine Kreisbewegung mit der Frequenz ω im Einheitskreis (wegen $|e^{j\omega t}| = 1$). Ersterer Ausdruck beschreibt die Amplitude und Phasenlage des Signals, somit den komplexen Zeiger (bzw. Phasor) $\underline{U}$.

$$\underline{u}(t) = \hat{u} e^{j\phi_u} e^{j\omega t} = \underline{U} e^{j\omega t} \quad (\text{A.4})$$

Der komplexe Zeiger $\underline{U}$ enthält keinerlei Zeitabhängigkeit mehr, sondern beschreibt Amplitude und Phasenlage des Signals als komplexe Amplitude.

$$\underline{U} = \hat{u} e^{j\phi_u} \quad (\text{A.5})$$

Setzt man die Schreibweise

$$\underline{u}(t) = \underline{U} e^{j\omega t} \quad (\text{A.6})$$

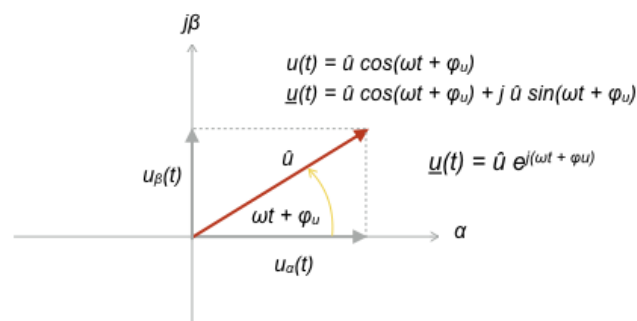
in eine Differenzialgleichung ein, so lässt sich die Zeitabhängigkeit eliminieren, da diese einheitlich der Beziehung $e^{j\omega t}$ entspricht. Die Differenzialgleichung reduziert sich dann auf eine algebraische Gleichung, die sich mit algebraischen Mitteln lösen lässt.

Koordinatensystem $\alpha\beta$ der komplexen Erweiterung des Zeitsignals

Ein reelles Zeitsignal wird in Phasorenschreibweise wird das Signal mit Hilfe eines Imaginärteils zu einer komplexen Signal ergänzt (siehe A.1 und A.2):

$$\begin{aligned} u(t) &= \hat{u} \cos(\omega t + \phi_u) \\ \underline{u}(t) &= \hat{u} \cos(\omega t + \phi_u) + j \hat{u} \sin(\omega t + \phi_u) \end{aligned}$$

Realteil und Imaginärteil kann man somit in der Zeigerdarstellung in der komplexen Ebene wie in folgender Abbildung gezeigt darstellen.



Man erhält für den Realteil und den Imaginärteil:

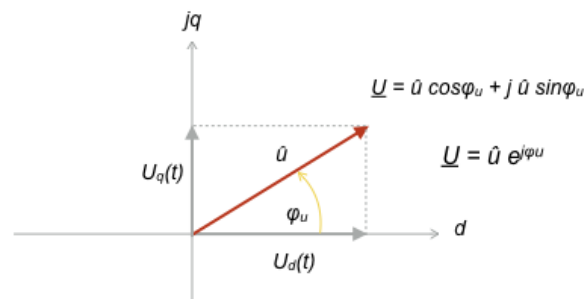
$$u_{\alpha}(t) = \hat{u} \cos(\omega t + \phi_u)$$

$$u_{\beta}(t) = \hat{u} \sin(\omega t + \phi_u)$$

Das Koordinatensystem $\alpha\beta$ entspricht somit der komplexen Erweiterung des Zeitsignals $u(t)$.

Koordinatensystem dq des komplexen Zeigers

Ist man nur an der Phasenlage des komplexen Zeigers interessiert, ohne die Drehbewegung mit Frequenz ω , nimmt man statt des Zeitsignals $u(t)$ den komplexen Zeiger $\underline{U}$ als Basis, wie in folgender Abbildung gezeigt (siehe A.5).



Man erhält für den Realteil und den Imaginärteil:

$$U_d = \hat{u} \cos(\phi_u)$$

$$U_q(t) = \hat{u} \sin(\phi_u)$$

Wie man sieht, ist dieses Koordinatensystem statisch: es enthält keine Drehbewegung.

Anhang C – Elektromagnetische Felder

Elektromagnetische Felder werden durch folgende Gleichungen beschrieben:

Stationäre elektrische Strömungsfelder:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (\text{Gleichung 1/7})$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} \quad (\text{Gleichung 2/7})$$

Die Stromdichte ist proportional zur elektrischen Feldstärke. Hierbei kennzeichnet die Materialkonstante σ die Leitfähigkeit des Materials. Die Stromdichte erzeugt ein magnetisches Wirbelfeld.

Elektrostatische Felder:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (\text{Gleichung 3/7})$$

$$\oint_A \vec{D} d\vec{A} = Q \quad \text{bzw.} \quad \text{div } \vec{D} = \rho \quad (\text{Gleichung 4/7})$$

Die elektrische Flussdichte ist proportional zur elektrischen Feldstärke. Hierbei kennzeichnet die Materialkonstante ϵ die Permittivität des Materials. Die Quellen elektrischer Felder sind Ladungen.

Magnetische Felder:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (\text{Gleichung 5/7})$$

$$\oint_A \vec{B} d\vec{A} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \text{div } \vec{B} = 0 \quad (\text{Gleichung 6/7})$$

Die magnetische Flussdichte ist proportional zur magnetischen Feldstärke. Hierbei kennzeichnet die Materialkonstante μ die Permeabilität des Materials. Magnetische Felder sind quellenfrei.

Quasistationäre elektromagnetische Felder:

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{Gleichung 7/7})$$

Änderungen der magnetischen Flussdichte erzeugen elektrische Wirbelfelder.

Diese Gleichungen lassen sich nach folgendem Schema ordnen:

Feldgleichungen:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Quellen:

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

Materialgleichungen:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

Die Gleichungen lassen sich wie folgt interpretieren:

- **Feldgleichungen:** Die Feldgleichungen zeigen den Zusammenhang von Feldstärke und Strömen bzw. zeitlichen Änderungen der Flussdichten.
- **Quellen:** Die Quellen elektrostatischer Felder sind Ladungen. Magnetische Felder sind quellenfrei.
- **Materialgleichungen:** Die Materialgleichungen beschreiben den Zusammenhang von Feldstärken und Flussdichten. Materialeigenschaften werden hierbei durch die Materialkonstanten beschrieben: der elektrischen Leitfähigkeit (σ), der elektrischen Permittivität ($\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$), sowie der magnetischen Permeabilität ($\mu = \mu_r \mu_0$).

Anhang D – Geometrische Berechnungen

Kreisumfang

Der Kreisumfang berechnet sich aus der Summe der Linienelemente $dl = r d\varphi$

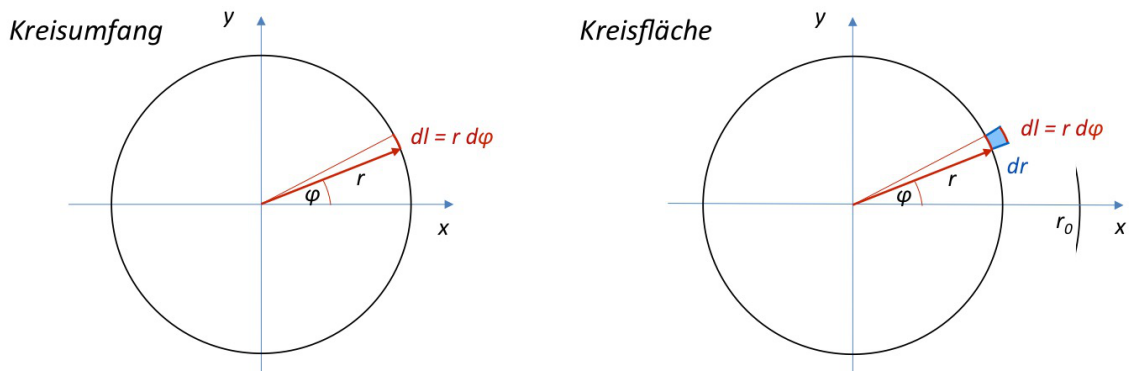
$$\oint dl = \int_{\varphi=0}^{2\pi} r d\varphi = 2\pi r$$

Kreisfläche

Die Kreisfläche berechnet sich aus der Summe der Flächenelemente $dA = r d\varphi dr$

$$\int_A dA = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^r r dr d\varphi = \pi r^2$$

Folgende Abbildung illustriert das Prinzip.

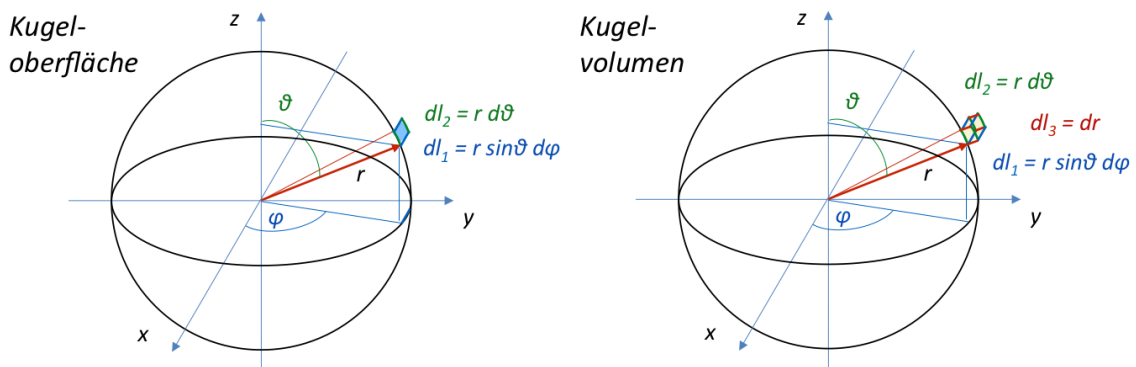


Oberfläche einer Kugel

Die Oberfläche einer Kugel berechnet sich aus den Flächenelementen $dA = (r d\theta) (r \sin(\theta) d\varphi)$ auf der Kugeloberfläche

$$\oint_A dA = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} r^2 \sin\theta d\theta d\varphi = 4\pi r^2$$

Zur Definition des Flächenelementes werden Kugelkoordinaten gewählt, wie in folgender Abbildung gezeigt.



Volumen einer Kugel

Das Volumen einer Kugel berechnet sich aus den Volumenelementen $dV = (r \, d\theta) (r \sin(\theta) \, d\phi) \, dr$ (siehe vorausgegangene Abbildung rechts).

$$\int_V dV = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=0}^r r^2 \, dr \sin\theta \, d\theta \, d\phi = \frac{4\pi}{3} r^3$$

Anhang E – Mathematischer Hintergrund

Gradient

Der Gradient beschreibt die Steigung der skalaren Funktion s im angegebenen Raumpunkt, abhängig vom gewählten Koordinatensystem (kartesisch, polar etc.). In kartesischen Koordinaten wird der Gradient gebildet durch:

$$\nabla s = \text{grad } s = \frac{\partial s}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial s}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial s}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

Die Gradient beschreibt ein Vektorfeld (Feldlinien).

Divergenz

Die Divergenz beschreibt die Quelldichte des Vektorfeldes V im angegebenen Raumpunkt, d.h. wie viele Feldlinien in einem Raumpunkt entstehen.

$$\text{div } V = \nabla \cdot V = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

Die Divergenz ist eine skalare Größe.

Nabla Operator ∇

Der Nabla-Operator ist ein Kürzel für partielle Ableitungsoperationen in vektorieller Schreibweise (z.B. Ableitungen nach den Raumrichtungen in kartesischen Koordinaten):

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

Hierbei bedeuten $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, und $\mathbf{e}_z$ Einheitsvektoren in den Richtungen x , y , und z (kartesische Koordinaten). Die Divergenz oben ist als Skalarprodukt des Nabla-Operators mit dem Vektorfeld zu verstehen.

Rotation

Die Rotation beschreibt die Wirbelldichte eines Vektorfeldes V im angegebenen Raumpunkt. Die Rotation ist eine vektorielle Größe, ergibt also in jedem Raumpunkt einen Vektor W , der Richtung und Stärke der Wirbel des Vektorfeldes V beschreibt.

$$W = \text{rot } V = \nabla \times V = \mathbf{e}_x \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_y \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) + \mathbf{e}_z \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right)$$

Die Rotation lässt sich als Vektorprodukt (Kreuzprodukt) des Nabla-Operators mit dem Vektorfeld beschreiben.

Laplace Operator Δ

Der Laplace Operator Δ steht als Kürzel für die Operation

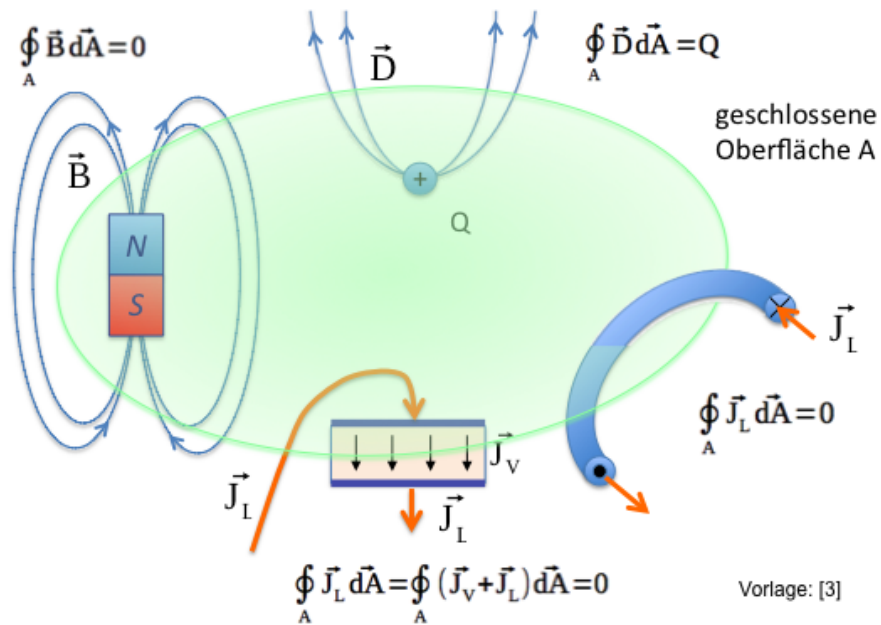
$$\Delta s = \text{div grad } s \quad \text{bzw.}$$

$$\Delta V = \mathbf{e}_x (\text{div grad } V_x) + \mathbf{e}_y (\text{div grad } V_y) + \mathbf{e}_z (\text{div grad } V_z)$$

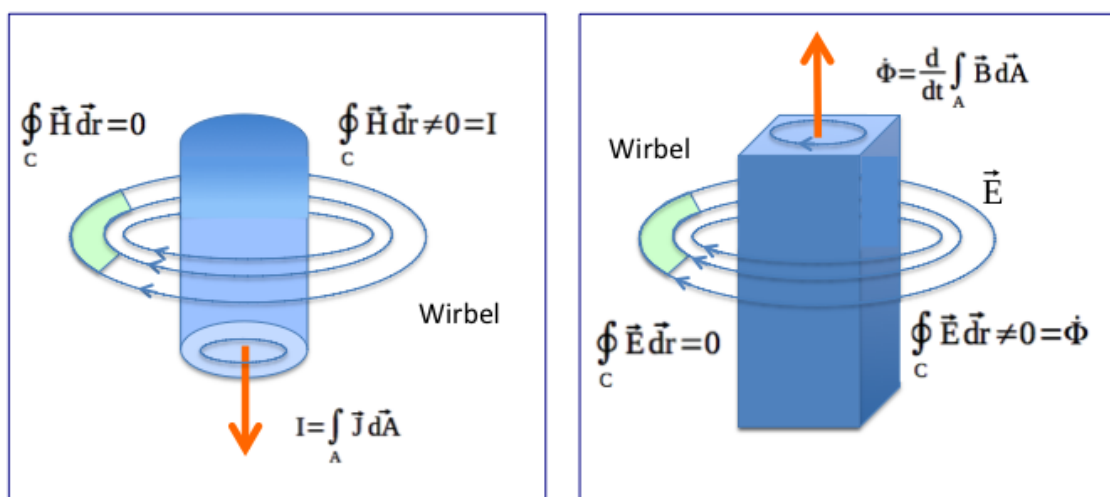
Der Laplace Operator kann sowohl auf eine skalare Größe angewendet werden (z.B. ein skalares Potential) als auch komponentenweise auf einen Vektor (z.B. ein Vektorpotential). Ergebnis ist entweder wiederum eine skalare Größe, oder wiederum ein Vektor.

Anhang F – Interpretation der Feldgleichungen

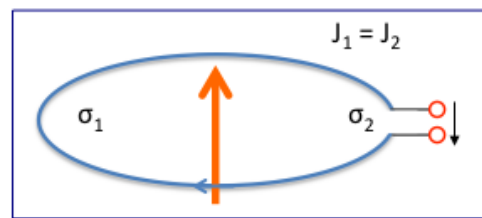
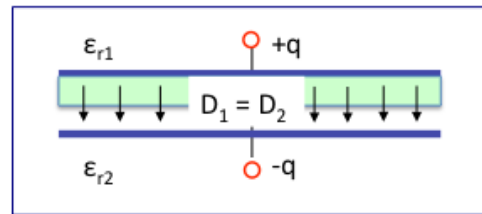
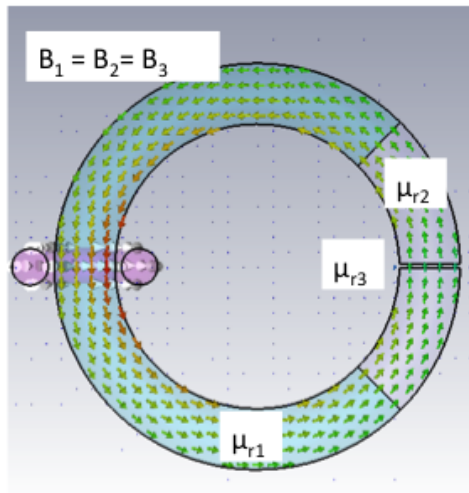
Quellen



Durchflutungsgesetz und Induktionsgesetz



Materialgleichungen an Grenzflächen



Integralgleichungen als Formatvorlagen

$$\oint_A \vec{B} d\vec{A} = 0$$

$$\oint_A \vec{D} d\vec{A} = Q \quad \oint_A \vec{D} d\vec{A} = 0$$

$$\oint_A \vec{J}_L d\vec{A} = 0 \quad \oint_A \vec{J}_L d\vec{A} = \oint_A (\vec{J}_V + \vec{J}_L) d\vec{A} = 0$$

$$\oint_C \vec{E} d\vec{r} = 0 \quad \oint_C \vec{E} d\vec{r} \neq 0 = \Phi \quad \Phi = \frac{d}{dt} \int_A \vec{B} d\vec{A}$$

$$\oint_C \vec{H} d\vec{r} = 0 \quad \oint_C \vec{H} d\vec{r} \neq 0 = I \quad I = \int_A \vec{J} d\vec{A}$$