

Hochfrequenztechnik

Teil 2 - Anwendungen

Ausgabe 0.6, 27.09.2017

Autor: Dr. Andreas Maier, Prof. Dr. Stephan Rupp

Elektrotechnik
DHBW Stuttgart

Inhaltsverzeichnis

1. Charakterisierung von Hochfrequenzschaltungen	7
1.1. Impedanz-, Admittanz- und Kettenmatrix	7
1.2. Einführung von Wellengrößen	12
1.3. Beschreibung eines Zweitors durch Streuparameter	14
1.4. Streuparameter und Wirkleistung	16
1.5. Eigenschaften von Zweitoren	18
1.5.1. Verlustfreiheit	18
1.5.2. Übertragungssymmetrie	19
1.5.3. Vollständige Symmetrie	19
1.5.4. Rückwirkungsfreiheit	19
1.5.5. Reflexionsfreiheit	19
1.6. Streuparameter berechnen	19
1.6.1. Beispiel einer verlustlosen Leitung	20
1.6.2. Berechnung mit Hilfe der Impedanzmatrix	21
1.6.3. Berechnung mit Hilfe der Kettenmatrix	22
1.6.4. Signalflussmethode	23
1.6.5. Beispiel: Streuparameter eines RC-Gliedes	27
1.6.6. Beispiel: Anschluss eines Zweitors mit Hilfe einer Leitung	29
1.7. Mehrttore	31
1.7.1. Verlustfreiheit	32
1.7.2. Übertragungssymmetrie	33
1.7.3. Vollständige Symmetrie	33
1.7.4. Reflexionsfreiheit	33
1.7.5. Spezielle Eigenschaften des Dreitors	33
1.7.6. Beispiel: Dreitor aus Leitungen	33
2. Symmetrische Netzwerke und Elemente	42
2.1. Gleich- und Gegentaktbetrieb	42
2.2. Streuparameter aus Gleich- und Gegentakt ermitteln	43
2.3. Beispiel zum Gleich- und Gegentaktbetrieb	47
2.4. Beispiel: Wilkinson-Leistungsteiler	51
3. Spezielle Netzwerke	58
3.1. Zirkulator	58
3.2. Leistungsteiler	58
3.2.1. Resistive Teiler	58
3.2.2. Reaktive Teiler	60
3.2.3. Teiler mit Viertelwellenleitungen	61
3.2.4. Wilkinson-Teiler	61
3.3. Koppler	63
3.3.1. Branchline-Koppler	63
3.3.2. Rat-Race-Koppler	64

3.4. Filter	65
3.4.1. Approximation $Z_L = Z_{high}$	66
3.4.2. Approximation $Z_L = Z_{low}$	67
4. Antennen	68
4.1. Ebene Welle	68
4.1.1. Freiraumwellenwiderstand	69
4.1.2. Strahlungsleistungsdichte	69
4.1.3. Polarisierung	70
4.2. Eigenschaften von Antennen	70
4.2.1. Kugelstrahler	70
4.2.2. Richtfunktion und Richtcharakteristik	70
4.2.3. Richtfaktor	72
4.2.4. Antennengewinn	73
4.2.5. Eingangsimpedanz	73
4.2.6. Antennenwirkfläche	74
4.2.7. Reziprozität	74
4.2.8. Freiraumdämpfung	75
4.2.9. Äquivalente isotrope Sendeleistung EIRP	76
4.3. Hertzscher Dipol	76
4.4. Lineare-Antennen	80
4.4.1. Halbwellendipol	82
4.4.2. Dipol der Länge λ	83
4.4.3. Monopole	85
4.5. Antennenformen	85
4.5.1. Reflektorantenne	86
4.5.2. Linsenantennen	87
Übungsblätter	89
Übungsblatt 1	89
Übungsblatt 2	91
Übungsblatt 3	93
Übungsblatt 4	95
Übungsblatt 5	97
Übungsblatt 6	99
Übungsblatt 7	101
Übungsblatt 8	103
Übungsblatt 9	105
Übungsblatt 10	107
Lösungen	109
Lösung Blatt 1	109
Lösung Blatt 2	113
Lösung Blatt 3	121
Lösung Blatt 4	127

Lösung Blatt 5	133
Lösung Blatt 6	139
Lösung Blatt 8	141
Lösung Blatt 9	145
Lösung Blatt 10	147
A. Smith-Diagramm in Widerstandsform	148
B. Smith-Diagramm in Leitwertform	149

Symbolverzeichnis

Symbol	Einheit	Beschreibung
$[A]$	$1, \Omega, \frac{1}{\Omega}$	Kettenmatrix
a	\sqrt{W}	Wellengröße der hinlaufenden Welle
$[a]$	\sqrt{W}	Vektor der hinlaufenden Welle
b	\sqrt{W}	Wellengröße der rücklaufenden Welle
$[b]$	\sqrt{W}	Vektor der rücklaufenden Welle
C	F	Kapazität
dB	—	Dezibel
e	1	Eulersche Zahl
$[E]$	1	Einheitsmatrix
I	A	Strom
I_h	A	Strom der hinlaufenden Welle
I_r	A	Strom der rücklaufenden Welle
l	m	Länge
L	H	Induktivität
P	W	Leistung
P_a	W	Leistung der hinlaufenden Welle
P_b	W	Leistung der rücklaufenden Welle
P_B	W	Blindleistung
R	Ω	reeller Widerstand
R_0	Ω	reeller Bezugswiderstand
$[S]$	1	Streumatrix
U	V	Spannung
U_h	V	Spannung der hinlaufenden Welle
U_r	V	Spannung der rücklaufenden Welle
$[Y]$	S	Admittanzmatrix
$[Z]$	Ω	Impedanzmatrix
Z_L	Ω	komplexer Wellenwiderstand
Z_0	Ω	Bezugsimpedanz

1. Charakterisierung von Hochfrequenzschaltungen

In diesem Abschnitt werden die Eigenschaften hochfrequenter Schaltungen mit mehreren Eingängen und Ausgängen hauptsächlich mit Hilfe der Streuung von Wellen beschrieben. Die sogenannten Streuparameter haben die Eigenschaft, dass sie sich messtechnisch leichter erfassen lassen als Impedanzen oder Admittanzen, weshalb sie in der Hochfrequenztechnik sehr gebräuchlich sind.

Die Beschreibung von Netzwerken durch Impedanzmatrizen und Admittanzmatrizen ist jedoch ebenfalls wichtig für das Verständnis der Zusammenhänge. Sie werden im Abschnitt 1.1 deshalb kurz beschrieben. Daneben existieren weitere speziellere Matrizen zur Beschreibung von Netzwerken. Ein gebräuchliches Beispiel hierzu ist die sogenannte Kettenmatrix.

In den folgenden Abschnitten werden die Bedeutung der Matrizen und deren Berechnungen zunächst an Zweitoren gezeigt. Anschließend werden die Verfahren auf Anordnungen mit mehr als zwei Toren übertragen. Abschnitt 1 schließt mit einigen Übungen zu verschiedenen Netzwerken mit zwei oder mehreren Toren ab.

Netzwerke mit zwei Toren (z.B. einem Eingangstor und einem Ausgangstor) bezeichnet man als Zweitor, wobei im Gegensatz zu den allgemeineren Vierpolen die Torbedingung erfüllt sein muss. Diese besagt, dass an einem Tor die Summe aller Ströme Null ist. Mathematisch bedeutet dies, dass $I_1 = I'_1$ und $I_2 = I'_2$ ist. Die Bedingung muss auch durch die äußere Beschaltung gewährleistet werden und hängt nicht zwangsläufig vom Zweitor selbst ab.



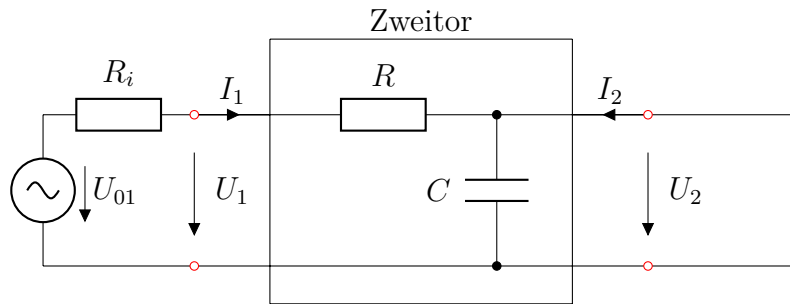
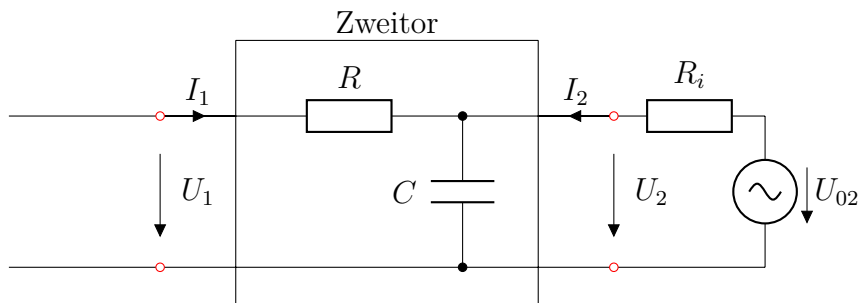
Abbildung 1.0.1: Zweitor

1.1. Impedanz-, Admittanz- und Kettenmatrix

Ist das Innenleben eines Zweitors unbekannt, lassen sich charakteristische Größen für das Zweitor messtechnisch ermitteln. Je nach hierfür vorgenommener äußerer Beschaltung des Zweitors unterscheidet man zunächst Impedanzparameter (Z -Parameter) und Admittanzparameter (Y -Parameter). Sehr häufig wird die **Impedanzmatrix** verwendet, die die Torspannungen in Abhängigkeit der Ströme an den Toren angibt.

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

In vektorieller Schreibweise gilt $[U] = [Z][I]$, wobei $[Z]$ die Impedanzmatrix darstellt. Die einzelnen Z -Parameter Z_{ij} bilden dabei die Impedanzmatrix des Zweitors, die sich

Abbildung 1.1.1: Messbedingungen für die Z-Parameter Z_{11} und Z_{21} Abbildung 1.1.2: Messbedingungen für die Z-Parameter Z_{12} und Z_{22}

über die in den Abbildungen 1.1.1 und 1.1.2 dargestellten Beschaltungen des Zweitors messtechnisch bestimmen lassen. Der Parameter Z_{21} , der auch als Leerlauf-Kernimpedanz bezeichnet wird, lässt sich beispielsweise über das Verhältnis von U_2 zu I_1 bestimmen, wobei die Bedingung $I_2 = 0$ erfüllt sein muss. Die einzelnen Vorschriften zur Bestimmung der Z-Parameter lassen sich direkt aus Gleichung 1.1 ableiten.

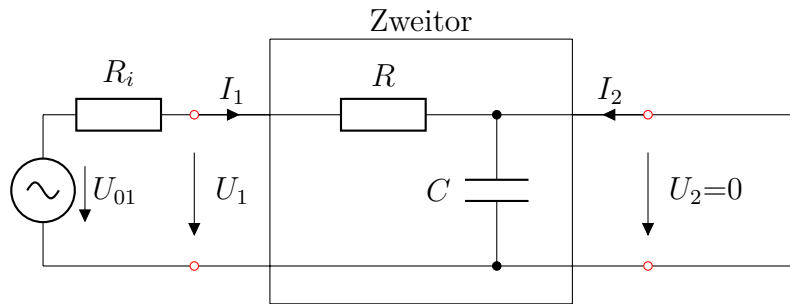
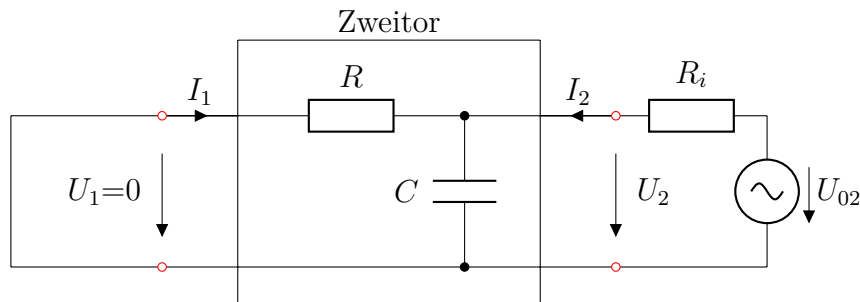
Die Elemente der Impedanzmatrix sind:

$Z_{11} = U_1/I_1 \Big _{I_2=0}$	Leerlauf-Eingangsimpedanz
$Z_{21} = U_2/I_1 \Big _{I_2=0}$	Leerlauf-Kernimpedanz vorwärts
$Z_{12} = U_1/I_2 \Big _{I_1=0}$	Leerlauf-Kernimpedanz rückwärts
$Z_{22} = U_2/I_2 \Big _{I_1=0}$	Leerlauf-Ausgangsimpedanz

Die Bedeutung dieser Bezeichnungen wird aus den hierfür erforderlichen Beschaltungen nach Abbildungen 1.1.1 und 1.1.2 ersichtlich.

In ähnlicher Weise erfolgt die Messung der **Admittanzmatrix**. Die Abbildungen 1.1.3 und 1.1.4 zeigen die Messbedingungen hierfür. Bei der Messung der Y-Parameter werden die Eingänge bzw. Ausgänge jedoch kurzgeschlossen.

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

Abbildung 1.1.3: Messbedingungen für die Y-Parameter Y_{11} und Y_{21} Abbildung 1.1.4: Messbedingungen für die Y-Parameter Y_{12} und Y_{22}

In vektorieller Schreibweise gilt $[I] = [Y][U]$, wobei $[Y]$ die Admittanzmatrix darstellt. Die Elemente der Admittanzmatrix sind:

$y_{11} = I_1/U_1 \Big _{U_2=0}$	Kurzschluss-Eingangsadmittanz
$y_{21} = I_2/U_1 \Big _{U_2=0}$	Kurzschluss-Kernadmittanz vorwärts
$y_{12} = I_1/U_2 \Big _{U_1=0}$	Kurzschluss-Kernadmittanz rückwärts
$y_{22} = I_2/U_2 \Big _{U_1=0}$	Kurzschluss-Ausgangsadmittanz

Die Bedeutung dieser Bezeichnungen wird wiederum aus den hierfür erforderlichen Beschaltungen ersichtlich.

Impedanzmatrix und Admittanzmatrix stehen in engem Zusammenhang zueinander, wobei $[Y] = [Z]^{-1}$ gilt, d.h. die Admittanzmatrix ist die inverse Impedanzmatrix. Je nach Netzwerk und Anwendung kann die Beschreibung durch Impedanzen oder Admittanzen geschickter sein.

Daneben gibt es mit der **Kettenmatrix** $[A]$ eine weitere sehr gebräuchliche Matrixform. Sie verknüpft die Ausgangsspannung sowie den Ausgangsstrom mit Eingangsstrom und Eingangsspannung. Zu beachten ist, dass der Strom I_2 negativ eingeht. Der Grund hierfür wird bei der Hintereinschaltung bzw. Verkettung von Zweitoren deutlich.

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

Die einzelnen Elemente der Kettenmatrix lassen sich ebenfalls messtechnisch ermitteln, wobei hier je nach zu messendem Matrixelement Tor 2 kurzgeschlossen wird ($U_2 = 0$) oder sich im Leerlauf befindet ($I_2 = 0$). Aus den unterschiedlichen Berechnungsvorschriften zur Ermittlung der Kettenmatrix geht auch hervor, dass die Elemente verschiedene Einheiten besitzen. So sind A_{11} und A_{22} dimensionslos, die Elemente A_{12} und A_{21} besitzen die Einheiten Ω bzw. $1/\Omega$.

$A_{11} = U_1/U_2 \Big _{I_2=0}$	Leerlauf-Spannungsübersetzung
$A_{21} = I_1/U_2 \Big _{I_2=0}$	Leerlauf-Kernadmittanz vorwärts
$A_{12} = -U_1/I_2 \Big _{U_2=0}$	Kurzschluss-Kernimpedanz vorwärts
$A_{22} = -I_1/I_2 \Big _{U_2=0}$	Kurzschluss-Stromübersetzung

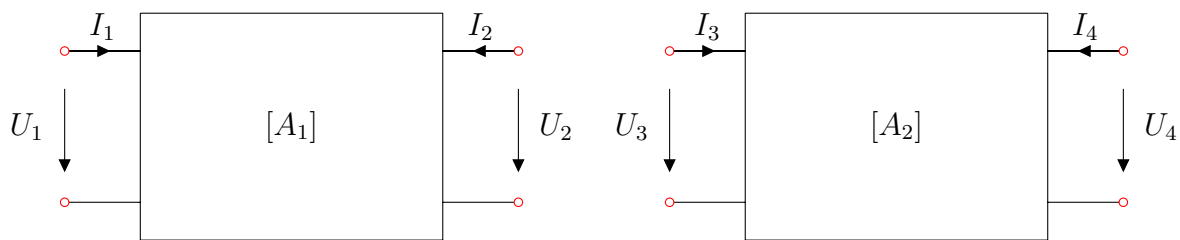


Abbildung 1.1.5: Verkettung von Zweitoren

Die Kettenmatrix wird zur Berechnung von hintereinandergeschalteten Zweitoren verwendet, wie in Abbildung 1.1.5 gegeben. Die entsprechenden Matrizen der einzelnen Zweitore sind mit $[A_1]$ und $[A_2]$ bereits bestimmt worden. Schließt man beide Zweitore zusammen (Tor 2 an Tor 3), so ergibt sich die Kettenmatrix des neuen verketteten Zweitores durch einfache Multiplikation von $[A_1]$ und $[A_2]$. Dies ist möglich, da $U_2 = U_3$ und $-I_2 = I_3$ ist. Die Verkettung kann beliebig fortgesetzt werden, sodass gilt

$$[A_{\text{gesamt}}] = [A_1] \cdot [A_2] \cdots [A_N]. \quad (1.4)$$

Die Kettenmatrix kann in die Impedanzmatrix oder auch in die Admittanzmatrix umgewandelt werden oder aus diesen berechnet werden. Ein Zusammenhang von Impedanzmatrix und Kettenmatrix lässt sich beispielsweise leicht herleiten, indem man das Gleichungssystem 1.1 auf die Form von 1.3 umstellt und einen Koeffizientenvergleich durchführt.

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \frac{Z_{11}}{Z_{21}} \\
A_{12} &= \frac{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}}{Z_{21}} \\
A_{21} &= \frac{1}{Z_{21}} \\
A_{22} &= \frac{Z_{22}}{Z_{21}}
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Die Zusammenhänge lassen sich natürlich auch umgekehrt herleiten.

$$\begin{aligned}
Z_{11} &= \frac{A_{11}}{A_{21}} \\
Z_{12} &= \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}}{A_{21}} \\
Z_{21} &= \frac{1}{A_{21}} \\
Z_{22} &= \frac{A_{22}}{A_{21}}
\end{aligned} \tag{1.6}$$

$$\tag{1.7}$$

Frage 1.1.1: Leiten Sie die genannten Umrechnungsvorschriften zwischen Kettenmatrix und Impedanzmatrix her.

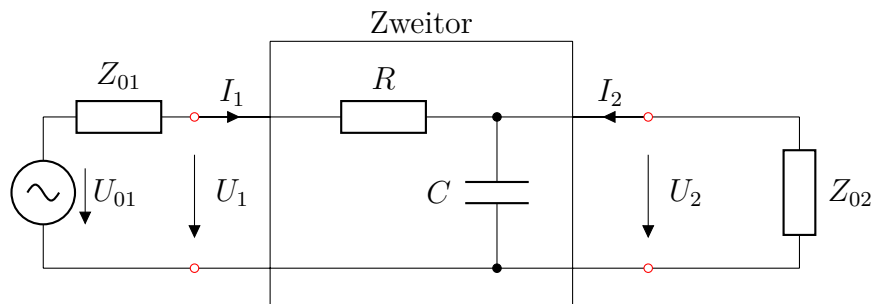


Abbildung 1.1.6: Messbedingungen für die S-Parameter s_{11} und s_{21}

In der Hochfrequenztechnik ist allerdings die Messung von Strömen in der Praxis oft schwer realisierbar. Zudem sind gut definierte Kurzschlüsse und Leerläufe - wie man sie für die Bestimmung der bisherigen Matrizen benötigt - in der Hochfrequenztechnik oftmals problematisch. Man erhält daher besser definierte Messbedingungen, wenn man die Eingänge bzw. Ausgänge des Zweitors mit dem jeweiligen Wellenwiderstand abschließt. In diesem Fall ist der Leitungsabschluss reflexionsfrei. Die Abbildungen 1.1.6 und 1.1.7 zeigen die Messbedingungen für die sogenannten Streuparameter.

Frage 1.1.2: Worin bestehen die Unterschiede dieser Messanordnung im Vergleich zu den Z-Parametern und Y-Parametern?

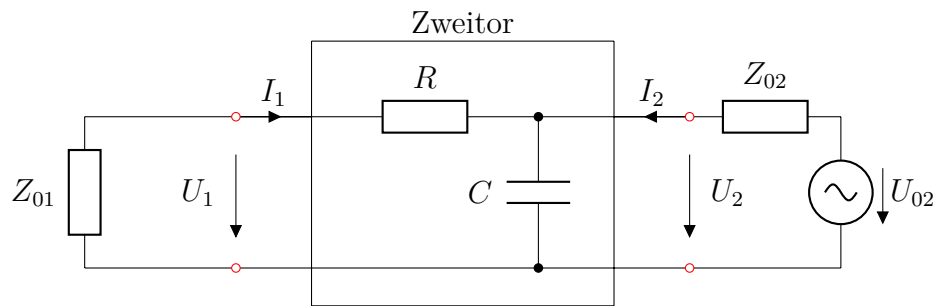


Abbildung 1.1.7: Messbedingungen für die S-Parameter s_{12} und s_{22}

Frage 1.1.3: Welche Spannungen am Eingang (U_1) und Ausgang (U_2) des Zweitors misst man, wenn das Zweitor eine verlustlose Leitung mit Wellenwiderstand Z_L ist und $Z_L = Z_{01} = Z_{02}$ gilt?

Frage 1.1.4: Welchen Einfluss hat eine verlustlose Leitung mit Wellenwiderstand Z_L auf Betrag und Phase der Spannung am jeweils anderen Ende des Zweitors im Verhältnis zur Eingangsspannung?

1.2. Einführung von Wellengrößen

Mit Hilfe der Streuung von Wellen lassen sich die Eigenschaften von Schaltungen mit mehreren Eingängen oder Ausgängen sehr zweckmäßig beschreiben. Die sogenannten Streuparameter haben die Eigenschaft, dass sie sich messtechnisch leichter erfassen lassen als Impedanzen oder Admittanzen. Abbildung 1.2.1 zeigt ein Zweitor, das an jedem Tor mit einer Leitung beschaltet ist.

Die Eigenschaften des Zweitors lassen sich mit Hilfe der normierten Wellengrößen an jedem Tor beschreiben. Jedes Tor für sich betrachtet stellt einen Abschluss der jeweils angeschlossenen Leitung dar. Die beiden Tore sind mit 1 und 2 indiziert. Die Wellenwiderstände Z_{L1} und Z_{L2} entsprechen hier den Bezugswiderständen Z_{01} und Z_{02} . Für die Beschreibung des Zweitors durch Streuparameter werden zunächst Wellengrößen als normierte Spannungswellen eingeführt.

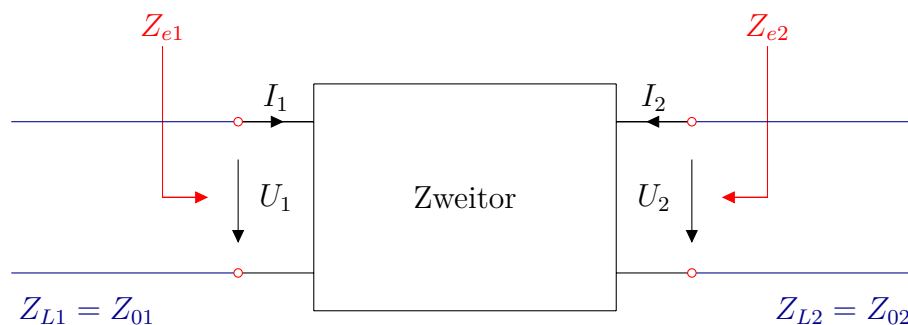


Abbildung 1.2.1: Zweitor mit Anschlussleitungen

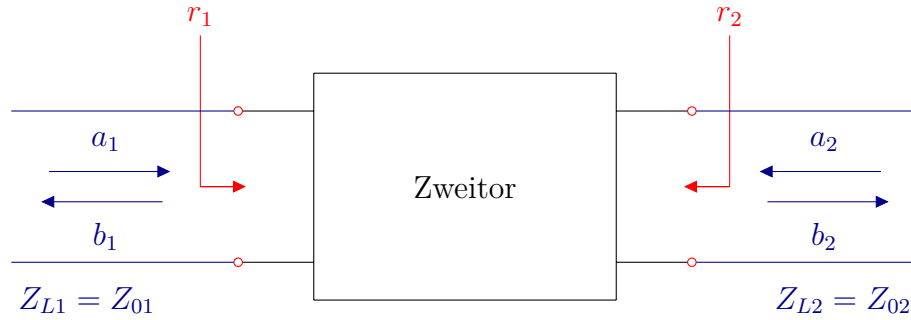


Abbildung 1.2.2: Zweitor mit Anschlussleitungen und Wellengrößen

Als Wellengrößen a und b werden folgende normierte Spannungswellen definiert, wobei i der Torindex ist.

$$a_i = \frac{U_{hi}}{\sqrt{Z_{0i}}} \quad \text{einlaufende Spannungswelle} \quad (1.8)$$

$$b_i = \frac{U_{ri}}{\sqrt{Z_{0i}}} \quad \text{reflektierte Spannungswelle} \quad (1.9)$$

Somit stellt a_1 die am Tor 1 einlaufende normierte Spannungswelle dar, b_1 die von Tor 1 reflektierte, zurücklaufende normierte Spannungswelle. Die Normierung erfolgt an jedem Tor auf den Wellenwiderstand der jeweiligen Anschlussleitungen, ist also für die beiden Tore im Allgemeinen unterschiedlich. Die jeweiligen Reflexionsfaktoren r_1 bzw. r_2 erhält man wie gewohnt aus dem Verhältnis der rücklaufenden zur hinlaufenden Spannungswelle, wobei sich hierzu auch die normierten Größen a_i und b_i verwenden lassen.

Da Strom und Spannung von hinlaufender und rücklaufender Welle über den Wellenwiderstand $Z_{Li} = Z_{0i}$ in einem festen Verhältnis stehen, können die Wellengrößen a_i und b_i auch über die Ströme bestimmt werden. Man könnte deshalb auch von Stromwellen sprechen. Üblicherweise spricht man nur von hinlaufender und rücklaufender Welle.

$$a_i = \frac{U_{hi}}{\sqrt{Z_{0i}}} = I_{hi} \cdot \sqrt{Z_{0i}} \quad (1.10)$$

$$b_i = \frac{U_{ri}}{\sqrt{Z_{0i}}} = I_{ri} \cdot \sqrt{Z_{0i}} \quad (1.11)$$

Die physikalische Einheit der Wellengrößen ist $[V/\sqrt{\Omega}]$ oder $[A \sqrt{\Omega}]$ und entspricht $[\sqrt{W}]$. Die Normierung auf die Wurzel der Wellenwiderstände verfolgt den Zweck, dass sich aus den Wellengrößen recht einfach die Leistung berechnen lässt. So ergeben sich für die auf das Tor i zulaufende Wirkleistung bzw. die vom Tor i reflektierte Wirkleistung auf der Anschlussleitung:

$$P_{ai} = \frac{1}{2} a_i a_i^* = \frac{1}{2} |a_i|^2 \quad (1.12)$$

$$P_{bi} = \frac{1}{2} b_i b_i^* = \frac{1}{2} |b_i|^2 \quad (1.13)$$

Hierbei bezeichnen a_i^* und b_i^* die konjugiert komplexen Größen zu a_i und b_i (der Imaginärteil der konjugiert komplexen Variable hat jeweils das umgekehrte Vorzeichen des Imaginärteils der Variable).

Frage 1.2.1: Prüfen Sie die Beziehungen 1.12 und 1.13 mit Hilfe der Spannungswellen und Stromwellen nach. Hinweis: U_h und U_r besitzen komplexe Amplituden, keine Effektivwerte.

Die Wellengrößen stellen nur eine normierte Schreibweise dar. Alle bisher mit Hilfe der Spannungswellen und Stromwellen hergeleiteten Zusammenhänge bleiben weiterhin gültig. Aus den Wellengrößen lassen sich unmittelbar die Spannungswellen und Stromwellen berechnen. Hierfür werden folgende Zusammenhänge benutzt:

$$U_i = U_{hi} + U_{ri} \quad (1.14)$$

$$I_i = \frac{1}{Z_{0i}} (U_{hi} - U_{ri}) \quad (1.15)$$

Durch Einsetzen der Beziehungen (1.8) und (1.9) erhält man hieraus die Spannungen und Ströme an den Toren:

$$U_i = \sqrt{Z_{0i}} (a_i + b_i) \quad (1.16)$$

$$I_i = \frac{a_i - b_i}{\sqrt{Z_{0i}}} \quad (1.17)$$

Frage 1.2.2: Zeigen Sie, dass sich umgekehrt die Wellengrößen aus den Spannungen und Strömen an den Toren mit folgendem Ergebnis berechnen lassen:

$$a_i = \frac{U_i + Z_L I_i}{2\sqrt{Z_{0i}}} \quad (1.18)$$

$$b_i = \frac{U_i - Z_L I_i}{2\sqrt{Z_{0i}}} \quad (1.19)$$

1.3. Beschreibung eines Zweitors durch Streuparameter

Die Streuparameter geben das Verhalten des Zweitors bzgl. der Wellengrößen wieder, d.h. welche reflektierten Wellengrößen bzw. transmittierten Wellengrößen sich aus den einlaufenden Wellengrößen an beiden Toren ergeben. Die Wellengrößen werden durch die Streuparameter miteinander verknüpft. Für die Reflexionsfaktoren r_1 und r_2 an Tor 1 bzw. Tor 2 ist das nichts Neues. Jedoch zeigen die Streuparameter auch Abhängigkeiten zwischen beiden Toren, d.h. den jeweils transmittierten Teil.

Wie in Abbildung 1.3.1 gezeigt, ergibt sich die an Tor 1 zurücklaufende Wellengröße b_1 aus dem an Tor 1 reflektierten Anteil von a_1 , sowie aus dem an Tor 2 transmittierten Anteil von a_2 . Ebenso ergibt sich die an Tor 2 zurücklaufende Wellengröße b_2 aus dem an Tor 2 reflektierten Anteil von a_2 , sowie dem an Tor 1 transmittierten Anteil von a_1 .

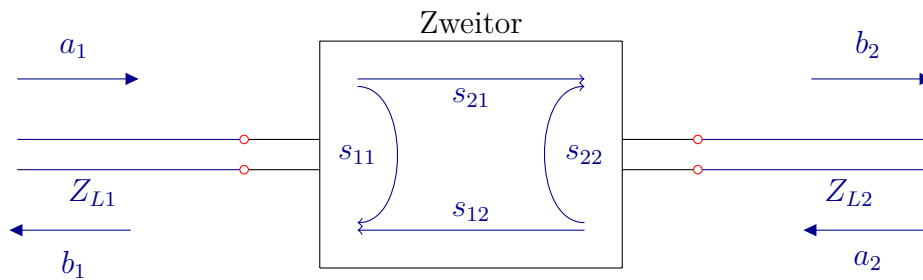


Abbildung 1.3.1: Zweitor mit Anschlussleitungen und Wellengrößen

Es ergeben sich also die Gleichungen:

$$b_1 = (s_{11} a_1 + s_{12} a_2) \quad (1.20)$$

$$b_2 = (s_{21} a_1 + s_{22} a_2) \quad (1.21)$$

In Matrixform ergibt sich mit Hilfe der Streumatrix $[S]$ der gleiche Zusammenhang in folgender Schreibweise:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

Die einzelnen Streuparameter lassen sich mit Hilfe spezieller Randbedingungen für a_1 bzw. a_2 interpretieren. Diese Randbedingungen entsprechen den in Abbildungen 1.1.6 und 1.1.7 wiedergegebenen Beschaltungen bzw. Messbedingungen. Die Elemente der S-Matrix sind:

$$s_{11} = b_1/a_1 \Big|_{a_2=0} \quad \text{Eingangsreflexionsfaktor bei angepasstem Ausgang} \quad (1.23)$$

$$s_{12} = b_1/a_2 \Big|_{a_1=0} \quad \text{Rückwärtstransmissionsfaktor bei angepasstem Eingang} \quad (1.24)$$

$$s_{21} = b_2/a_1 \Big|_{a_2=0} \quad \text{Vorwärtstransmissionsfaktor bei angepasstem Ausgang} \quad (1.25)$$

$$s_{22} = b_2/a_2 \Big|_{a_1=0} \quad \text{Ausgangsreflexionsfaktor bei angepasstem Eingang} \quad (1.26)$$

Dass s_{11} und s_{22} Reflexionsfaktoren am Eingang bzw. Ausgang darstellen, ergibt sich unmittelbar durch Einsetzen von 1.8 und 1.9 in die vier Gleichungen oben.

Da die speziellen Randbedingungen jeweils Anpassung an der gegenüberliegenden Seite bedeuten, sind die Streuparameter näher am gewünschten Arbeitspunkt und messtechnisch ebenfalls erfassbar. Bei Impedanzmatrizen bzw. Admittanzmatrizen hätte man als Randbedingungen Kurzschlüsse bzw. Leerläufe. Solche Randbedingungen sind bei hochfrequenztechnischen Schaltungen oder bei Verstärkern wesentlich ungünstiger realisierbar.

Frage 1.3.1: Weisen Sie nach, dass s_{11} und s_{22} Reflexionsfaktoren am Eingang bzw. Ausgang darstellen.

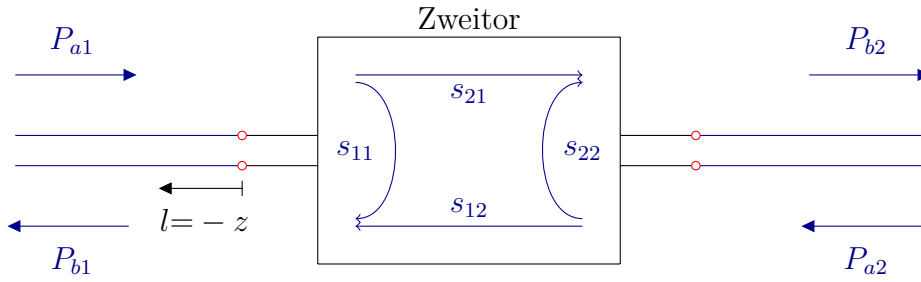


Abbildung 1.4.1: Zweitor mit Anschlussleitungen und Wirkleistungen

1.4. Streuparameter und Wirkleistung

Zum genaueren Verständnis der hinlaufenden und reflektierten Wirkleistungen P_{a1} und P_{b1} auf einer verlustlosen Leitung, die beispielweise an Tor 1 angeschlossen ist, soll zunächst von der gesamten Scheinleistung S auf dieser Leitung ausgegangen werden. Allgemein ist die Scheinleistung an einer bestimmten Stelle z der Leitung:

$$S(z) = \frac{1}{2} U(z) I(z)^* \quad (1.27)$$

Aus der Leitungstheorie ist bekannt, dass sich die Spannungen der hinlaufenden und rücklaufenden Welle zur Gesamtspannung addieren und der Gesamtstrom sich aus der Differenz von hinlaufendem und rücklaufendem Strom berechnet. Die Scheinleistung auf der Leitung kann also auch wie folgt beschrieben werden:

$$\begin{aligned} S(z) &= \frac{1}{2} (U_h(z) + U_r(z)) (I_h(z) - I_r(z))^* \\ &= \frac{U_h(z) I_h^*(z)}{2} - \frac{U_r(z) I_r^*(z)}{2} + \frac{U_r(z) I_h^*(z) - U_h(z) I_r^*(z)}{2} \end{aligned} \quad (1.28)$$

Die Spannungen und Strome von hinlaufender und reflektierter Welle stehen auf einer verlustlosen Leitung über den Wellenwiderstand Z_L miteinander in Beziehung, sodass gilt:

$$S(z) = \frac{U_h(z) U_h^*(z)}{2Z_L} - \frac{U_r(z) U_r^*(z)}{2Z_L} + \frac{U_r(z) U_h^*(z) - U_h(z) U_r^*(z)}{2Z_L} \quad (1.29)$$

Mit den bekannten z -Abhängigkeiten der Spannungen $U_h(z = -l) = U_h(0) \cdot e^{j\beta l}$ und $U_r(z = -l) = U_r(0) \cdot e^{-j\beta l}$ sowie dem Zusammenhang $s_{11} = U_r(0)/U_h(0)$ (gilt bei angepasstem Abschluss an Tor 2) lässt sich die Gleichung weiter vereinfachen.

$$\begin{aligned} S(l) &= \frac{|U_h(0)|^2}{2Z_L} - \frac{|U_r(0)|^2}{2Z_L} + \frac{s_{11} U_h(0) U_h(0)^* e^{-j2\beta l} - (s_{11} U_h(0) U_h(0)^* e^{-j2\beta l})^*}{2Z_L} \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} |a|^2}_{P_a} - \underbrace{\frac{1}{2} |b|^2}_{P_b} + \underbrace{j |a|^2 \operatorname{Im}(s_{11} e^{-j2\beta l})}_{P_B} \end{aligned} \quad (1.30)$$

Der Realteil der Scheinleistung auf der Leitung ist erwartungsgemäß die Differenz aus hinlaufender Wirkleistung P_a und rücklaufender Wirkleistung P_b . Auf der verlustlosen Leitung sind die Wirkleistungen zusätzlich unabhängig von l .

Es existiert jedoch noch ein imaginärer Anteil P_B , der die Blindleistung auf der Leitung beschreibt und zusätzlich von l abhängt. Dieser ist etwas schwieriger zu interpretieren. Hierzu ist es hilfreich sich einige Extremfälle anzuschauen.

- **Reflexionsfaktor $r = 0$:** In diesem Fall existiert nur die hinlaufende Welle. Es gibt keine rücklaufende Welle und ebenfalls keine Blindleistung.
- **Reflexionsfaktor $r = -1$ (Kurzschluss):** Die Wirkleistungen der hinlaufenden Welle sowie der rücklaufenden Welle sind identisch groß ($P_{a1} = P_{b1}$). Es wird effektiv keine Leistung transportiert und die reelle Komponente der Scheinleistung S ist Null. Auch die Blindleistung P_B ist im Kurzschlusspunkt Null. Die Blindleistung ist jedoch abhängig vom Abstand l ausgehend vom Kurzschlusspunkt. Im Abstand von $l = \lambda/8$ erreicht die Blindleistung P_B mit $|a|^2$ ein Maximum (Reaktanz der Leitung ist hier genau $X = Z_L$).
- **Reflexionsfaktor $r = 1$ (Leerlauf):** Die Wirkleistungen beider Wellen heben sich hier ebenfalls auf. Im Abstand von $l = \lambda/8$ erreicht die Blindleistung Q mit $-|a|^2$ ein Minimum (Reaktanz der Leitung ist hier genau $X = -Z_L$).

Im Zusammenhang mit den Streuparametern wird die Blindleistung weniger beachtet, sie ist jedoch zum Verständnis nützlich. Die folgenden Leistungsbetrachtungen beziehen sich allerdings immer auf die Wirkleistungen P_a und P_b der hinlaufenden und der rücklaufenden Welle, die in engem Zusammenhang mit den Wellengrößen a und b stehen.

Gemäß Definition der Wellengrößen erhält man für den Eingangsreflexionsfaktor unter der Bedingung $a_2 = 0$:

$$|s_{11}|^2 = \frac{|b_1|^2}{|a_1|^2} = \frac{P_{b1}}{P_{a1}} \quad (1.31)$$

Das Betragsquadrat des Eingangsreflexionsfaktors ist das Verhältnis der von Tor 1 reflektierten Wirkleistung zur auf Tor 1 zulaufenden Wirkleistung. Demnach lässt sich aus dem Vorwärtstransmissionsfaktor auf das Verhältnis der am Tor 2 auslaufenden Wirkleistung zur auf Tor 1 zulaufenden Wirkleistung schließen.

$$|s_{21}|^2 = \frac{|b_2|^2}{|a_1|^2} = \frac{P_{b2}}{P_{a1}} \quad (1.32)$$

Entsprechende Verhältnisse lassen sich natürlich auch für s_{22} und s_{12} finden.

Leistungsgrößen und damit auch die Streuparameter werden oft logarithmisch bzw. in der Pseudoeinheit dB dargestellt.

$$s_{ij}/dB = 20 \log_{10}(|s_{ij}|) \quad (1.33)$$

Ob Streuparameter s_{ij} linear oder logarithmisch angegeben werden, ist immer an der Pseudoeinheit dB ersichtlich. Dadurch kann ein spezieller Index zur Kennzeichnung für

logarithmische Werte entfallen. Da die Streuparameter für passive Zwei- oder auch Mehr-tore immer kleiner als eins sind, sind die Werte auf dB-Skala immer kleiner als 0 dB. Negative dB-Werte bedeuten also eine Verstärkung kleiner eins.

Anstatt der Verstärkungen können auch Dämpfungswerte angegeben werden, die genau dem Kehrwert der Verstärkung entsprechen. Hier sind die Bezeichnungen Reflexionsdämpfung (engl. return loss) und Einfügedämpfung (engl. insertion loss) gebräuchlich.

$$RL_i/dB = 20 \log_{10} \left(\frac{1}{|s_{ii}|} \right) = -20 \log_{10}(|s_{ii}|) \quad \text{Reflexionsdämpfung}$$

$$IL_{ij}/dB = 20 \log_{10} \left(\frac{1}{|s_{ij}|} \right) = -20 \log_{10}(|s_{ij}|) \quad \text{Einfügedämpfung}$$

Für passive Mehr-tore sind Reflexionsdämpfung und Einfügedämpfung größer 0 dB, besitzen also positive Werte. Die Reflexionsdämpfung beschreibt, welche Leistung die reflektierte Welle im Vergleich zur hinlaufenden Welle besitzt. Der Begriff der Reflexionsdämpfung ist hierbei insofern etwas unglücklich gewählt, da genaugenommen keine Dämpfung stattfindet, sondern dieser Anteil durch Reflexion verloren geht. Reflexionsverlust wäre ein zutreffenderer Ausdruck (siehe englische Begriffswahl).

Die Einfügedämpfung ist allerdings ein naheliegender Begriff. Einfügedämpfung beschreibt die Dämpfung, die auftritt, wenn ein Zweitor in ein Leitungsstück eingefügt wird. Im Falle eines aktiven Zweitores ist s_{ij} ggf. größer Null. Dies bedeutet, dass das Signal verstärkt wird und die Einfügedämpfung dementsprechend kleiner als 0 dB ist.

Frage 1.4.1: Ein vollständig symmetrisches Zweitor hat einen Eingangsreflexionsfaktor von $s_{11} = 0,1$ und einen Transmissionsfaktor von $s_{21} = 0,9$. Berechnen Sie die Reflexionsdämpfung und die Einfügedämpfung im logarithmischen Maßstab. Welcher Anteil der Wirkleistung wird reflektiert bzw. transmittiert (linear)?

Frage 1.4.2: Ist das Zweitor verlustfrei?

1.5. Eigenschaften von Zweitoren

1.5.1. Verlustfreiheit

Ein passives Zweitor ist verlustfrei, wenn in keinem Betriebszustand Energie verloren geht. Aufgenommene Leistung muss also wieder zum Vorschein kommen, bzw. die Summe der zulaufenden und ablaufenden Wirkleistung muss konstant sein.

Für ein mit a_1 gespeistes Zweitor bedeutet das: $P_{a1} = P_{b1} + P_{b2}$. Für ein mit a_2 gespeistes Zweitor gilt sinngemäß: $P_{a2} = P_{b2} + P_{b1}$. Für ein verlustfreies Zweitor ergibt sich hieraus für die Streuparameter:

$$|s_{11}|^2 + |s_{21}|^2 = 1 \quad (1.34)$$

$$|s_{22}|^2 + |s_{12}|^2 = 1 \quad (1.35)$$

Frage 1.5.1: Weisen Sie Gleichung 1.34 nach. Hinweis: Verwenden Sie $P_{a1} = P_{b1} + P_{b2}$, sowie die Gleichungen 1.12 und 1.13

1.5.2. Übertragungssymmetrie

Sofern bei einem Zweitor $s_{12} = s_{21}$ gilt, ist das Zweitor übertragungssymmetrisch (bzw. reziprok). In diesem Fall können die Orte von Ursache und Wirkung vertauscht werden, ohne dass sich die Beziehungen zwischen Ursache und Wirkung ändern. Mit anderen Worten spielt es keine Rolle, ob das Zweitor vorwärts oder rückwärts herum eingebaut wird, sofern seine Bezugswiderstände an beiden Toren gleich sind.

Übertragungssymmetrie (Reziprozität) ist bei Zweitoren gegeben, die aus Widerständen, Kapazitäten und Induktivitäten bestehen. In der Regel also dann, wenn passive und verlustlose Komponenten und Materialien verwendet werden, die keine richtungsabhängigen (anisotrope) Eigenschaften haben.

1.5.3. Vollständige Symmetrie

Eine vollständige Symmetrie ist dann gegeben, wenn nicht nur die Transmissionsfaktoren in beiden Richtungen gleich sind (Übertragungssymmetrie, $s_{12} = s_{21}$), sondern zusätzlich die Reflexionsfaktoren, also $s_{11} = s_{21}$. Eine solche Symmetrie ist beispielsweise bei symmetrischem Schaltungsaufbau gegeben.

1.5.4. Rückwirkungsfreiheit

Ein Zweitor ist rückwirkungsfrei, wenn es Leistung nur in einer Richtung überträgt, in der umgekehrten Richtung jedoch nicht. Rückwirkungsfreiheit ist mit Symmetrie natürlich nicht vereinbar. Ein rückwirkungsfreies Verhalten besitzen beispielsweise Verstärker. Ein idealer Verstärker überträgt in Vorwärtsrichtung. In Rückwärtsrichtung besitzt er eine hohe Isolation (eine möglichst geringe Rückwärtsübertragung). Für die Streuparameter ergibt sich bei Rückwirkungsfreiheit dann $s_{12} = 0$ (keine Rückwärtsübertragung) und $s_{21} \neq 0$ (=1 bei idealer Vorwärtsübertragung).

1.5.5. Reflexionsfreiheit

Ein Zweitor ist reflexionsfrei bzw. allseitig angepasst, wenn die Reflexionsfaktoren s_{11} und s_{22} verschwinden. Die Hauptdiagonale der Streumatix besitzt damit nur Nullen. Die Anpassung ist bei Hochfrequenzschaltungen sehr oft gewünscht, da dann keine Leistung an den Toren reflektiert wird und damit auch keine Leistung zurück zum Generator fließt.

1.6. Streuparameter berechnen

Die in der folgenden Abbildung gezeigte Schaltung zeigt ein Zweitor mit Eingangsimpedanzen Z_{e1} und Z_{e2} sowie mit den Bezugswiderständen Z_{01} und Z_{02} . Für die Bestimmung der Streuparameter ist das Zweitor definitionsgemäß an Tor 2 mit einer Last Z_{02} beschaltet sowie an Tor 1 mit einer Last Z_{01} .

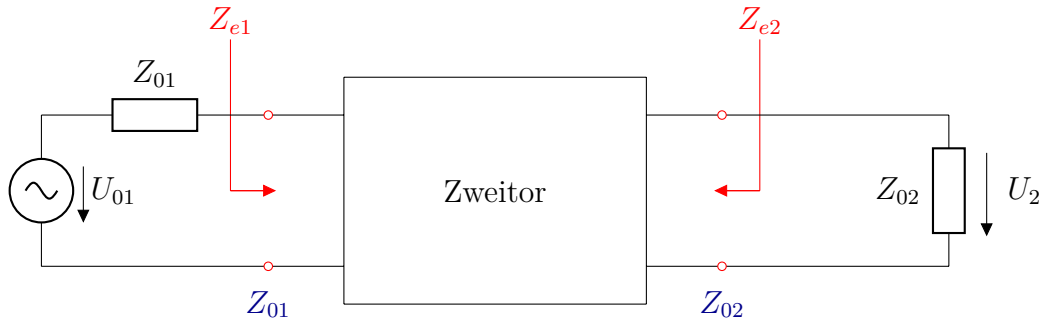


Abbildung 1.6.1: Ermittlung der Reflexionsfaktoren und Transmissionsfaktoren am Zweitor

Die Reflexionsfaktoren ergeben sich unmittelbar aus den Eingangsimpedanzen Z_{ei} und den Bezugswiderständen Z_{0i} . Man erhält mit den Randbedingungen gemäß 1.23 und 1.26:

$$s_{11} = \frac{Z_{e1} - Z_{01}}{Z_{e1} + Z_{01}} \quad (1.36)$$

$$s_{22} = \frac{Z_{e2} - Z_{02}}{Z_{e2} + Z_{02}} \quad (1.37)$$

Die Transmissionsfaktoren erhält man aus der ans andere Tor transmittierten Spannung, indem man das Zweitor an einem Tor mit einer angepassten Spannungsquelle speist. Die Abbildung oben gibt die Anordnung zur Bestimmung von s_{21} wieder (Vorwärtstransmissionsfaktor bei angepasstem Ausgang). Man erhält für die Transmissionsfaktoren:

$$s_{21} = \frac{2U_2}{U_{01}} \cdot \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}} \quad (1.38)$$

$$s_{12} = \frac{2U_1}{U_{02}} \cdot \sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{01}}} \quad (1.39)$$

Für s_{12} ist die Anordnung aus Abbildung 1.6.1 sinngemäß mit Einspeisung U_{02} an Tor 2 umzuändern.

Frage 1.6.1: Weisen Sie die Berechnungsformel 1.38 nach. Verwenden Sie hierzu die Definitionen 1.25, 1.8 und 1.9 sowie die Beziehung 1.14 jeweils am Eingangstor und Ausgangstor in Bezug auf die Anordnung gemäß Abbildung 1.6.1

1.6.1. Beispiel einer verlustlosen Leitung

Als Beispiel seien die Streuparameter einer verlustlosen, angepassten Leitung berechnet. Die folgende Abbildung zeigt die Anordnung. Die Leitung der Länge l hat den Wellenwiderstand Z_L . Die Reflexionsfaktoren sind in diesem Fall beide Null, da die Leitung eingangsseitig und ausgangsseitig angepasst ist (Innenwiderstand bzw. Abschlusswiderstand = Wellenwiderstand).

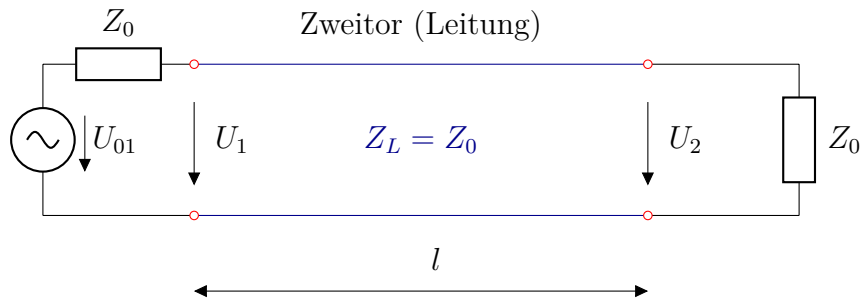


Abbildung 1.6.2: Verlustlose angepasste Leitung

$$s_{11} = s_{22} = 0 \quad (1.40)$$

Aus Gründen der Symmetrie sind auch die Transmissionsfaktoren gleich, d.h. $s_{21} = s_{12}$. Der Vorwärtstransmissionsfaktor ergibt sich gemäß Gleichung 1.38 zu

$$s_{21} = \frac{2U_2}{U_{01}} \quad (1.41)$$

Aus den Betrachtungen zur Leitungstransformation ist bekannt, dass es im angepassten Fall für die Anordnung nach Abbildung 1.6.2 nur eine fortschreitende Spannungswelle in Vorwärtsrichtung gibt. Wenn man die Leitung eingangsseitig durch ihren Wellenwiderstand ersetzt, ergibt sich die Spannung U_1 am Eingang aus der Spannungsteilerregel zu $U_1 = U_{01}/2$, beziehungsweise umgekehrt $U_{01} = 2U_1$. Zwischen U_2 und U_1 bewirkt die Leitungstransformation über eine Länge l gemäß der Lösung der Wellengleichung (hinlaufende Welle) lediglich eine Phasenverschiebung.

$$U_2 = U_1 \cdot e^{-j\beta l} \quad (1.42)$$

Durch Einsetzen in Gleichung 1.41 erhält man $s_{21} = U_2/U_1$. Hieraus ergibt sich die Streumatrix zu

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & e^{-j\beta l} \\ e^{-j\beta l} & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.43)$$

1.6.2. Berechnung mit Hilfe der Impedanzmatrix

Eine andere Möglichkeit zur Bestimmung der Streuparameter besteht über den Umweg der Impedanzmatrix. Dieser Weg bietet sich bei einfacheren Schaltungen an, die ausschließlich aus konzentrierten Bauelementen wie Widerständen, Kapazitäten oder Induktivitäten bestehen, für die die Impedanzmatrix sehr leicht gebildet werden kann. Der

Zusammenhang der Impedanzmatrix $[Z]$ mit der Streumatrix $[S]$ ist im folgenden hergeleitet.

$$\begin{aligned}
 [U] &= [Z] [I] \\
 [U_h] + [U_r] &= [Z] ([I_h] - [I_r]) \\
 Z_0 ([a] + [b]) &= [Z] ([a] - [b]) \\
 [b] &= \underbrace{([Z] + [E] Z_0)^{-1} ([Z] - [E] Z_0)}_{[S]} [a]
 \end{aligned} \tag{1.44}$$

Hierin bezeichnet $[E]$ die Einheitsmatrix und Z_0 den Bezugswellenwiderstand, der hier für alle Tore identisch gewählt wurde. Der hergeleitete Zusammenhang gilt deshalb nur, wenn alle Tore denselben Bezugswellenwiderstand Z_0 besitzen.

Da die Admittanzmatrix bekannterweise die Inverse der Impedanzmatrix ist, kann die Streumatrix auch sehr leicht aus der Admittanzmatrix berechnet werden. Hierzu wird in vorheriger Gleichung $[Z]$ durch $[Y]^{-1}$ ersetzt.

$$[S] = ([Y]^{-1} + [E] Z_0)^{-1} ([Y]^{-1} - [E] Z_0) \tag{1.45}$$

$$= ([E] + Z_0 [Y])^{-1} ([E] - Z_0 [Y]) \tag{1.46}$$

1.6.3. Berechnung mit Hilfe der Kettenmatrix

Da verkettete Zweitore sehr oft zunächst über die Kettenmatrix beschrieben werden, ist eine Umrechnungsvorschrift zwischen Kettenmatrix und S -Parametern sehr nützlich. Die Zusammenhänge zwischen Kettenmatrix und Impedanzmatrix sowie zwischen Impedanzmatrix und Streuparametern sind bereits bekannt. Mit einigem Aufwand kann damit auch ein direkter Zusammenhang zwischen Kettenmatrix und Streuparametern mit Bezugswellenwiderstand Z_0 hergeleitet werden. Auch hier wird von einem einheitlichen Bezugswellenwiderstand Z_0 an allen Toren ausgegangen.

$$s_{11} = \frac{A_{11} + A_{12}/Z_0 - A_{21}Z_0 - A_{22}}{A_{11} + A_{12}/Z_0 + A_{21}Z_0 + A_{22}} \tag{1.47}$$

$$s_{12} = \frac{2(A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})}{A_{11} + A_{12}/Z_0 + A_{21}Z_0 + A_{22}} \tag{1.48}$$

$$s_{21} = \frac{2}{A_{11} + A_{12}/Z_0 + A_{21}Z_0 + A_{22}} \tag{1.49}$$

$$s_{22} = \frac{-A_{11} + A_{12}/Z_0 - A_{21}Z_0 + A_{22}}{A_{11} + A_{12}/Z_0 + A_{21}Z_0 + A_{22}} \tag{1.50}$$

Mit diesem Satz von Gleichungen kann eine sehr nützliche Eigenschaft der Kettenmatrix hergeleitet werden: Für reziproke Zweitore ($s_{12} = s_{21}$) ist die Determinante der Kettenmatrix gleich Eins.

$$s_{12} = s_{21} \quad (1.51)$$

$$\frac{2(A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})}{A_{11} + A_{12}/Z_0 + A_{21}Z_0 + A_{22}} = \frac{2}{A_{11} + A_{12}/Z_0 + A_{21}Z_0 + A_{22}} \quad (1.52)$$

$$A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 1 \quad (1.53)$$

Oft ist bekannt, dass ein Zweitor reziprok ist, da zum Beispiel keine Richtungsabhängigen Bauelemente verwendet wurden. Durch eine kurze Berechnung der Determinante kann die Kettenmatrix überprüft werden. Ist die Determinante ungleich Eins, muss die Kettenmatrix falsch sein. Umgekehrt kann so natürlich auch die Reziprozität eines Zweitors aus seiner Kettenmatrix festgestellt werden.

1.6.4. Signalflussmethode

Zur Berechnung von verketteten Zweitoren kann auch die Signalflussmethode hilfreich sein. In vielen Fällen kann damit sehr schnell und einfach die Streumatrix eines zusammengesetzten Netzwerks gefunden werden, falls die Streuparameter der einzelnen Komponenten bekannt sind. Wie bereits in Abbildung 1.3.1 gezeigt, können die Signalwege durch Pfeile (gerichtete Kanten) angedeutet werden. Die Pfeile sind jeweils mit einem Streuparameter beschriftet, der die Transformation (Dämpfung, Phasenverschiebung) der Wellengröße entlang dieser Kante beschreibt. Ein Beispiel hierzu ist in Abbildung 1.6.3 gegeben. Die Knotenpunkte des Diagramms sind mit den jeweiligen Wellengrößen beschriftet.

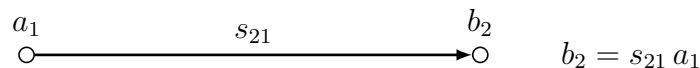


Abbildung 1.6.3: Signalfluss

Für jedes Netzwerk mit bekannten S -Parametern kann ein Signalflussdiagramm aufgestellt werden, in dem die einzelnen Signalpfade sehr gut sichtbar werden. Die Abbildung 1.6.4 zeigt das typische Signalflussdiagramm eines Zweitors.



Abbildung 1.6.4: Signalflussdiagramm eines Zweitors

Daraus lassen sich einige Zusammenhänge sehr leicht ablesen und sehr schnell in Gleichungen fassen. Einige Rechenregeln hierzu sind nachfolgend aufgeführt.

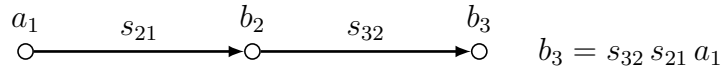


Abbildung 1.6.5: Signalwege in Reihe

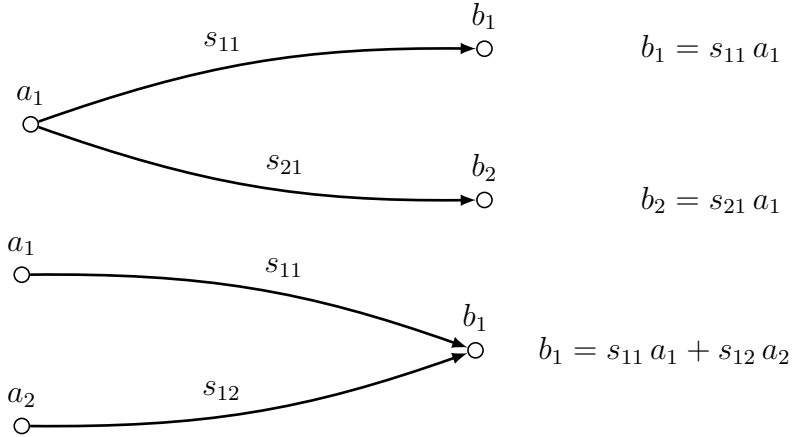


Abbildung 1.6.6: Verzweigung der Signalwege

Sind zwei Kanten wie in Abbildung 1.6.5 hintereinandergeschaltet (Reihenschaltung), so multiplizieren sich die Streuparameter beider Teilpfade (Kanten). Für Pfade aus mehr als zwei Kanten multiplizieren sich entsprechend alle Streuparameter entlang des Pfades.

Es können auch zwei Wege von einem Knoten ausgehen, sodass zwei Gleichungen aufgestellt werden können. Falls sich zwei Pfade hingegen in einem Knoten wieder treffen, addieren sich die Wellen (siehe Abbildung 1.6.6). Diese beiden Fälle kommen auch im Zweitor aus Abbildung 1.6.4 vor. So ist beispielsweise die rücklaufende Welle an Tor 2 $b_2 = s_{21}a_1 + s_{22}a_2$ und die rücklaufende Welle an Tor 1 $b_1 = s_{12}a_2 + s_{11}a_1$.

Etwas komplizierter ist eine Rückkopplung bzw. eine Schleife nach Abbildung 1.6.7 im Signalfuss in Gleichungen zu fassen. Die Schleife kann so interpretiert werden, dass in die obere Kante die Summe aus a_1 und der rücklaufenden Welle $s_{12}b_2$ eingespeist wird. Diese Summe ist im folgenden mit dem Platzhalter c beschrieben. Die rücklaufende Welle b_2 entspricht dann der Multiplikation aus c mit s_{21} .

$$c = a + s_{12}b_2 \quad (1.54)$$

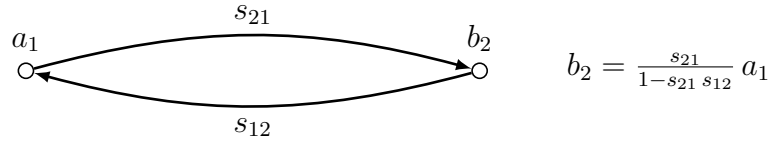
$$b_2 = s_{21}c \quad (1.55)$$

Durch Einsetzen und Umformen kann der gesuchte Zusammenhang zwischen a_1 und b_2 gefunden werden und die Schleife aufgelöst werden.

$$b_2 = s_{21}a + s_{21}s_{12}b_2 \quad (1.56)$$

$$b_2 = \frac{s_{21}}{1 - s_{21}s_{12}} a_1 \quad (1.57)$$

Generell gilt bei einer Schleife, dass der Signalweg durch $(1 - s_{\text{Schleife}})$ geteilt werden muss, wobei s_{Schleife} die Multiplikation aller Teilwege der Schleife ist.

**Abbildung 1.6.7:** Schleife im Signalfluss

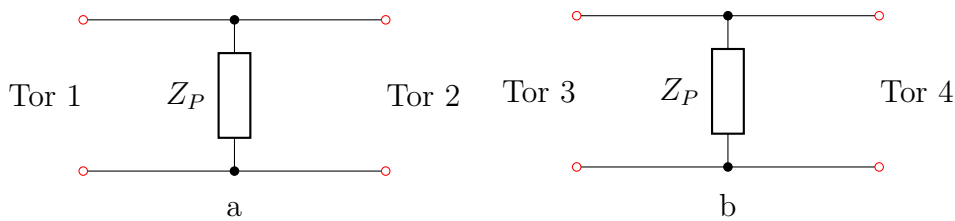
Die Anwendung des Signalflusses soll durch ein kurzes Beispiel veranschaulicht werden. Gegeben sind in Abbildung 1.6.8 zwei identische Zweitore mit jeweils einer Querimpedanz Z_p . Die Streuparameter der Zweitore können über die in den vorherigen Abschnitten beschriebenen Methoden bestimmt werden und errechnen sich zu:

$$[S_a] = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{Z_0}{2Z_p + Z_0} & \frac{2Z_p}{2Z_p + Z_0} \\ \frac{2Z_p}{2Z_p + Z_0} & -\frac{Z_0}{2Z_p + Z_0} \end{bmatrix} \quad (1.58)$$

$$[S_b] = \begin{bmatrix} s_{33} & s_{34} \\ s_{43} & s_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{Z_0}{2Z_p + Z_0} & \frac{2Z_p}{2Z_p + Z_0} \\ \frac{2Z_p}{2Z_p + Z_0} & -\frac{Z_0}{2Z_p + Z_0} \end{bmatrix} \quad (1.59)$$

Gesucht ist nun die Streumatrix $[S_c]$ der Kettenschaltung aus beiden Zweitoren, d.h. Tor 2 und Tor 3 werden verbunden. Es ist sehr leicht ersichtlich, dass die beiden Impedanzen Z_p dann parallel zueinander sind und durch eine Impedanz $Z_p || Z_p = \frac{Z_p}{2}$ ersetzt werden können. Die Streumatrix der Kettenschaltung ist damit:

$$[S_c] = \begin{bmatrix} s_{c11} & s_{c14} \\ s_{c41} & s_{c44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{Z_0}{Z_p + Z_0} & \frac{Z_p}{Z_p + Z_0} \\ \frac{Z_p}{Z_p + Z_0} & -\frac{Z_0}{Z_p + Z_0} \end{bmatrix} \quad (1.60)$$

**Abbildung 1.6.8:** Zweitore mit Querimpedanz Z_p

Dies soll nun Anhand des Signalflussdiagramms nachvollzogen werden. Für die Kettenschaltung beider Zweitore ergibt sich das Signalflussdiagramm nach Abbildung 1.6.9.

Zunächst soll $s_{c11} = \frac{b_1}{a_1}$ der Gesamtschaltung bestimmt werden. Bei näherer Betrachtung stellt man fest, dass ausgehend von a_1 nach b_1 zwei Signalpfade existieren. Der direkte Pfad verläuft über die Kante s_{11} , der längere Pfad verläuft über s_{21} , s_{33} und s_{12} . Zu beachten ist hierbei, dass über die Kante s_{22} eine Rückkopplung (Schleife) besteht.

Der Reflexionsfaktor s_{c11} bestimmt sich aus der Summation beider Pfade. Die nacheinanderfolgenden Kanten des längeren Pfades - die in Reihe liegen - werden miteinander

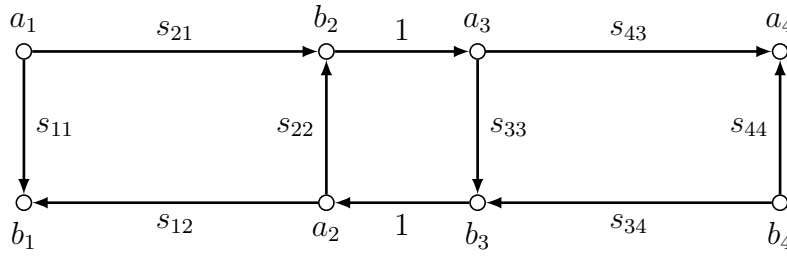


Abbildung 1.6.9: Signalfluss der Kettenschaltung

multipliziert. Die Schleife wird durch die Division mit eins minus der Schleifenverstärkung aus s_{33} und s_{22} berücksichtigt.

$$s_{c11} = s_{11} + s_{21} \frac{s_{33}}{1 - s_{33} s_{22}} s_{12} \quad (1.61)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{Z_0}{2Z_p + Z_0} - \frac{2Z_p}{2Z_p + Z_0} \cdot \frac{\frac{Z_0}{2Z_p + Z_0}}{1 - \left(\frac{Z_0}{2Z_p + Z_0}\right)^2} \cdot \frac{2Z_p}{2Z_p + Z_0} \\ &= -\frac{Z_0}{2Z_p + Z_0} - \frac{2Z_p}{2Z_p + Z_0} \cdot \frac{\frac{Z_0(2Z_p + Z_0)^2}{2Z_p + Z_0}}{4Z_p(Z_p + Z_0)} \cdot \frac{2Z_p}{2Z_p + Z_0} \\ &= -\frac{Z_0}{2Z_p + Z_0} - \frac{Z_p}{2Z_p + Z_0} \cdot \frac{Z_0}{Z_p + Z_0} \\ &= -\frac{Z_0}{2Z_p + Z_0} \left(1 + \frac{Z_p}{Z_p + Z_0}\right) \\ &= -\frac{Z_0}{2Z_p + Z_0} \frac{2Z_p + Z_0}{Z_p + Z_0} \\ &= -\frac{Z_0}{Z_p + Z_0} \end{aligned} \quad (1.62)$$

Der Transmissionsfaktor s_{c41} lässt sich aus nur einem Pfad bestimmen, der jedoch ebenfalls eine Schleife beinhaltet.

$$s_{c41} = s_{21} \frac{1}{1 - s_{33} s_{22}} s_{43} \quad (1.63)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2Z_p}{2Z_p + Z_0} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{Z_0}{2Z_p + Z_0}\right)^2} \cdot \frac{2Z_p}{2Z_p + Z_0} \\ &= \frac{2Z_p}{2Z_p + Z_0} \cdot \frac{(2Z_p + Z_0)^2}{4Z_p(Z_p + Z_0)} \cdot \frac{2Z_p}{2Z_p + Z_0} \\ &= \frac{Z_p}{Z_p + Z_0} \end{aligned} \quad (1.64)$$

Da das Netzwerk symmetrisch ist, sind $s_{c44} = s_{c11}$ und $s_{c14} = s_{c41}$. Die Streumatrix $[S_c]$ des verketteten Netzwerks ist somit

$$[S_c] = \begin{bmatrix} s_{c11} & s_{c14} \\ s_{c41} & s_{c44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{Z_0}{Z_p + Z_0} & \frac{Z_p}{Z_p + Z_0} \\ \frac{Z_p}{Z_p + Z_0} & -\frac{Z_0}{Z_p + Z_0} \end{bmatrix}. \quad (1.65)$$

Wie erwartet, kommt man über die Signalflussmethode zum selben Ergebnis.

1.6.5. Beispiel: Streuparameter eines RC-Gliedes

Ein Zweitor aus konzentrierten Bauteilen (keine Leitungen und Leitungseffekte) besteht aus einem Widerstand und einem Kondensator, wie in Abbildung 1.6.10 gezeigt. Die Komponenten haben folgende Werte: $R = 50 \Omega$, $C = 40 \text{ pF}$. Die Bezugsgröße Z_0 beträgt 50Ω .

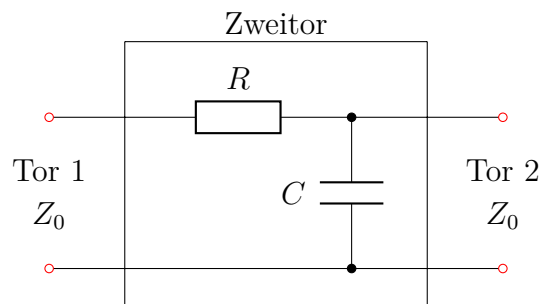


Abbildung 1.6.10: RC-Glied als Zweitor

Frage 1.6.1: Geben Sie die Beschaltung zur Ermittlung der Streuparameter an (Skizze).

Lösung: Siehe Abbildungen 1.1.6 und 1.1.7

Frage 1.6.2: Ist das Zweitor symmetrisch ($s_{22} = s_{11}$)? Geben Sie bitte eine qualitative Begründung an.

Lösung: Das Zweitor ist nicht symmetrisch, was an der Beschaltung zu erkennen ist. Für den Eingangsreflexionsfaktor ist C parallel zu Z_0 , für den Ausgangsreflexionsfaktor ist C parallel zu $(R + Z_0)$. Hieraus ergeben sich unterschiedliche Reflexionsfaktoren.

Frage 1.6.3: Ist das Zweitor übertragungssymmetrisch (reziprok, d.h. $s_{21} = s_{12}$)? Geben Sie bitte eine qualitative Begründung an.

Lösung: Das Zweitor ist reziprok, da nur konzentrierte Bauelemente in Form von Widerständen und Reaktanzen verwendet werden. Es gibt keine richtungsabhängigen Komponenten.

Frage 1.6.4: Berechnen Sie die Streumatrix für die Frequenz $f = \frac{500}{2\pi} \text{ MHz}$ mit den weiter oben angegebenen Werten für R , C und Z_0 . Hinweis: Beschreiben Sie bitte kurz den Lösungsweg, z.B. durch eine Skizze oder Formel.

Lösung: Die Streumatrix wird nach dem üblichen Schema bestimmt. Folgende Schritte werden hierzu durchgeführt:

- Der Eingangsreflexionsfaktor s_{11} und der Ausgangsreflexionsfaktor s_{22} werden gemäß Formel $r = \frac{Z-Z_0}{Z+Z_0}$ berechnet, wobei sich Z jeweils aus der Beschaltung ergibt.
- Der Vorwärtstransmissionsfaktor s_{21} und der Rückwärtstransmissionsfaktor s_{12} wird mittels der Formel $s_{21} = \frac{2U_2}{U_{01}}$ bzw. $s_{12} = \frac{2U_1}{U_{02}}$ bestimmt. Der Spannungsteiler wird aus den gegebenen Werten der Widerstände und der Reaktanz berechnet.
- Für die Berechnung gilt: $R = Z_0 = 50\Omega$, $Z_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{-j}{2\pi \frac{500 \cdot 10^6 \text{ Hz}}{2\pi} \cdot 40 \cdot 10^{-12} \text{ F}} = -j50\Omega$
- Reflexionsfaktor s_{11} : $Z = R + Z_0 || Z_C = 75\Omega - j25\Omega \rightarrow s_{11} = \frac{3}{13} - \frac{2j}{13}$
- Reflexionsfaktor s_{22} : $Z = (R + Z_0) || Z_C = 20\Omega - j40\Omega \rightarrow s_{22} = \frac{-1}{13} - \frac{8j}{13}$
- Transmissionsfaktoren $s_{21} = s_{12}$: Aus dem Spannungsteiler $\frac{U_2}{U_{01}} = \frac{Z_0 || Z_C}{Z_0 + R + Z_0 || Z_C} \rightarrow s_{12} = s_{21} = \frac{2}{13} \cdot (3 - 2j)$

Die Streumatrix ist damit $[S] = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 3 - 2j & 6 - 4j \\ 6 - 4j & -1 - 8j \end{bmatrix}$.

Frage 1.6.5: Bestimmen Sie die Z-Matrix des RC-Glieds bei Betriebsfrequenz und daraus die Streumatrix.

Lösung: Die Impedanzmatrix $[Z]$ des gegebenen RC-Glieds ist:

$$[Z] = \begin{bmatrix} R + Z_C & Z_C \\ Z_C & Z_C \end{bmatrix} = 50\Omega \begin{bmatrix} 1 - j & -j \\ -j & -j \end{bmatrix}$$

Über die im Script hergeleitete Umrechnungsformel ergibt sich die Streumatrix.

$$\begin{aligned} [S] &= ([Z]/Z_0 + [E])^{-1} \cdot ([Z]/Z_0 + [E]) \\ &= \begin{bmatrix} 2 - j & -j \\ -j & 1 - j \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -j & -j \\ -j & -1 - j \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2 - 3j} \begin{bmatrix} 1 - j & j \\ j & 2 - j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -j & -j \\ -j & -1 - j \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 3 - 2j & 6 - 4j \\ 6 - 4j & -1 - 8j \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Der Lösungsweg über die Impedanz liefert erwartungsgemäß die gleiche Lösung.

Frage 1.6.6: Wie lautet die Streumatrix für folgende Fälle: Sehr niedrige Frequenzen (f gegen 0 Hz)? Sehr hohe Frequenzen (f gegen unendlich)? Prüfen Sie die Ergebnisse auf Plausibilität.

Lösung: Für niedrige Frequenzen: Die Kapazität kann ignoriert werden. Das Zweitor ist dann auch symmetrisch, d.h. $s_{11} = s_{22}$. Lösung: $s_{11} = s_{22} = 1/3$, $s_{12} = s_{21} = 2/3$.

Für hohe Frequenzen: Die Kapazität kann als Kurzschluss betrachtet werden. In Vorwärtsrichtung ist die Schaltung von der Quelle aus betrachtet angepasst (da R vor dem Kurzschluss), d.h. $s_{11} = 0$. In Rückwärtsrichtung ist die Schaltung kurzgeschlossen, d.h. $s_{22} = -1$. Wegen des Kurzschlusses wird weder in Vorwärtsrichtung noch in Rückwärtsrichtung eine Spannung U_2 bzw. U_1 übertragen, d.h. $s_{12} = s_{21} = 0$.

Frage 1.6.7: Bei Einspeisung an Tor 1 und Betriebsfrequenz aus Frage 1.6.4: Welcher Anteil der Wirkleistung wird an Tor 1 reflektiert? Welcher Anteil der Wirkleistung läuft auf Tor 2 an? Welcher Anteil der Wirkleistung wird im Zweitor konsumiert?

Lösung: Die Leistungsanteile berechnen sich aus dem Betragsquadrat der Streuparameter. Bei Betrieb in Vorwärtsrichtung ergeben sich folgende Werte:

$$s_{11} = \frac{3-2j}{13}, \text{ somit ist } |s_{11}|^2 = \frac{9+4}{13^2} = \frac{1}{13} \text{ der Anteil der reflektierte Wirkleistung.}$$

$$s_{21} = \frac{6-4j}{13}, \text{ somit ist } |s_{21}|^2 = \frac{36+16}{13^2} = \frac{4}{13} \text{ der Anteil der übertragene Wirkleistung.}$$

Mit diesen Werten wird ein Anteil von $\frac{13}{13} - \frac{1}{13} - \frac{4}{13} = \frac{8}{13}$ der Eingangsleistung an Tor 1 im Zweitor konsumiert.

1.6.6. Beispiel: Anschluss eines Zweitors mit Hilfe einer Leitung

Das Zweitor aus Aufgabe 1.6.5 (gleiche Werte und gleiche Betriebsfrequenz) wird mit Hilfe einer Leitung der Länge l und mit Wellenwiderstand $Z_L = Z_0$ an eine Quelle mit Innenwiderstand Z_0 angeschlossen, wie in der folgenden Abbildung gezeigt.

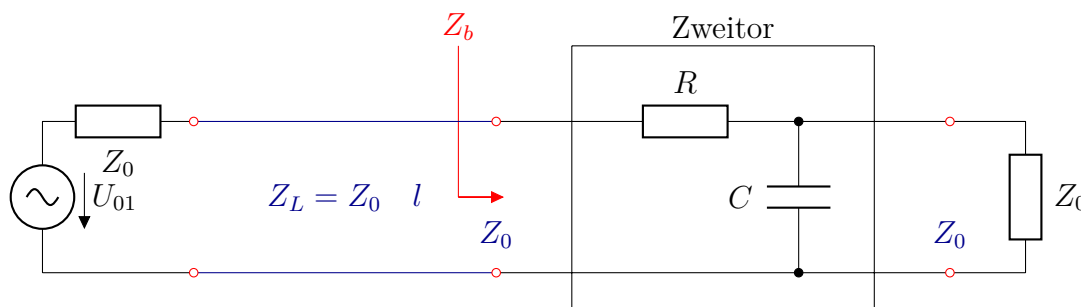


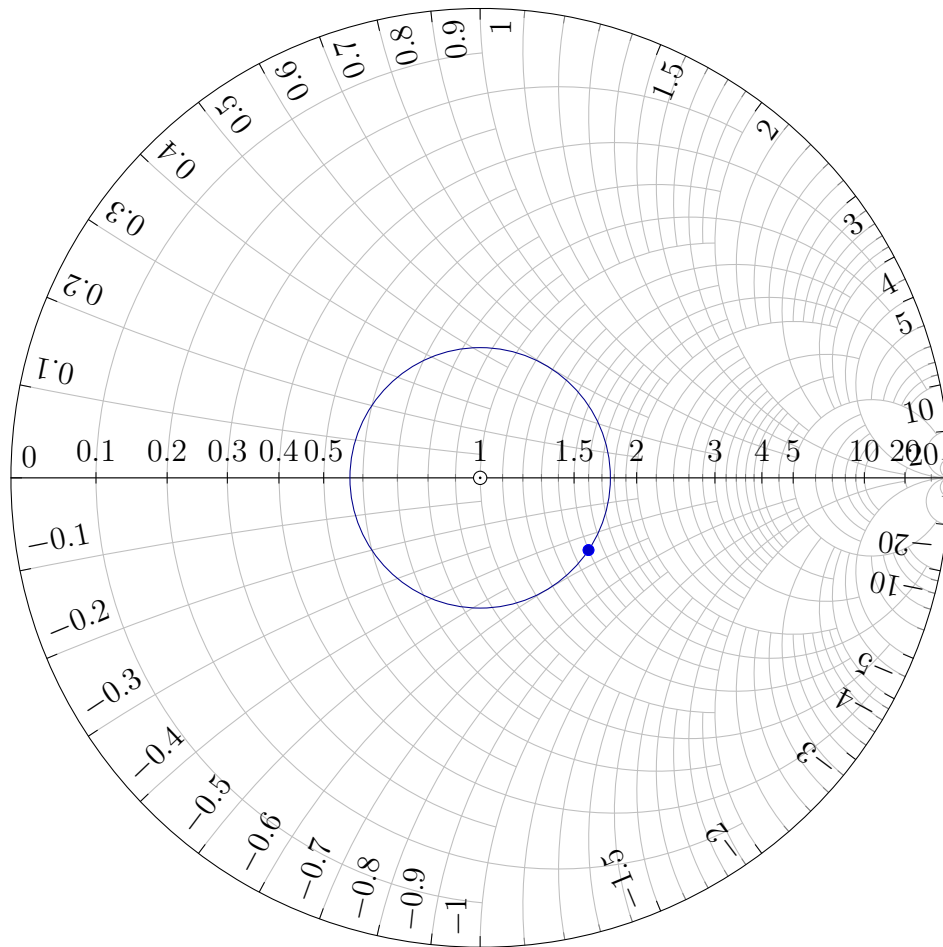
Abbildung 1.6.11: Anschluss des Zweitors mit einer Leitung

Frage 1.6.8: Welchen Effekt hat die Leitung in Abhängigkeit ihrer Länge auf die Impedanz Z_b ? Stellen Sie den Zusammenhang im Smith-Diagramm dar.

Lösung: Leitungstransformation, d.h. Drehung des Reflexionsfaktors abhängig von der Leitungslänge. Hierdurch auch Transformation der Impedanz Z_b gemäß der Werte auf dem Kreis (im Smith-Diagramm in normierter Schreibweise $z_b = Z_b/Z_0$). Die normierte Eingangsimpedanz beträgt $z_b = 1,5 - j 0,5$.

Frage 1.6.9: Ermitteln Sie den Eingangsreflexionsfaktor am Tor 1 rechnerisch aus dem Eingangswiderstand Z_b . Welcher Reflexionsfaktor ergibt sich in Abhängigkeit der Leitungslänge am Anfang der Leitung?

Smith-Diagramm

**Abbildung 1.6.12:** Transformation der Eingangsimpedanz durch die Leitung

Lösung: Der Reflexionsfaktor ist $r_b = s_{11} = (1/13) \cdot (3 - 2j)$. In Abhängigkeit der Leitungslänge gilt: $r(l) = r_b \cdot e^{-j2\beta l}$, d.h. Änderung des Phasenwinkels.

Frage 1.6.10: Kann die Leitung die aufgenommene Wirkleistung verbessern? Welche Wirkleistung nimmt die Schaltung mit einem Viertelwellentransformator $l = \lambda/4$ auf?

Lösung: Die Leitung ändert den Betrag des Reflexionsfaktors nicht, kann die Aufnahme der Wirkleistung also nicht verbessern. Reflektierte Wirkleistung: $|s_{11}|^2 = 1/13$. Somit werden $1 - |s_{11}|^2 = 12/13$ der Wirkleistung aufgenommen.

Frage 1.6.11: Mit welcher Massnahme könnte eine Anpassung an den Innenwiderstand der Quelle erzielt werden? Beschreiben Sie eine mögliche Lösung (keine Berechnung, nur den Lösungsweg darstellen). Welche Verbesserung der Leistungsaufnahme könnte hierdurch erzielt werden?

Lösung: Kombination von Leitungstransformation und Kompensation. Die Leitung transformiert den Realteil von Z_b zu $\text{Re}(Z'_b) = Z_0$. Dadurch ändert sich zwar der Betrag

des Reflexionsfaktors nicht, jedoch liefert die Leitung eine Vorlage hierfür. Danach folgt die Kompensation des Imaginärteils der transformierten Impedanz $\text{Im}(Z'_b) = X_s$ z.B. durch ein konzentriertes Bauelement der Grösse $-X_s$. Verbesserung: Reflexionsfaktor = 0, die Wirkleistung wird komplett aufgenommen.

1.7. Mehrtore

Unter einem Mehrtor wird eine Anordnung oder Schaltung mit mehr als zwei Eingängen oder Ausgängen bezeichnet. Beispiele hierfür sind Schaltungen zur Aufteilung eines Signals (Teiler), Richtkoppler oder Zirkulatoren (Schaltungen, die ein Signal an das jeweils nächste Tor weiter geben). Abbildung ?? zeigt ein allgemeines Mehrtor.

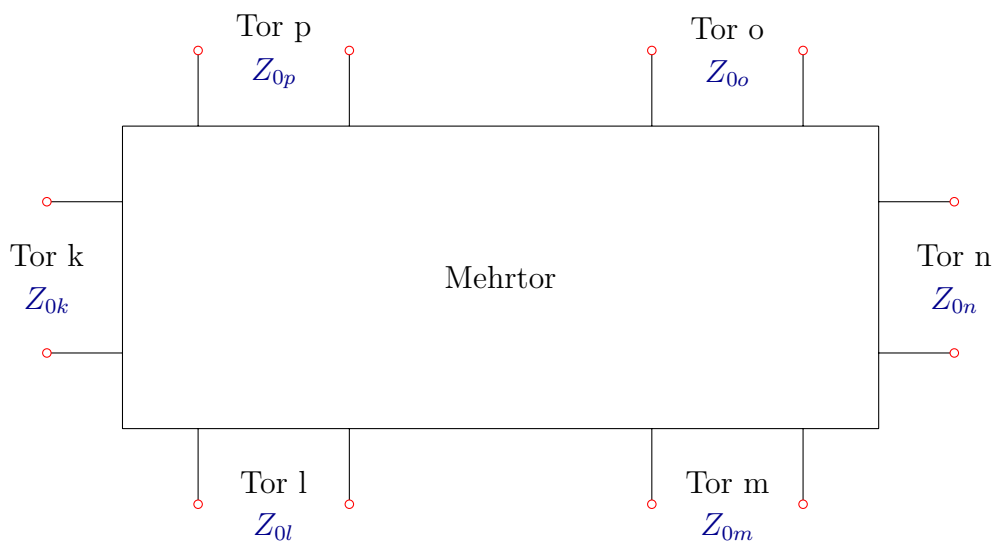


Abbildung 1.7.1: Mehrtor

Im allgemeinen Fall hat jedes Tor einen eigenen Bezugswiderstand Z_{0i} . Im folgenden Text gehen wir jedoch davon aus, dass ein einheitlicher Bezugswiderstand vorliegt, d.h. $Z_{0i} = Z_L$.

Für die S-Parameter eines Mehrtors erhält man folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & s_{n2} & \cdots & s_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad (1.66)$$

Aus dem Gleichungssystem geht hervor, wie die S-Parameter messtechnisch zu ermittelt sind. Die Parameter s_{ji} erhält man, indem man an Port i einspeist und alle anderen Ports mit ihrem Wellenwiderstand bzw. ihrem Bezugswiderstand abschließt. In diesem Fall sind alle Beiträge $a_j = 0$ für $j \neq i$.

Für die Berechnung der S-Parameter gelten die gleichen Regeln wie beim Zweitor. Für die Elemente der Hauptdiagonalen s_{ii} gilt $s_{ii} = b_i/a_i|_{a_j=0 \text{ für } j \neq i}$. In diesem Fall ist s_{ii} gleich dem Eingangsreflexionsfaktor an Tor i:

$$s_{ii} = r_{ei} = \frac{Z_{ei} - Z_{0i}}{Z_{ei} + Z_{0i}} \quad (1.67)$$

Für die Berechnung der Transmissionsfaktoren s_{ji} mit $j \neq i$ gilt:

$$s_{ji} = \frac{2U_j}{U_{0i}} \quad (1.68)$$

Abbildung 1.7.2 zeigt die Beschaltung zur Ermittlung der Parameter s_{ii} und s_{ji} mit Speisung an Tor i.

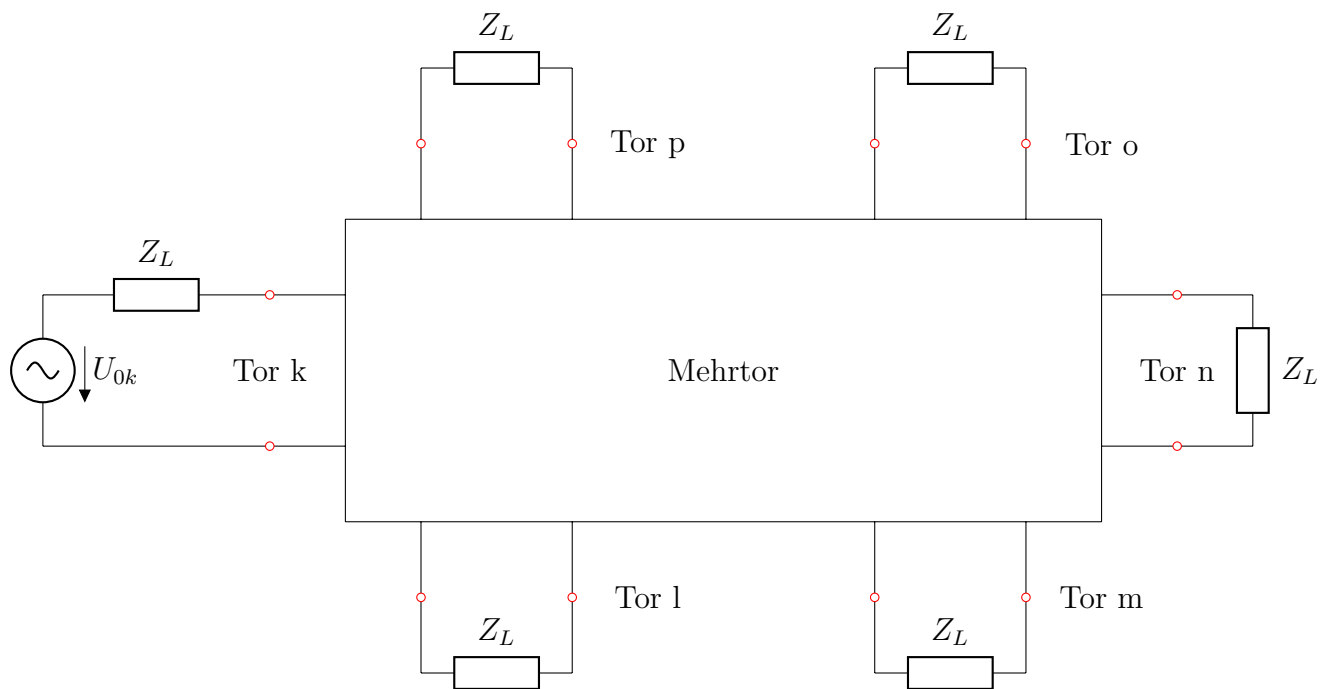


Abbildung 1.7.2: Mehrtor

1.7.1. Verlustfreiheit

Für ein verlustfreies Mehrtor muss die Summe der eingespeisten Leistung gleich der Summe der an den Toren abgegebenen Leistung sein, d.h. es wird im Inneren keine Leistung konsumiert. In diesem Fall gilt:

$$\sum_{i=1}^n P_{ai} = \sum_{i=1}^n P_{bi} \quad (1.69)$$

Mit den eingangs erläuterten Beziehungen (siehe Gleichungen 1.12 und 1.12) gilt:

$$\sum_{i=1}^N a_i a_i^* = \sum_{i=1}^N b_i b_i^* \quad (1.70)$$

In Matrixschreibweise folgt hieraus nach einiger Umformung: $[S]^T [S]^* = [E]$.

1.7.2. Übertragungssymmetrie

Ein Mehrtor ist übertragungssymmetrisch (bzw. reziprok oder umkehrbar), wenn die Transmissionsfaktoren vorwärts und rückwärts gleich sind, d.h. $s_{ij} = s_{ji}$. In Matrix-Schreibweise entspricht also die transponierte Matrix der ursprünglichen Matrix: $[S] = [S]^T$. Für verlustlose übertragungssymmetrische Mehrtore folgt aus $[S] = [S]^T$ und $[S]^T[S]^* = [E]$ die Beziehung $[S]^{-1} = [S]^*$.

1.7.3. Vollständige Symmetrie

Ein Mehrtor ist vollständig symmetrisch, falls es übertragungssymmetrisch ist und zusätzlich alle Reflexionsfaktoren identisch sind $s_{ii} = s_{jj}$.

1.7.4. Reflexionsfreiheit

Wie das Zeittor wird auch das Mehrtor als reflexionsfrei bzw. allseitig angepasst bezeichnet, falls alle Reflexionsfaktoren s_{ii} verschwinden.

1.7.5. Spezielle Eigenschaften des Dreitors

Ein Dreitor kann nie gleichzeitig allseitig angepasst (reflexionsfrei), reziprok und zugleich verlustfrei sein. Diese Tatsache kann sehr leicht geprüft werden, indem die allgemeine Streumatrix eines angepassten und reziproken Dreitors auf Verlustfreiheit geprüft wird.

$$\begin{pmatrix} 0 & s_{12} & s_{13} \\ s_{12} & 0 & s_{23} \\ s_{13} & s_{23} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & s_{12}^* & s_{13}^* \\ s_{12}^* & 0 & s_{23}^* \\ s_{13}^* & s_{23}^* & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |s_{12}|^2 + |s_{13}|^2 & s_{13} s_{23}^* & s_{12} s_{23}^* \\ s_{23} s_{13}^* & |s_{12}|^2 + |s_{23}|^2 & s_{12} s_{13}^* \\ s_{23} s_{12}^* & s_{13} s_{12}^* & |s_{13}|^2 + |s_{23}|^2 \end{pmatrix} \neq [E]$$

Es ist leicht ersichtlich, dass die Einheitsmatrix nicht erreicht werden kann.

1.7.6. Beispiel: Dreitor aus Leitungen

Das in Abbildung 1.7.3 gezeigte Dreitor besteht aus drei verlustlosen Leitungen der Länge $\frac{\lambda}{4}$. Die Wellenwiderstände der Leitungen sind $Z_{L1} = R_0$ und $Z_{L2} = Z_{L3} = 2R_0$. Die Streumatrix soll berechnet werden. Als reeller Bezugswiderstand wird an allen Toren R_0 gewählt.

Frage 1.7.1: Berechnen Sie den Reflexionsfaktor s_{11} .

Lösung: Zur Berechnung von s_{11} geht man von der Beschaltung nach Bild 1.7.4 aus. Die Tore 2 und 3 müssen mit ihren Bezugswiderständen abgeschlossen sein.

Schaut man vom Verzweigungspunkt aus in die Leitungen 2 oder 3, so sieht man die Impedanzen Z_{v2} bzw. Z_{v3} . Diese Ersatzimpedanzen, der mit R_0 abgeschlossenen Leitungen, können über die Impedanztransformationen der Viertelwellenleitungen bestimmt werden.

$$Z_{v2} = Z_{v3} = \frac{(2R_0)^2}{R_0} = 4R_0 \quad (1.71)$$

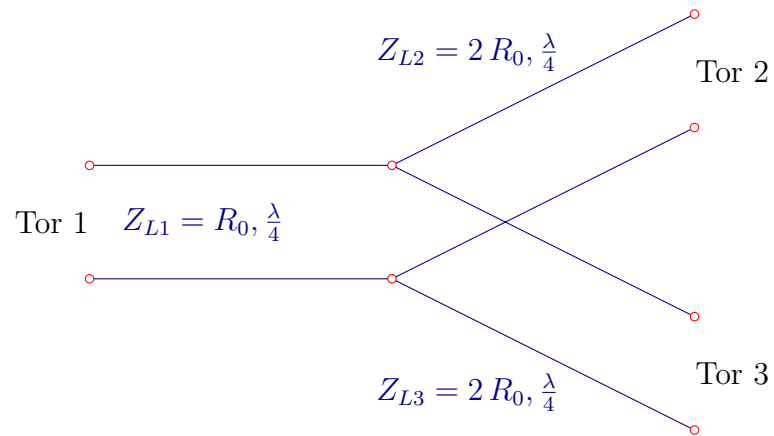
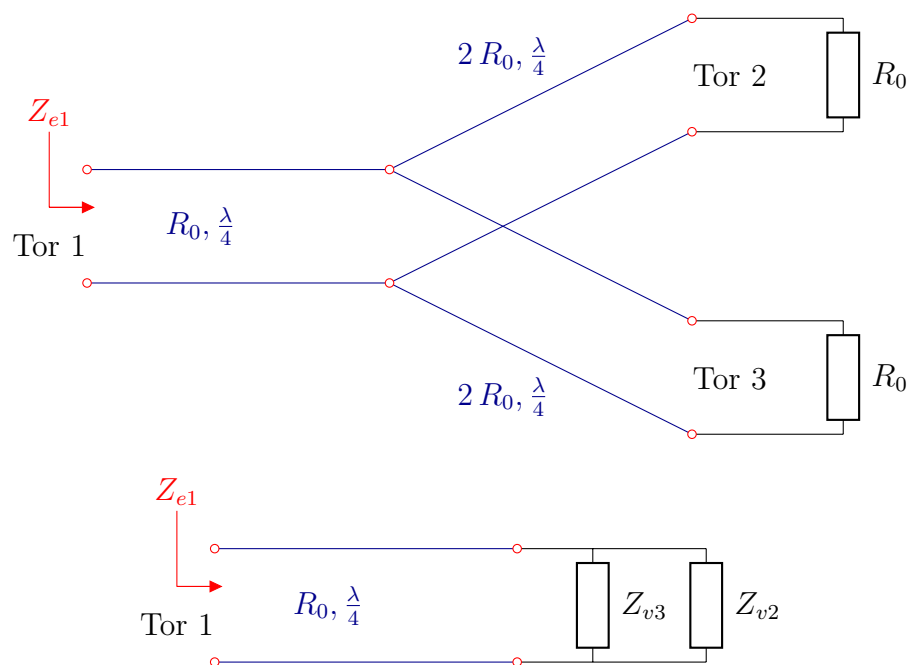


Abbildung 1.7.3: Dreitor

Abbildung 1.7.4: Beschaltung zur Berechnung von s_{11}

Für die Parallelschaltung von Z_{v2} und Z_{v3} erhält man $Z_{v2} || Z_{v3} = 2 R_0$. Es errechnet sich damit die Eingangsimpedanz der Leitung 1 (ebenfalls ein Viertelwellentransformator) zu

$$Z_{e1} = \frac{R_0^2}{Z_{v2} || Z_{v3}} = \frac{R_0}{2}. \quad (1.72)$$

Für den Eingangsreflexionsfaktor am Tor 1 erhält man

$$s_{11} = \frac{Z_{e1} - R_0}{Z_{e1} + R_0} = \frac{\frac{R_0}{2} - R_0}{\frac{R_0}{2} + R_0} = -\frac{1}{3}. \quad (1.73)$$

Frage 1.7.2: Berechnen Sie die Reflexionsfaktoren s_{22} und s_{33} .

Lösung: Wegen der Symmetrie der Schaltung sind s_{22} und s_{33} gleich. Die Berechnung erfolgt hier über den Eingangswiderstand von Tor 2. Die Abbildung 1.7.5 zeigt die hierfür erforderliche Beschaltung.

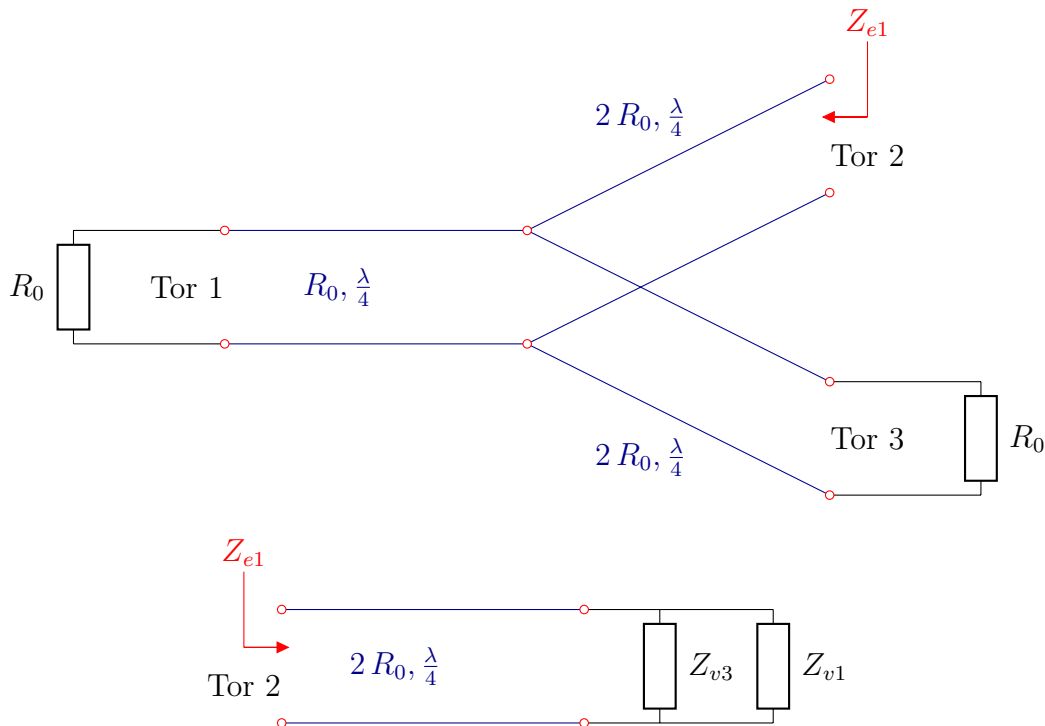


Abbildung 1.7.5: Beschaltung zur Berechnung von s_{22}

Die Leitungen 1 und 3 sind Viertelwellentransformatoren mit Abschluss R_0 . Der Wellenwiderstand von Leitung 1 ist R_0 , der Wellenwiderstand von Leitung 3 ist $2 R_0$. Für die Ersatzimpedanzen am Verzweigungspunkt erhält man $Z_{v1} = R_0$ und $Z_{v3} = 4 R_0$. Für den Eingangswiderstand Z_{e2} erhält man

$$Z_{e2} = \frac{(2 R_0)^2}{Z_{v1} || Z_{v3}} = \frac{4 R_0^2}{\frac{4 R_0 R_0}{4 R_0 + R_0}} = 5 R_0. \quad (1.74)$$

Hieraus errechnet sich s_{22} zu

$$s_{22} = \frac{Z_{e2} - R_0}{Z_{e2} + R_0} = \frac{5 R_0 - R_0}{5 R_0 + R_0} = \frac{2}{3}. \quad (1.75)$$

Wegen der gegebenen Symmetrie ist $s_{33} = s_{22}$.

Frage 1.7.3: Bestimmen Sie die Transmissionsfaktor s_{21} und s_{31} .

Lösung: Die Berechnung der Transmissionsfaktoren erfolgt aus der Beschaltung nach Abbildung 1.7.6. Gesucht ist das Spannungsverhältnis von U_2 und U_{01} , um mittels der bekannten Formel $s_{21} = \frac{2U_2}{U_{01}} \sqrt{\frac{Z_{L1}}{Z_{L2}}}$ den gewünschten Transmissionsfaktor zu berechnen. Die Wurzel aus den Bezugswiderständen kann in der genannten Formel entfallen, da die Bezugswiderstände aller Tore identisch sind.

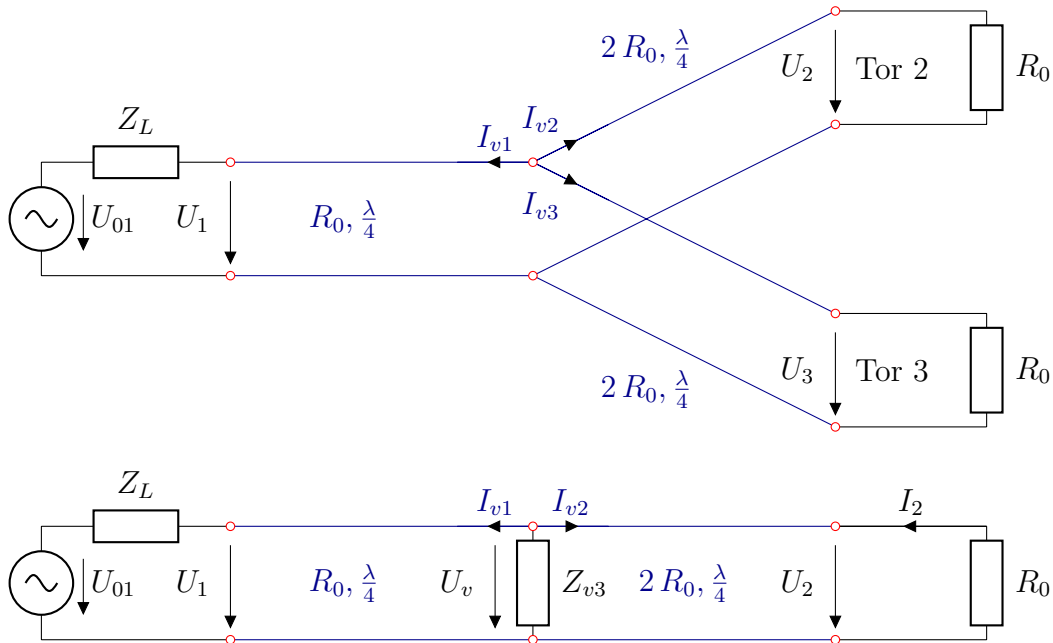


Abbildung 1.7.6: Beschaltung zur Berechnung von s_{21}

Leitung 3 wird in Abbildung 1.7.6 durch ihre Erstsatzschaltung am Verzweigungspunkt ersetzt, wie bereits für die Berechnung von s_{11} geschehen. Die Ersatzimpedanz ist $Z_{v3} = \frac{(2R_0)^2}{R_0} = 4R_0$.

Die weitere Berechnung erfolgt dadurch, dass das Spannungsverhältnis Stück für Stück berechnet wird. Um dies zu zeigen, wird die Formel für s_{21} nach folgendem Schema erweitert:

$$s_{21} = \frac{2U_2}{U_{01}} = 2 \cdot \frac{U_1}{U_{01}} \cdot \frac{U_v}{U_1} \cdot \frac{U_2}{U_v} \quad (1.76)$$

Die Eingangsimpedanz an Tor 1 ist bereits bekannt und beträgt $Z_{e1} = \frac{R_0}{2}$. Über die Spannungsteilerregel kann damit das erste Spannungsverhältnis bestimmt werden.

$$\frac{U_1}{U_{01}} = \frac{Z_{e1}}{Z_{e1} + R_0} = \frac{1}{3} \quad (1.77)$$

Als nächstes soll das Verhältnis $\frac{U_2}{U_v}$ berechnet werden. Da Tor 2 mit dem Widerstand R_0 abgeschlossen ist, kann der Strom I_2 an Tor 2 sehr einfach bestimmt werden.

$$I_2 = -\frac{U_2}{R_0} \quad (1.78)$$

Das negative Vorzeichen ergibt sich aus der Definition der Strom- und Spannungspfeile in Abbildung 1.7.6. Aus dem Strom I_2 kann nun über den Viertelwellentransformator die Spannung U_v berechnet werden.

$$U_v = -j 2 R_0 I_2 = j 2 U_2 \quad \rightarrow \quad \frac{U_2}{U_v} = \frac{-j}{2} \quad (1.79)$$

Die Formel hierfür kann sehr einfach aus der Kettenmatrix der Viertelwellenleitung oder aus den bekannten Vierpolgleichungen gewonnen werden.

Die Ströme I_{v2} und I_{v3} können bestimmt werden, indem die nun bekannte Spannung U_v durch die Widerstände geteilt wird, die vom Verzweigungspunkt aus sichtbar sind.

$$I_{v2} = \frac{U_v}{Z_{v2}} = \frac{U_v}{4 R_0} \quad (1.80)$$

$$I_{v3} = \frac{U_v}{Z_{v3}} = \frac{U_v}{4 R_0} \quad (1.81)$$

Den Strom I_{v1} gewinnt man anschließend über die Knotenregel. Auch hier ist auf die Richtung der Strompfeile zu achten.

$$I_{v1} = -I_{v2} - I_{v3} = -\frac{U_v}{2 R_0} \quad (1.82)$$

$$U_1 = -j R_0 I_{v1} = j \frac{U_v}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{U_v}{U_1} = -j 2 \quad (1.83)$$

Alle bekannten Spannungsverhältnisse können nun in Gleichung 1.76 eingesetzt und der gesuchte Transmissionsfaktor berechnet werden.

$$s_{21} = \frac{2 U_2}{U_{01}} = 2 \cdot \frac{U_1}{U_{01}} \cdot \frac{U_v}{U_1} \cdot \frac{U_2}{U_v} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot (-j 2) \cdot \frac{-j}{2} = -\frac{2}{3} \quad (1.84)$$

Aus Symmetriegründen gilt hier $s_{31} = s_{21}$.

Der Streuparameter s_{21} kann auch sehr anschaulich über die Leistungsbilanz bestimmt werden. Da der Reflexionsfaktor $s_{11} = \frac{1}{3}$ bereits bekannt war, kann der Anteil der reflektierten Leistung bei Einspeisung in Tor 1 mit $\frac{1}{9}$ angegeben werden. Der Anteil der in Tor 1 einfließenden Leistung ist damit $\frac{8}{9}$. Da das Dreitor verlustfrei und symmetrisch bezüglich den Toren 2 und 3 ist, fließt jeweils $\frac{4}{9}$ der ursprünglichen Leistung an Tor 2 bzw. 3. Der Betrag des Streuparameters ist damit

$$|s_{21}| = |s_{31}| = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}. \quad (1.85)$$

Da zwischen den Toren 1 und 2 bzw. 1 und 3 jeweils zwei Viertelwellenleitungen liegen, wird die Phase insgesamt um 180° gedreht, sodass gilt:

$$s_{21} = s_{31} = -\frac{2}{3} \quad (1.86)$$

Frage 1.7.4: Bestimmen Sie die Transmissionsfaktor s_{13} und s_{12} .

Lösung: Da das gegebene Dreitor nur aus verlustfreien Leitungen aufgebaut ist, ist es übertragungssymmetrisches bzw. reziprok und verlustfrei. Für die S-Parameter müssen aufgrund der Reziprozität folgende Zusammenhänge gelten:

$$s_{13} = s_{31} \quad (1.87)$$

$$s_{12} = s_{21} \quad (1.88)$$

Die Beziehung nach Gleichung 1.87 soll mit Hilfe von Wirkleistungsbeziehungen und Phasenbeziehungen aus der Ersatzschaltung nach Abbildung 1.7.7 gezeigt werden.

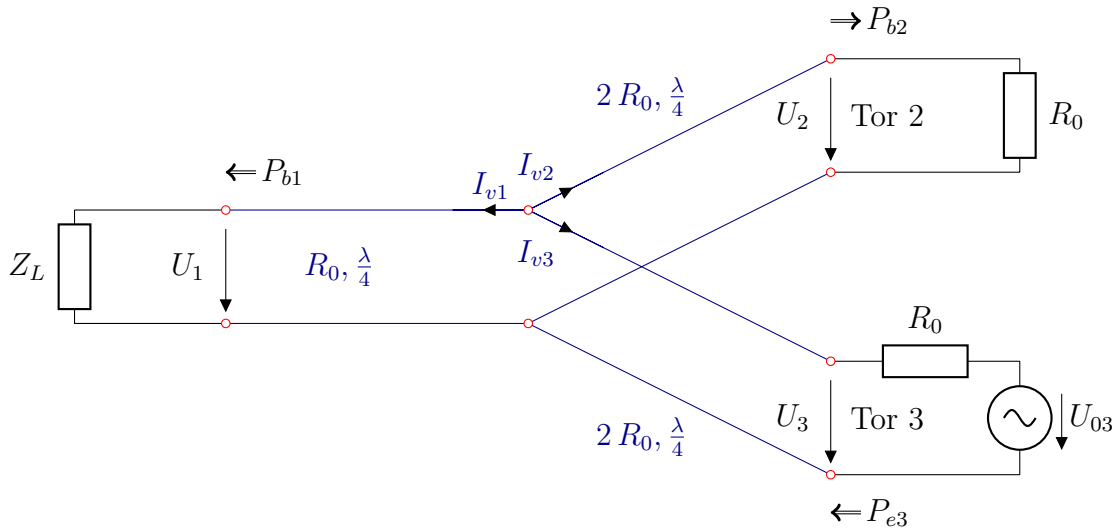


Abbildung 1.7.7: Beschaltung zur Berechnung von s_{13}

Da das 3-Tor bekanntlich verlustfrei ist, muss die an Tor 3 eingetretene Wirkleistung P_{e3} an den Toren 1 und 2 abfließen.

$$P_{e3} = P_{b1} + P_{b2} = \frac{|U_3|^2}{Z_{e3}} = \frac{|U_{r1}|^2}{Z_{e1}} + \frac{|U_{r2}|^2}{Z_{e2}} \quad (1.89)$$

Da Aufgrund der reflexionsfreien Abschlüsse keine rücklaufende Welle an den Toren 1 und 2 existieren, gilt:

$$P_{e3} = P_{b1} + P_{b2} = \frac{|U_3|^2}{Z_{e3}} = \frac{|U_1|^2}{Z_{e1}} + \frac{|U_2|^2}{Z_{e2}} \quad (1.90)$$

Der Eingangswiderstand Z_{e3} am Tor 3 errechnet sich zu

$$Z_{e3} = \frac{(2 R_0)^2}{R_0 || 4 R_0} = 5 R_0. \quad (1.91)$$

Damit kann die an Tor 3 eintretende Leistung näher beschrieben werden.

$$P_{e3} = \frac{|U_3|^2}{Z_{e3}} = \frac{1}{Z_{e3}} \left| \frac{Z_{e3}}{Z_{e3} + R_0} \right|^2 |U_{03}|^2 = \quad (1.92)$$

$$= \frac{Z_{e3}}{(Z_{e3} + R_0)^2} |U_{03}|^2 = \frac{5 R_0}{(5 R_0 + R_0)^2} |U_{03}|^2 = \frac{5}{36} |U_{03}|^2 \quad (1.93)$$

Für die Wirkleistungen P_1 und P_3 gilt

$$P_{b1} = \frac{|U_1|^2}{R_0} = \frac{|U_v|^2}{R_0} \quad (1.94)$$

$$P_{b2} = \frac{|U_2|^2}{R_0} = \frac{|U_v|^2}{4 R_0} \quad (1.95)$$

Hieraus folgt das Verhältnis von P_{b1} und P_{b1} .

$$P_{b2} = \frac{P_{b1}}{4} \quad (1.96)$$

Aus der Summe der Leistungen kann der Zusammenhang von P_{e3} und P_{b1} angegeben werden.

$$P_{e3} = P_{b1} + \frac{P_{b1}}{4} = \frac{5}{36} \frac{|U_{03}|^2}{R_0} = \frac{5}{4} \frac{|U_1|^2}{R_0} \quad (1.97)$$

Das gesuchte Spannungsverhältnis ist

$$\frac{|U_1|}{|U_{03}|} = \frac{1}{3}, \quad (1.98)$$

sodass für s_{13} der erwartete Betrag errechnet wird.

$$|s_{13}| = \left| \frac{2U_1}{U_{03}} \right| = \frac{2}{3} \quad (1.99)$$

Die Phasenbeziehung lässt sich jedoch aus der Ersatzschaltung leicht ableiten. Beide Viertelwellenleitungen sind mit reellen Ababschlusswiderständen versehen, sodass die Phasenverschiebung zwischen U_1 und U_{03} insgesamt 180° beträgt.

$$s_{13} = \frac{2 U_1}{U_{03}} = -\frac{2}{3} \quad (1.100)$$

Frage 1.7.5: Berechnen Sie die Transmissionsfaktor s_{23} und s_{32} .

Lösung: Zur Berechnung von s_{23} wird in der Beschaltung nach Abbildung 1.7.8 die Leitung 1 durch ihre Ersatzimpedanz an der Verzweigungsstelle ersetzt.

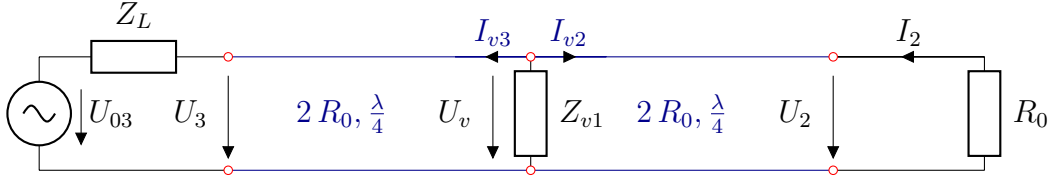


Abbildung 1.7.8: Beschaltung zur Berechnung von s_{21}

Das Vorgehen entspricht dem Schema, das bereits bei der Berechnung von s_{21} angewendet wurde.

$$I_2 = -\frac{U_2}{R_0} \quad (1.101)$$

$$U_v = -j 2 R_0 I_2 = j 2 U_2 \quad (1.102)$$

$$\frac{U_2}{U_v} = \frac{-j}{2} \quad (1.103)$$

Äquivalent kann das nächste Spannungsverhältnis bestimmt werden.

$$I_{v3} = -I_{v1} - I_{v2} = -\frac{U_v}{Z_{v1}} - \frac{U_v}{Z_{v2}} = -\frac{U_v}{R_0} - \frac{U_v}{4 R_0} = -\frac{5}{4} \frac{U_v}{R_0} \quad (1.104)$$

$$U_3 = -j 2 R_0 I_{v3} = j \frac{5}{2} U_v \quad (1.105)$$

$$\frac{U_v}{U_3} = \frac{-j 2}{5} \quad (1.106)$$

Das Spannungsverhältnis $\frac{U_3}{U_{03}}$ ergibt sich aus der Spannungsteilerregel.

$$\frac{U_3}{U_{03}} = \frac{Z_{e3}}{Z_{e3} + R_0} = \frac{5 R_0}{5 R_0 + R_0} = \frac{5}{6} \quad (1.107)$$

Der Streuparameter s_{23} kann nun durch Einsetzen der Spannungsverhältnisse bestimmt werden.

$$s_{23} = \frac{2 U_2}{U_{03}} = 2 \frac{U_2}{U_v} \cdot \frac{U_v}{U_3} \cdot \frac{U_3}{U_{03}} = -\frac{1}{3} \quad (1.108)$$

Es gilt wegen der Übertragungssymmetrie des Netzwerks

$$s_{32} = s_{23}. \quad (1.109)$$

Frage 1.7.6: Ist das Dreitor verlustfrei?.

Aus den zuvor berechneten Ergebnissen lässt sich für das Dreitor folgende Streumatrix angeben:

$$[S] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (1.110)$$

Wenn das Dreitor verlustfrei ist, so muss folgende Beziehung gelten:

$$[S]^T [S]^* = [E] \quad (1.111)$$

Das Produkt der transponierten Streumatrix mit der konjugiert komplexen Streumatrix sollte die Einheitsmatrix ergeben. Diese Beziehung lässt sich anhand der Streumatrix aus Gleichungen 1.110 nachprüfen.

$$\begin{aligned} [S]^T [S]^* &= [S]^2 \\ &= \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1+4+4 & 2-4+2 & 2+2-4 \\ 2-4+2 & 4+4+1 & 4-2-2 \\ 2+2-4 & 4-2-2 & 4+1+4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.112)$$

Das Dreitor ist damit verlustlos.

2. Symmetrische Netzwerke und Elemente

Im Abschnitt 2 werden Schaltungen bzgl. ihrer Übertragungseigenschaften berechnet. Charakteristisch in der Hochfrequenztechnik ist hierbei die Verwendung von Leitungsabschnitten in Kombination mit konzentrierten Bauelementen. Einige Schaltungen lassen sich durch Ausnutzen von Symmetrien berechnen (Gleich- und Gegentaktbetrieb). Dieses Vorgehen ist in den nachfolgenden Abschnitten näher erläutert.

2.1. Gleich- und Gegentaktbetrieb

Gegeben ist ein Netzwerk, das bezüglich einer Symmetrieebene achsensymmetrisch aufgebaut ist, was in Abbildung 2.1.1 durch die ungewöhnlich sechseckige Form des Zweitors angedeutet werden soll.

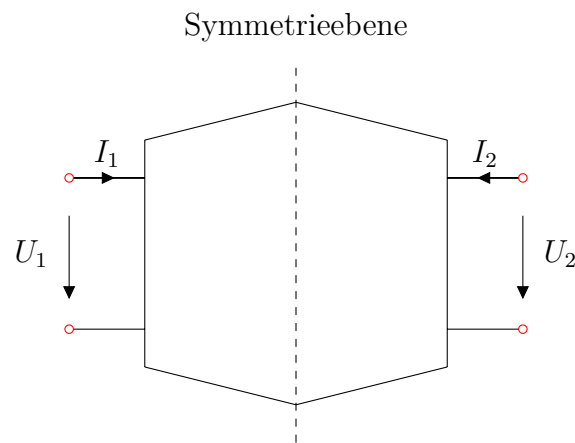


Abbildung 2.1.1: Symmetrisches Zweitor

Falls im Zweitor nur lineare Bauelemente verwendet wurden, gilt der Überlagerungssatz bzw. das Superpositionsprinzip. Dies bedeutet, dass zum Beispiel die Addition zweier Lösungen einer linearen Gleichung wieder eine Lösung der linearen Gleichung darstellt. Das kann für die Berechnung eines Netzwerks sehr hilfreich sein.

Angenommen man wählt $U_e = \frac{U_1+U_2}{2}$ und $U_o = \frac{U_1-U_2}{2}$ und betreibt das Netzwerk wie in Abbildung 2.1.2 dargestellt im sogenannten Gleichtakt (Even-Mode, Index e) und im Gegentakt (Odd-Mode, Index o), so ist die Überlagerung beider Fälle wieder die Ausgangssituation in Abbildung 2.1.1.

$$U_1 = U_e + U_o \quad (2.1)$$

$$U_2 = U_e - U_o \quad (2.2)$$

$$I_1 = I_e + I_o \quad (2.3)$$

$$I_2 = I_e - I_o \quad (2.4)$$

Gleichtaktfall und Gegentaktfall werden so natürlich nicht tatsächlich, sondern nur virtuell verwendet, um die Berechnung zu vereinfachen. Sind beispielsweise U_1 und U_2

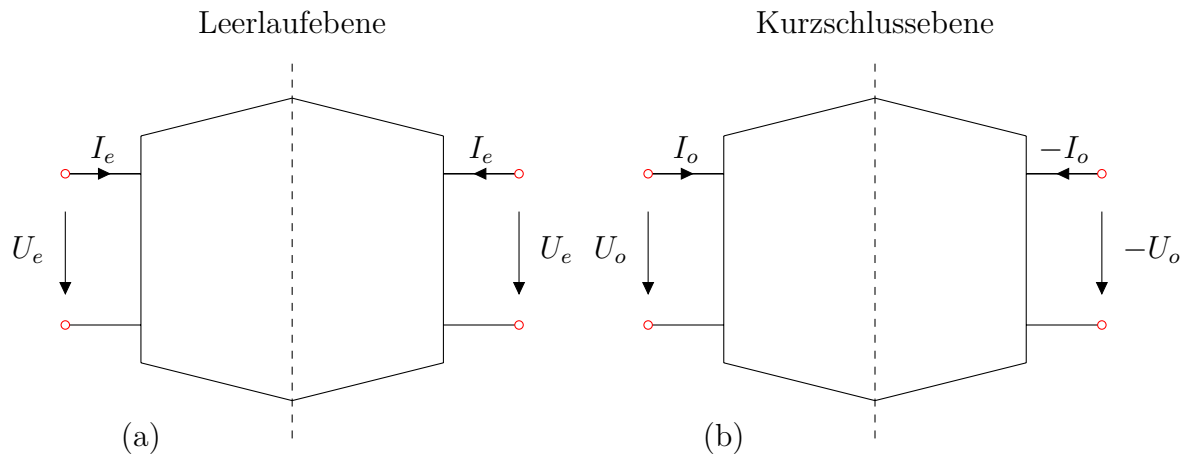


Abbildung 2.1.2: Symmetrisches Zweitor im Gleichtakt- (a) und Gegentaktbetrieb (b)

gegeben und die Ströme I_1 sowie I_2 gesucht, so werden zunächst die Gleichtaktspannung U_e und die Gegentaktspannung U_o bestimmt, daraus die Ströme I_e und I_o und anschließend durch Überlagerung der Fälle I_1 und I_2 nach den Formeln 2.3 und 2.4 berechnet.

Obwohl hier zwei Fälle (Gleichtakt und Gegentakt) berechnet werden müssen, wird die Berechnung eines Netzwerks in vielen Fällen durch Ausnutzen der Symmetrieebenen vereinfacht. Im **Gleichtaktbetrieb** liegen an Tor 1 und Tor 2 identische Spannungen an. Auf Leitungen die innerhalb des Netzwerks durch die Symmetrieebene stoßen, fließt kein Strom, da auf beiden Seiten dieselbe Spannung anliegt. An der Symmetrieebene existiert also ein virtueller Leerlauf. Es genügt somit, nur die Hälfte des Netzwerks zu berechnen, wobei alle durch die Symmetrieebene getrennten Leitungen im Leerlauf sind.

Im **Gegentaktfall** wird an Tor 1 und Tor 2 die umgekehrte Spannung angelegt. Dadurch entsteht an der Symmetrieebene ein virtueller Kurzschluss aller durch die Symmetrieebene durchstoßenden Leitungen. Auch hier muss nur das halbe Netzwerk berechnet werden, allerdings mit kurzgeschlossenen Leitungen.

Zusammenfassend werden also statt des gesamten Netzwerks zwei halbe Netzwerke berechnet und anschließend überlagert.

2.2. Streuparameter aus Gleich- und Gegentakt ermitteln

Das soeben für Spannungen und Ströme gezeigte Verfahren kann auch auf die Wellengrößen a und b angewendet werden, da diese nach Gleichungen 1.18 und 1.19 in linearer Weise mit den Spannungen und Strömen zusammenhängen.

Da die Streuparameter des symmetrischen Netzwerks aus Abbildung 2.2.1 bestimmt werden sollen, wird Tor 2 mit dem Bezugswellenwiderstand Z_0 abgeschlossen und Tor 1 mittels einer Spannungsquelle mit Innenwiderstand $R_i = Z_0$ gespeist. Durch den angepassten Abschluss an Tor 2 existiert keine einlaufende Welle an Tor 2. Die komplette Leistung der ausgehenden Welle b_2 wird im Widerstand vernichtet.

Damit sind die Messbedingungen für die Streuparameter erfüllt und man könnte so die Elemente $s_{11} = \frac{b_1}{a_1}$ und $s_{21} = \frac{b_2}{a_1}$ der Streumatrix berechnen. Da das Netzwerk symmetrisch

ist, gilt zudem $s_{22} = s_{11}$ und $s_{12} = s_{21}$, sodass alle Elemente bestimmt sind.

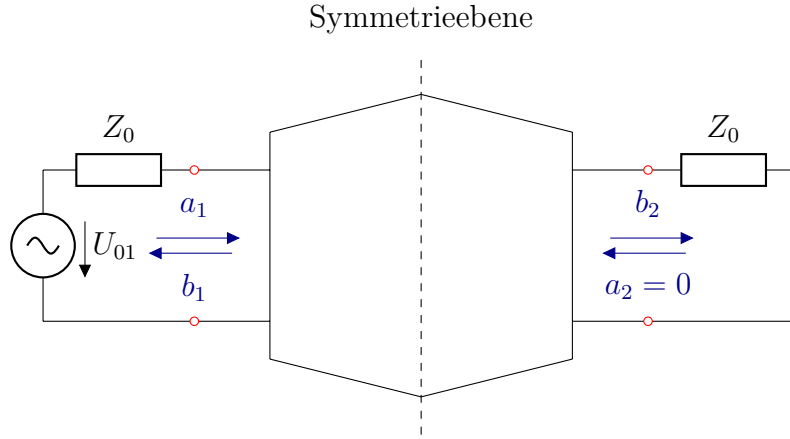


Abbildung 2.2.1: Symmetrisches Zweitor mit Wellengrößen

Es soll jedoch bei der Berechnung der Streumatrix die Symmetrie ausgenutzt werden, damit nicht das komplette Netzwerk berechnet werden muss, sondern lediglich zwei halbe Netzwerke, die an der Symmetrieebene einen Leerlauf bzw. einen Kurzschluss besitzen. Die Abbildung 2.2.2 zeigt die hierfür verwendete Beschaltung. Es gilt der Überlagerungssatz:

$$a_1 = a_e + a_o \quad (2.5)$$

$$a_2 = a_e - a_o \quad (2.6)$$

$$b_1 = b_e + b_o \quad (2.7)$$

$$b_2 = b_e - b_o \quad (2.8)$$

Aufgrund des Abschlusses von Tor 2 mit dem Bezugswellenwiderstand Z_0 ist bekanntlich $a_2 = 0$. Daraus folgt mit Gleichung 2.6, dass a_e gleich a_o ist und a_1 doppelt so groß ist wie die Gleichtaktwelle a_e bzw. die Gegentaktwelle a_o .

$$a_2 = 0 = a_e - a_o \rightarrow a_e = a_o \quad (2.9)$$

$$a_1 = a_e + a_o \rightarrow a_1 = 2a_e = 2a_o = 2a \quad (2.10)$$

Mit diesem Wissen kann s_{11} und s_{21} aus den Verhältnissen von entsprechender rücklaufender und hinlaufender Welle berechnet werden und ein Bezug zu den Streuparametern des Gleichtaktsbetriebs und des Gegentaktsbetriebs gefunden werden.

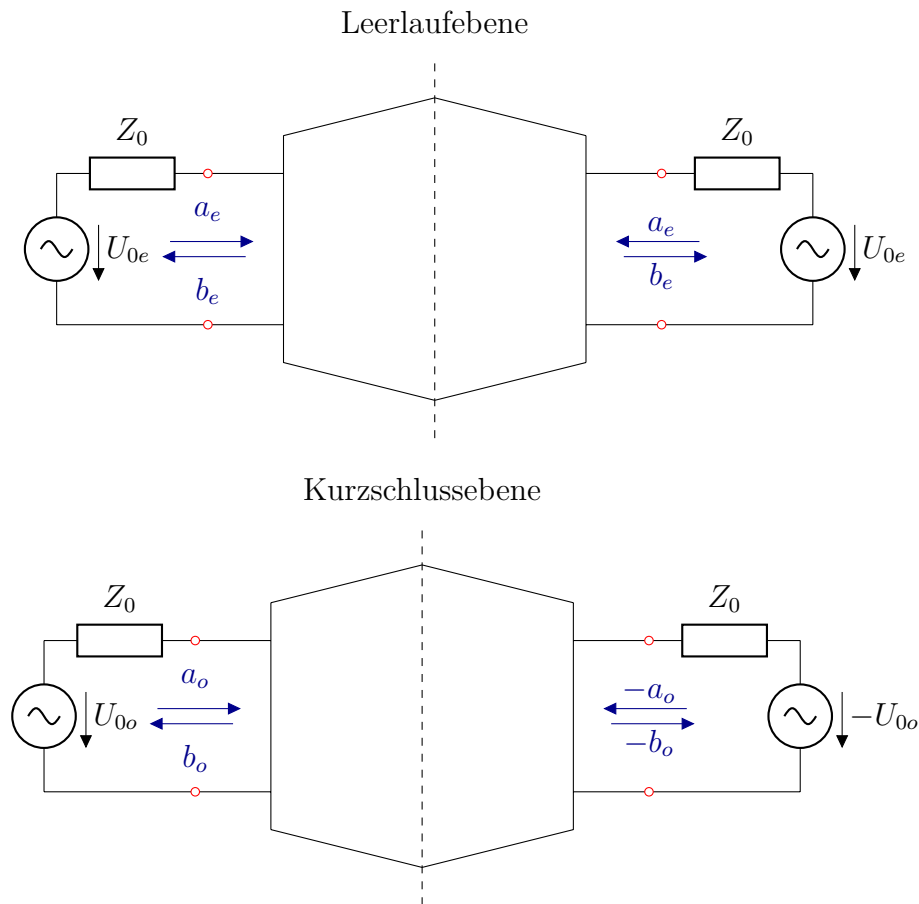


Abbildung 2.2.2: Symmetrisches Zweitor mit Wellengrößen im Gleichtaktbetrieb und Gegentaktbetrieb

$$s_{11} = \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_e + b_o}{2a} = \frac{1}{2} \left(\underbrace{\frac{b_e}{a_e}}_{s_{11e}} + \underbrace{\frac{b_o}{a_o}}_{s_{11o}} \right) = \frac{1}{2} (s_{11e} + s_{11o}) \quad (2.11)$$

$$s_{21} = \frac{b_2}{a_1} = \frac{b_e - b_o}{2a} = \frac{1}{2} \left(\underbrace{\frac{b_e}{a_e}}_{s_{11e}} - \underbrace{\frac{b_o}{a_o}}_{s_{11o}} \right) = \frac{1}{2} (s_{11e} - s_{11o}) \quad (2.12)$$

Es ist also ausreichend, s_{11e} und s_{11o} zu bestimmen, um daraus relativ einfach die komplette Streumatrix zu erhalten. Es gilt zur Erinnerung aufgrund der Symmetrie:

$$s_{11} = s_{22} \quad (2.13)$$

$$s_{21} = s_{12} \quad (2.14)$$

Natürlich kann das Verfahren auch auf symmetrische Netzwerke mit mehr als zwei Toren ausgedehnt werden. Am Beispiel des Mehrtors in Abbildung 2.2.3 wird die Vorgehensweise hierzu kurz skizziert:

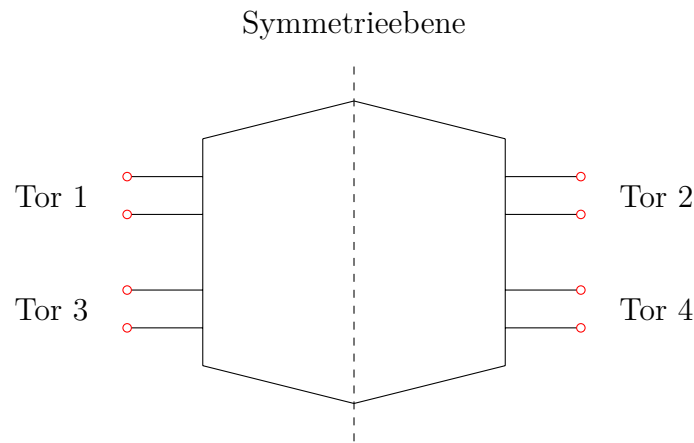


Abbildung 2.2.3: Symmetrisches Mehrtor

- **Even-Mode:**
 - Ersatzschaltbild für den Even-Mode zeichnen. Die Symmetrieebene ist eine Leerlaufebene.
 - Berechnen von s_{11e} , s_{33e} und s_{13e} , s_{31e} auf herkömmliche Weise. **Hinweis:** Falls die Schaltung reziprok ist, gilt $s_{13e} = s_{31e}$.
- **Odd-Mode:**
 - Ersatzschaltbild für den Odd-Mode zeichnen. Die Symmetrieebene ist eine Kurzschlussbene.
 - Berechnen von s_{11o} , s_{33o} und s_{13o} , s_{31o} auf herkömmliche Weise. **Hinweis:** Falls die Schaltung reziprok ist, gilt $s_{13o} = s_{31o}$.
- **Überlagerung:**
 - Die Reflexionsfaktoren der linken Tore 1 und 3 sind $s_{11} = \frac{1}{2}(s_{11e} + s_{11o})$ und $s_{33} = \frac{1}{2}(s_{33e} + s_{33o})$.
 - Die Transmissionsfaktoren zwischen den Toren 1 und 3 sind $s_{31} = \frac{1}{2}(s_{31e} + s_{31o})$ und $s_{13} = \frac{1}{2}(s_{13e} + s_{13o})$.
 - Durch Ausnutzen der Symmetrie erhält man $s_{22} = s_{11}$ und $s_{44} = s_{33}$ sowie $s_{24} = s_{13}$ und $s_{42} = s_{31}$.
 - Berechnung der Transmissionsfaktoren $s_{21} = s_{12} = \frac{1}{2}(s_{11e} - s_{11o})$ und $s_{34} = s_{43} = \frac{1}{2}(s_{33e} - s_{33o})$. **Achtung:** In diesen Fällen muss die Differenz der Streuparameter im Even- und Odd-Mode betrachtet werden. Dies liegt darin begründet, dass Tor 2 und Tor 4 im Vergleich zu Tor 1 und Tor 3 auf der anderen Seite der Symmetrieebene liegen und deshalb im Odd-Mode umgekehrt gespeist wurden.

- Berechnung der noch fehlenden Transmissionsfaktoren $s_{23} = s_{14} = \frac{1}{2}(s_{13e} - s_{13o})$ und $s_{32} = s_{41} = \frac{1}{2}(s_{31e} - s_{31o})$. Auch hier muss die Differenz betrachtet werden. Die Begründung ist identisch zum vorherigen Punkt.

Bei Anwendung des Verfahrens für ein anderes Viertor oder sogar ein noch größeres Mehrtor ist sehr genau auf die Nummerierung der Tore zu achten, da diese zumeist willkürlich und damit unterschiedlich ist.

2.3. Beispiel zum Gleich- und Gegentaktbetrieb

In Abbildung 2.3.1 ist eine symmetrische Schaltung gezeigt, die mittels der Methode von Gleichtakt- und Gegentaktbetrieb berechnet werden soll.

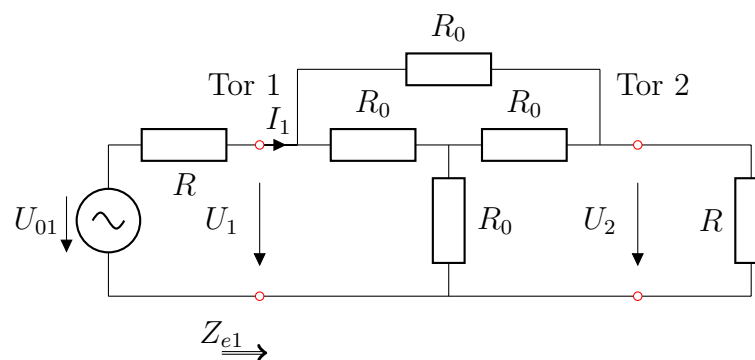


Abbildung 2.3.1: Symmetrisch aufgebautes Zweitor

Frage 2.3.1: Wie gehen Sie vor, um die Eingangsimpedanz Z_{e1} im allgemeinen Fall zu berechnen? Bestimmen Sie die Eingangsimpedanz Z_{e1} für den Fall, dass der Bezugswiderstand $R = R_0$ ist.

Lösung: Im allgemeinen Fall werden Maschengleichungen und Knotengleichung aufgestellt, die zu einem algebraischen Gleichungssystem führen, das sich analytisch nach $Z_{e1} = \frac{U_1}{I_1}$ lösen lässt. Für $R = R_0$ ist $Z_{e1} = R_0$, da hier zwei parallele Zweige mit jeweils zweimal R_0 in Serie existieren sowie einmal R_0 im Brückenweig.

Frage 2.3.2: In Abbildung 2.3.2 wurde das Zweitor in eine symmetrische Schaltung mit der Symmetrieebene A - A' umgeformt. Ist das elektrische Verhalten der umgewandelten Struktur bezüglich der Tore 1 und 2 gleich?

Lösung: Das Verhalten ist identisch. Ein Widerstand kann jeweils in zwei Serienwiderstände mit halbem Widerstandswert oder in zwei Parallelwiderstände mit jeweils doppeltem Widerstandswert umgewandelt werden.

Frage 2.3.3: Der eingangs gezeigte Betrieb wird nun durch die Überlagerung von vier Spannungsquellen nach Abbildung 2.3.3 dargestellt. Warum ist diese Betriebsart elektrisch äquivalent? Warum darf man sich den Betriebszustand aus der Überlagerung mehrerer Spannungsquellen vorstellen?

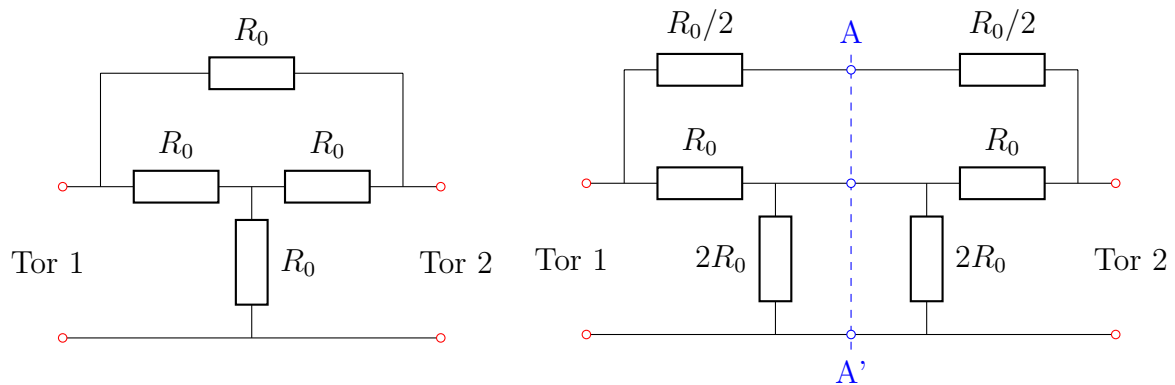


Abbildung 2.3.2: Einführung einer Symmetrieebene zur Vereinfachung

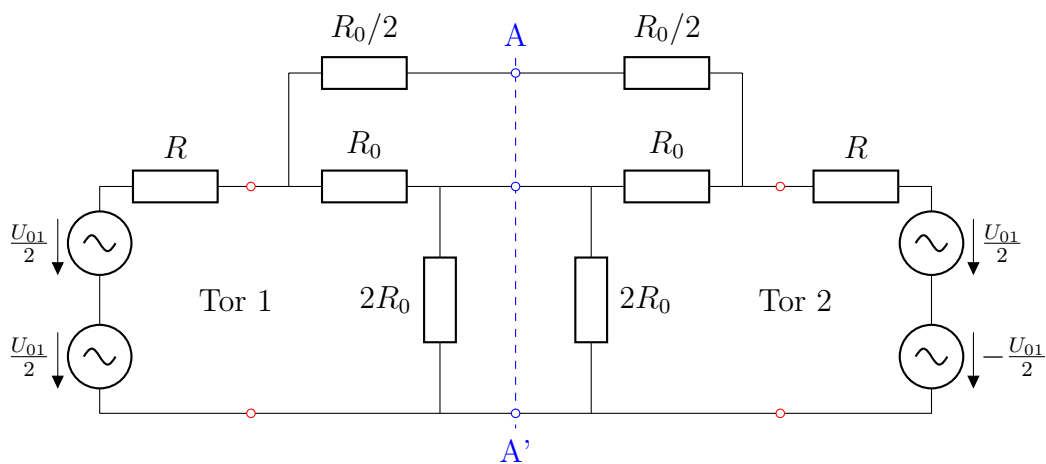


Abbildung 2.3.3: Betrieb mit vier Leerlaufspannungen

Lösung: Da es sich um ein lineares System handelt, können mehrere Betriebsarten überlagert werden.

Frage 2.3.4: Aus den vier Spannungsquellen zum Betrieb des Zweitorts werden nun die zwei gleichphasigen Spannungsquellen an Eingang und Ausgang ausgewählt. Welche Beziehungen für Spannungen und Ströme gelten im Gleichtaktbetrieb in der Symmetrieebene A - A'? Wie lässt sich das Netzwerk vereinfachen? Welche Eingangsspannung und welcher Eingangsstrom ergibt sich im Gleichtaktbetrieb?

Lösung: An beiden Toren ist die gleiche Spannung angelegt. Das Netzwerk ist spiegelsymmetrisch zur Symmetrieebene A - A'. Folglich sind in der Symmetrieebene die Ströme aus den jeweils gegenüberliegenden Zweigen gleich. Aus der Knotenregel folgt, dass die Summe dieser Ströme Null ist.

$$\begin{aligned}
 I_a &= I_{a1} - I_{a2} = 0 \\
 I_b &= I_{b1} - I_{b2} = 0 \\
 I_c &= I_{c1} - I_{c2} = 0
 \end{aligned}
 \tag{2.15}$$

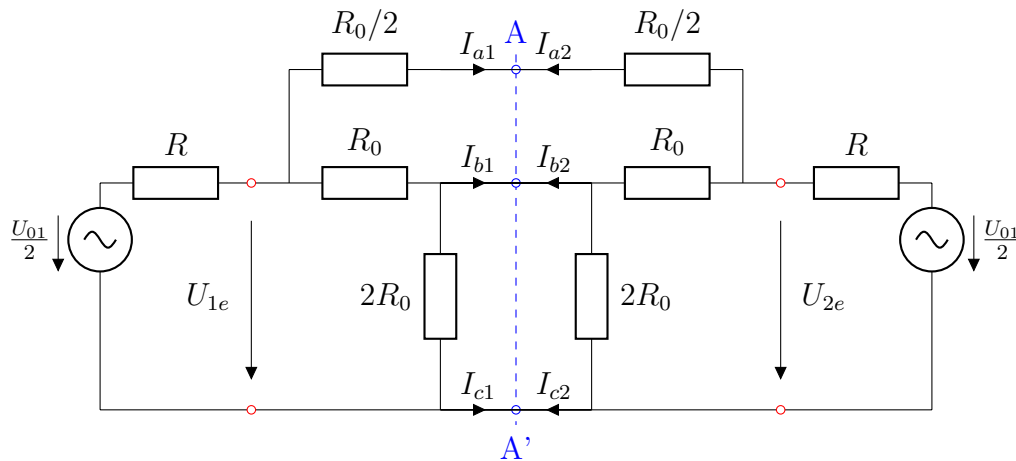


Abbildung 2.3.4: Gleichtaktbetrieb (gleichphasige Spannungen an den Toren 1 und 2)

Die Symmetrieebene im Gleichtaktbetrieb befindet sich damit im Leerlauf. Es ergibt sich das in Abbildung 2.3.5 gezeigte Ersatzschaltbild.

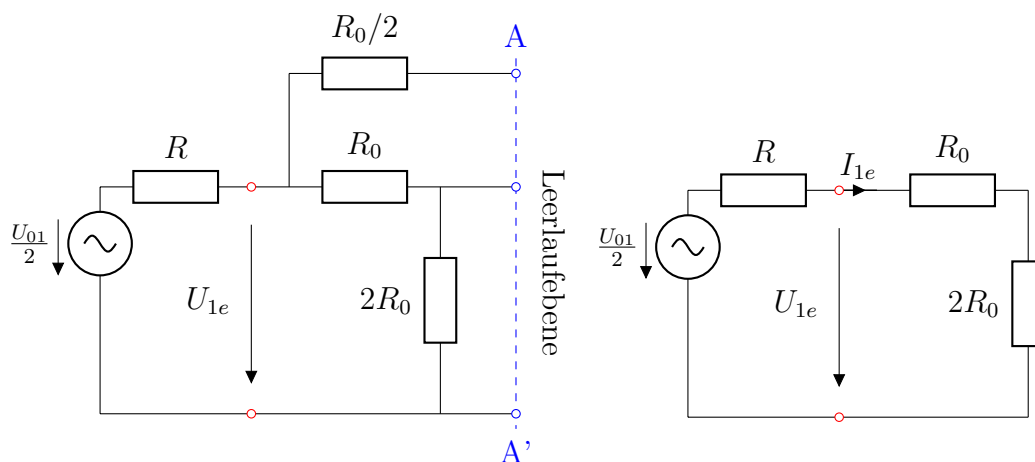


Abbildung 2.3.5: Ersatzschaltung im Gleichtaktbetrieb

Für den Strom I_{e1} im Even-Mode berechnet man zu

$$I_{1e} = \frac{1}{R + 3R_0} \cdot \frac{U_{01}}{2}. \quad (2.16)$$

Hierbei deutet der Index 1 auf das Tor 1 und der Index e auf den Even-Mode (Gleichtakt) hin.

Die Spannung U_{1e} ergibt sich zu

$$U_{1e} = \frac{3R_0}{R + 3R_0} \cdot \frac{U_{01}}{2}. \quad (2.17)$$

Frage 2.3.5: Welche Bedingungen gelten in der Symmetrieebene A - A' im Gegentakt-

betrieb? Welche Eingangsspannung und welcher Eingangsstrom ergeben sich im Gegentaktbetrieb?

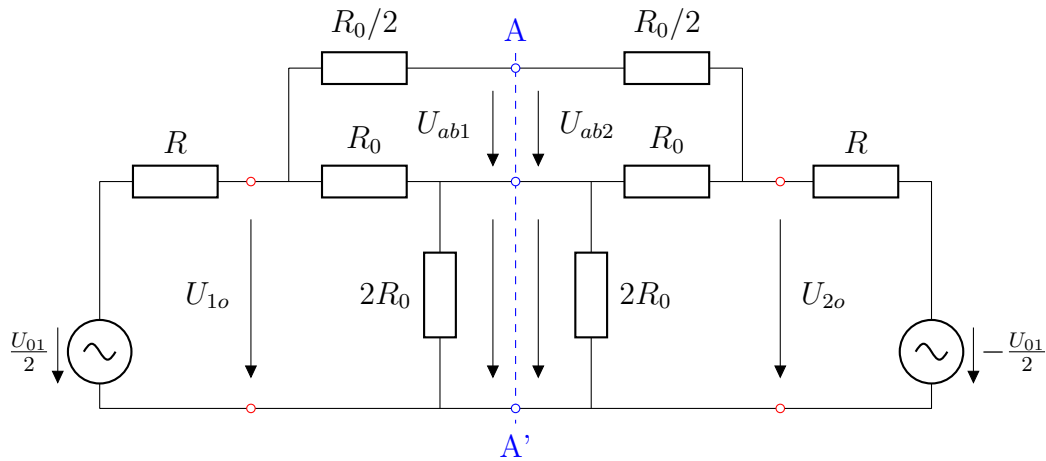


Abbildung 2.3.6: Gegentaktbetrieb

Lösung: Folgende Abbildung 2.3.6 zeigt das Netzwerk im Gegentaktbetrieb. Die Spannungsquellen an den Toren 1 und 2 haben nun umgekehrtes Vorzeichen. Da das Netzwerk symmetrisch aufgebaut ist, folgt hieraus, dass auch die Spannungen in der Symmetrieebene A - A' umgekehrtes Vorzeichen haben. Es gilt also

$$\begin{aligned} U_{1ab} &= -U_{2ab} \\ U_{1bc} &= -U_{2bc} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Somit ist die Summe der Spannungen in der Symmetrieebene gleich Null und es herrschen Kurzschlussbedingungen. Das Netzwerk lässt sich gemäß Abbildung 2.3.7 vereinfachen.

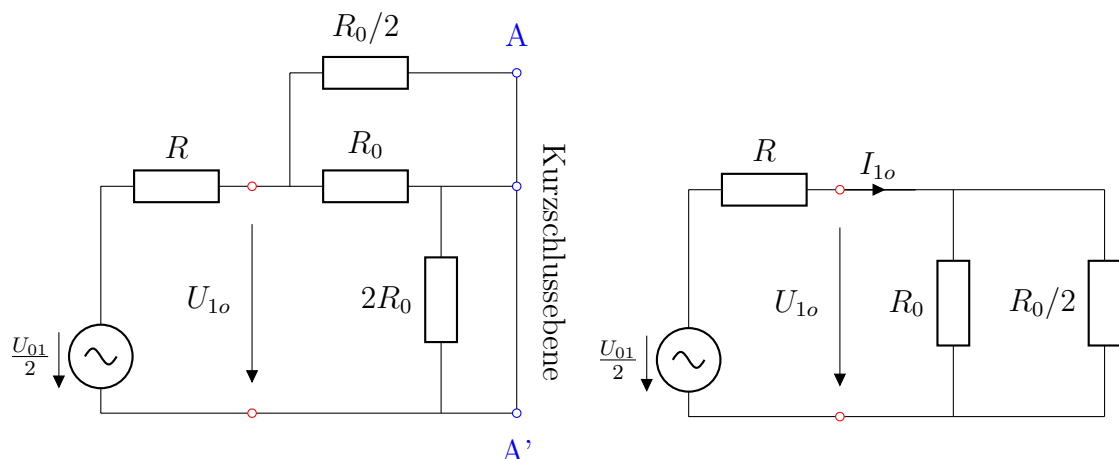


Abbildung 2.3.7: Ersatzschaltung im Gegentaktbetrieb

Für den Strom I_{1o} ergibt sich

$$I_{1o} = \frac{1}{R + R_0 || R_0/2} \cdot \frac{U_{01}}{2} = \frac{1}{R + R_0/3} \cdot \frac{U_{01}}{2} = \frac{3}{3R + R_0} \cdot \frac{U_{01}}{2}. \quad (2.19)$$

Die Spannung U_{1o} ergibt sich zu

$$U_{1o} = \frac{R_0/3}{R + R_0/3} \cdot \frac{U_{01}}{2} = \frac{R_0}{3R + R_0} \cdot \frac{U_{01}}{2}. \quad (2.20)$$

Frage 2.3.6: Welcher Eingangsstrom und welche Eingangsspannung ergibt sich insgesamt durch die Überlagerung der beiden Betriebsfälle Gleichtakt und Gegentakt? Welche Eingangsimpedanz besitzt das Netzwerk? Überprüfen Sie Ihr Ergebnis auf Plausibilität für $R = R_0$.

Lösung: Für den gesamten Eingangsstrom erhält man durch Addition

$$I_1 = I_{1e} + I_{1o} = \left(\frac{1}{R + 3R_0} + \frac{3}{3R + R_0} \right) \cdot \frac{U_{01}}{2}. \quad (2.21)$$

Die Eingangsspannung ergibt sich ebenfalls durch Addition:

$$U_1 = U_{1e} + U_{1o} = \left(\frac{3R_0}{R + 3R_0} + \frac{R_0}{3R + R_0} \right) \cdot \frac{U_{01}}{2} \quad (2.22)$$

Die Eingangsimpedanz erhält man aus dem Verhältnis von Spannung und Strom.

$$Z_{e1} = \frac{U_1}{I_1} = R_0 \frac{5R + 3R_0}{3R + 5R_0} \quad (2.23)$$

Überprüfung der Plausibilität: Für $R = R_0$ ist die Eingangsimpedanz $Z_{e1} = R_0$.

2.4. Beispiel: Wilkinson-Leistungsteiler

Abbildung 2.4.1 zeigt den Aufbau eines Wilkinson-Teilers. Der Wilkinson-Teiler besteht aus jeweils einer Viertelwellenleitung zwischen Tor 1 und Tor 2 sowie zwischen Tor 1 und Tor 3. Zwischen den Toren 2 und 3 befindet sich ein Widerstand mit Wert $R = 2Z_0$ als diskretes Bauelement. Alle Tore besitzen die Bezugsimpedanz Z_0 . Die beiden Viertelwellenleitungen haben den Wellenwiderstand $Z_L = \sqrt{2}Z_0$.

Frage 2.4.1 Erläutern Sie qualitativ das Funktionsprinzip des Leistungsteilers. Welche Streumatrix würden Sie erwarten?

Lösung: Bei Einspeisung an Tor 1 sollte sich das Signal wegen des symmetrischen Aufbaus zu gleichen Teilen auf die Tore 2 und 3 aufteilen. Der Widerstand $R = 2Z_0$ zwischen Tor 2 und Tor 3 sollte in diesem Fall keine Rolle spielen. Die Eingangsimpedanz pro Zweig ergibt sich aus der Viertelwellentransformation zu $\frac{(\sqrt{2}Z_0)^2}{Z_0} = 2Z_0$. Insgesamt ist der Eingangswiderstand an Tor 1 $Z_{e1} = Z_0$. Damit verschwindet der Reflexionsfaktor an Tor 1.

$$s_{11} = 0. \quad (2.24)$$

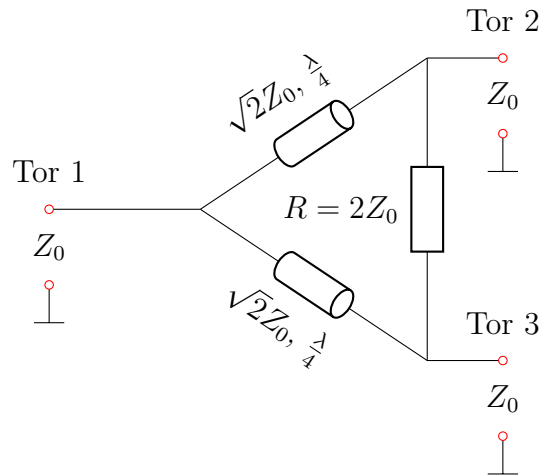


Abbildung 2.4.1: Wilkinson-Teiler

Da der Widerstand $R = 2Z_0$ zwischen Tor 2 und Tor 3 bei Einspeisung an Tor 1 keine Auswirkung besitzt, ist die Übertragung verlustfrei. Für die Vorwärtstransmission in beiden Zweigen sollte sich aus der Leistungsbilanz

$$|s_{21}| = |s_{31}| = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (2.25)$$

ergeben. In diesem Fall teilt sich die Leistung (Quadrat der Transmissionsfaktoren) jeweils zur Hälfte zwischen den beiden Zweigen auf. Jeder Viertelwellentransformator verursacht eine Phasenverschiebung von -90° zwischen Tor 2 bzw. Tor 3 und Tor 1.

$$s_{21} = s_{31} = \frac{-j}{\sqrt{2}} \quad (2.26)$$

Bei Einspeisung an Tor 2 bzw. Tor 3 zur Ermittlung von s_{22} und s_{32} bzw. s_{33} und s_{23} fällt die qualitative Betrachtung wegen des konzentrierten Widerstandes zwischen den beiden Toren 2 und 3 etwas schwerer. Aus Symmetriegründen ist klar, dass

$$\begin{aligned} s_{22} &= s_{33} \\ s_{32} &= s_{23} \end{aligned} \quad (2.27)$$

gelten muss. Wünschenswert wären reflexionsfreie Einspeisungen an den Toren 2 und 3 sowie eine Entkopplung vom jeweils anderen Tor, d.h. alle verbleibenden Streuparameter sollten den Wert Null besitzen.

Frage 2.4.2 Verwenden Sie die Methode des Gleichtakt- und Gegentaktbetriebs zur Berechnung der Streumatrix des Wilkinson-Leistungsteilers.

Lösung: Der Reflexionsfaktor s_{11} des Teilers ist bereits aus der vorangegangenen Fragestellung klar. Da der Rückwärtsbetrieb jedoch schwerer zu durchschauen ist, wird dieser aus der Überlagerung des Gleichtaktbetriebs und des Gegentaktbetriebs berechnet.

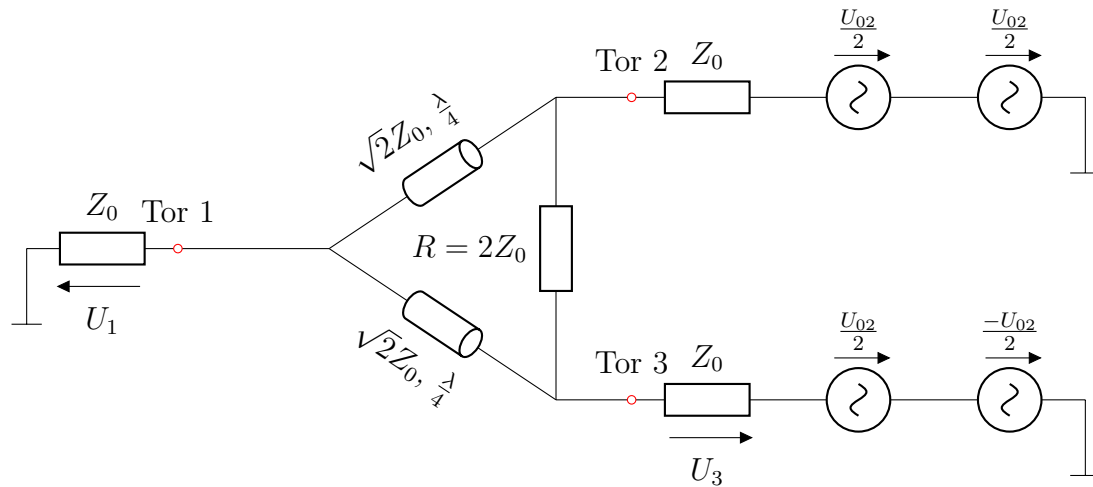


Abbildung 2.4.2: Wilkinson-Teiler mit Einspeisung an Tor 2

Abbildung 2.4.2 zeigt die Beschaltung zur Ermittlung der Streuparameter bei Einspeisung an Tor 2. Hierbei sind bereits die beiden Betriebsarten Gleichtakt und Gegentakt bei der Speisung berücksichtigt. Die in Abbildung 2.4.2 dargestellten Spannungsquellen addieren sich an Tor 2 exakt zur eigentlichen Leerlaufspannung U_{02} . Die beiden Spannungsquellen an Tor 3 löschen sich hingegen aus. In der Gesamtbetrachtung wird also lediglich an Tor 2 eingespeist.

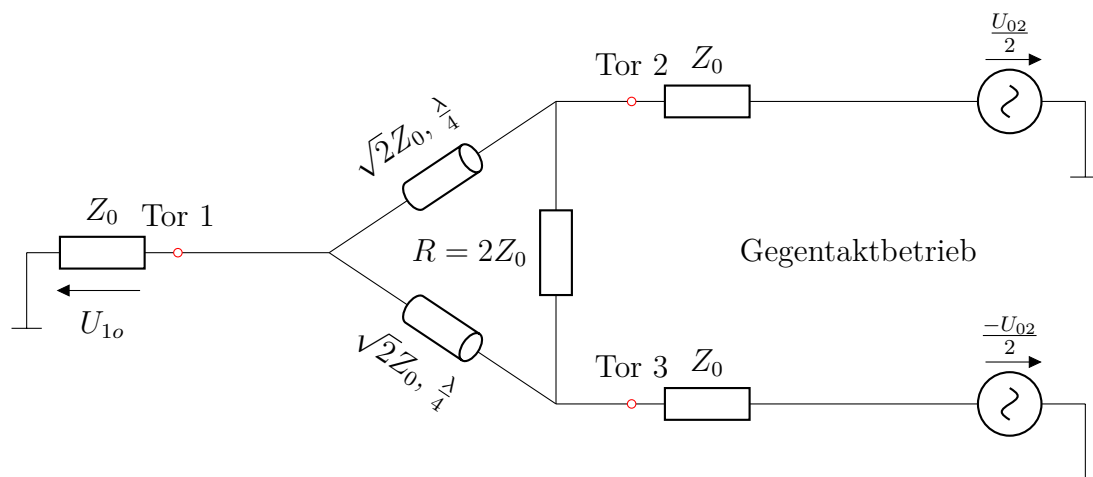


Abbildung 2.4.3: Gegentaktbetrieb

Die Abbildung 2.4.3 zeigt ausschließlich den Gegentaktbetrieb. Die Symmetrieebene der Schaltung ist in diesem Betriebsfall bekanntermaßen eine Kurzschlussebene. In dieser befinden sich das Tor 1 sowie die Mitte des konzentrierten Widerstandes R .

Am kurzgeschlossenen Tor 1 ist jeweils eine Viertelwellenleitung angeschlossen. Diese transformiert den Kurzschluss zum anderen Ende hin in einen Leerlauf. Es verbleiben somit zwei einfache Spannungsteiler an den Toren 2 und 3, welche in Abbildung 2.4.4 dargestellt sind.

Aus den Spannungsteilern ist ersichtlich, dass der Eingangswiderstand an Tor 2 im Odd-

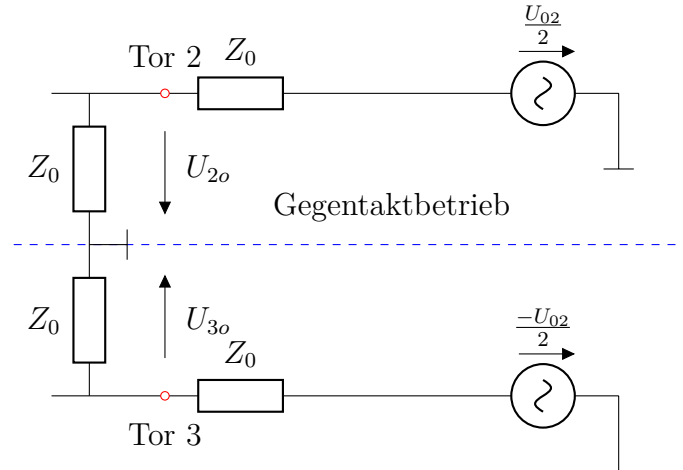


Abbildung 2.4.4: Verbleibende Schaltung im Gegentaktbetrieb

Mode exakt dem Innenwiderstand Z_0 der Quelle bzw. dem Bezugswiderstand entspricht. Das Tor ist im Odd-Mode deshalb angepasst.

$$s_{22o} = \frac{Z_0 - Z_0}{Z_0 + Z_0} = 0 \quad (2.28)$$

Der Transmissionsfaktor s_{12o} im Odd-Mode lässt sich ebenfalls sehr leicht bestimmen, da Tor 1 in der Kurzschlusssebene liegt und deshalb $U_{1o} = 0$ und damit auch $s_{12o} = 0$ gelten muss.

$$s_{12o} = \frac{2U_{1o}}{U_{02o}} \cdot \sqrt{\frac{Z_0}{Z_0}} = 0 \quad (2.29)$$

Für die Gleichtaktbeschaltung gilt die gleiche Symmetrieebene. Sie stellt jedoch eine Leerlaufebene dar. Abbildung 2.4.6 zeigt die Ersatzschaltung des Even-Mode, wobei die Schaltung an Tor 1 symmetrisch aufgesplittet wurde.

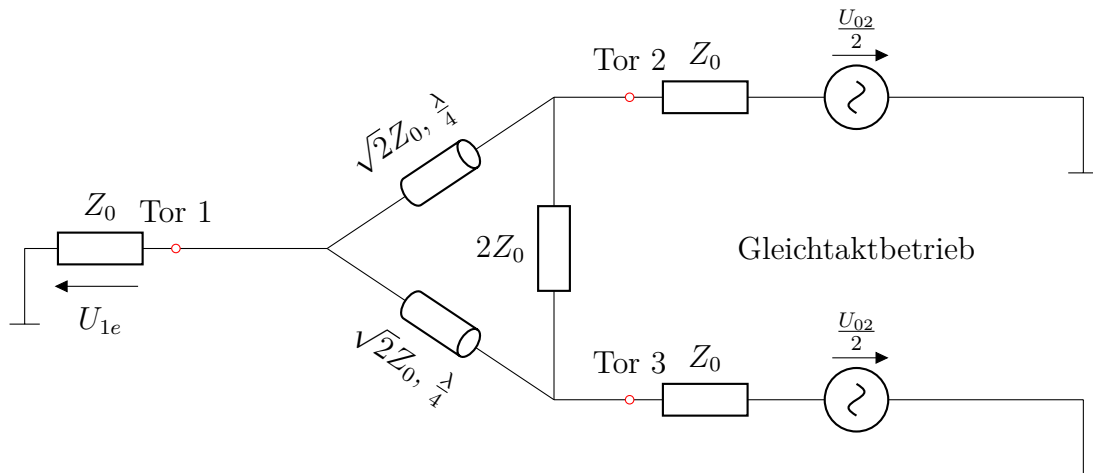


Abbildung 2.4.5: Gleichtaktbetrieb

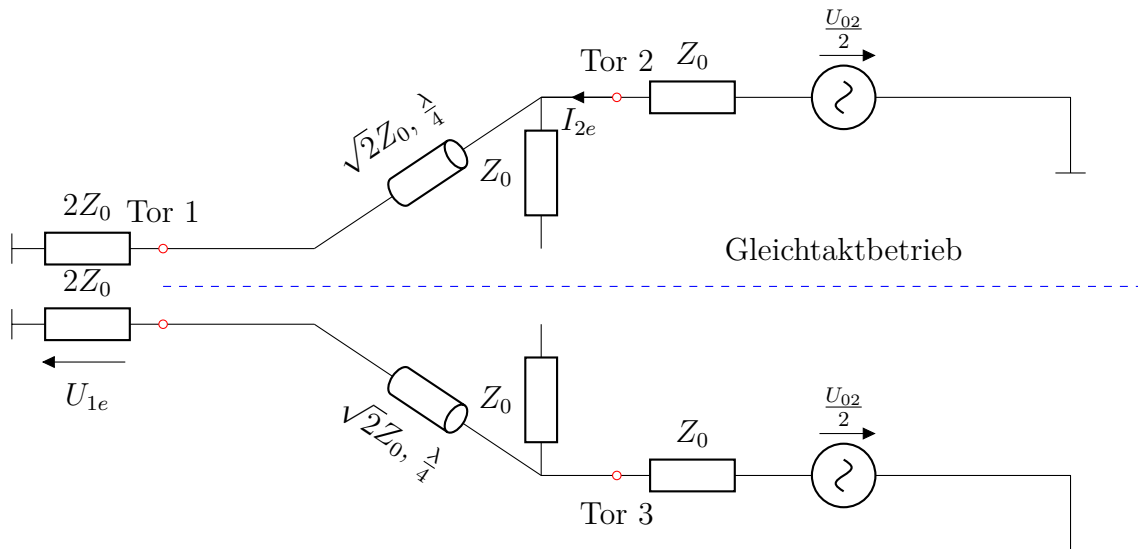


Abbildung 2.4.6: Symmetrieebene im Gleichtaktbetrieb

Der konzentrierte Querwiderstand $R = 2Z_0$ ist im Gleichtaktbetrieb ohne Belang. Die Beschaltung an Tor 1 wurde für die beiden Zweige dupliziert. Die beiden parallelgeschalteten Impedanzen $2Z_0$ des Tors 1 ergeben natürlich wieder die ursprüngliche Bezugsimpedanz Z_0 .

Von Tor 1 nach Tor 2 bzw. Tor 3 transformieren die beiden Viertelwellenleitungen die jeweilige Zweigimpedanz $2Z_0$ an Tor 1 in die Impedanz Z_0 . Es verbleibt die in Abbildung 2.4.7 gezeigte Ersatzschaltung.

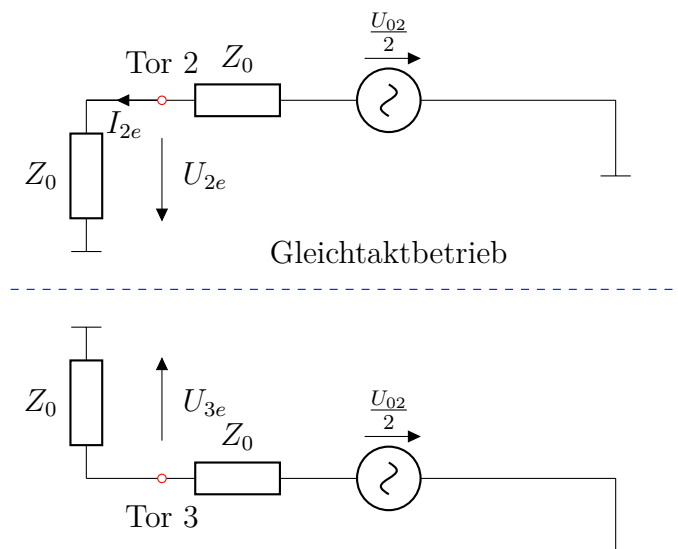


Abbildung 2.4.7: Verbleibende Schaltung im Gleichtaktbetrieb

Aus den Spannungsteilern ist ersichtlich, dass der Eingangswiderstand an Tor 2 im Even-Mode ebenfalls exakt dem Innenwiderstand Z_0 der Quelle bzw. dem Bezugswiderstand entspricht. Das Tor ist im Even-Mode angepasst.

$$s_{22e} = \frac{Z_0 - Z_0}{Z_0 + Z_0} = 0 \quad (2.30)$$

Der Transmissionsfaktor s_{12e} im Even-Mode lässt über U_{1e} bestimmen. Die Zusammenhänge sind aus Abbildung 2.4.6 und Abbildung 2.4.7 ersichtlich. Der Eingangsstrom I_{2e} an Tor 2 im Even-Mode errechnet sich zu $I_{2e} = \frac{U_{02e}}{2Z_0}$. Hieraus kann die Spannung U_{1e} auf der anderen Seite der Viertelwellenleitung bestimmt werden.

$$U_{1e} = j\sqrt{2}Z_0(-I_{2e}) = -j\frac{U_{02e}}{\sqrt{2}} \quad (2.31)$$

Damit lässt sich der gewünschte Transmissionsfaktor finden.

$$s_{12e} = \frac{2U_{1e}}{U_{02e}} \cdot \sqrt{\frac{Z_0}{Z_0}} = -j\sqrt{2} \quad (2.32)$$

Durch Überlagerung von Even-Mode und Odd-Mode erhält man die tatsächlichen Streuparameter.

$$s_{22} = \frac{1}{2}(s_{22e} + s_{22o}) = \frac{1}{2}(0 + 0) = 0 \quad (2.33)$$

$$s_{12} = \frac{1}{2}(s_{12e} + s_{12o}) = \frac{1}{2}(-j\sqrt{2} + 0) = \frac{-j}{\sqrt{2}} \quad (2.34)$$

Der Streuparameter s_{32} beschreibt einen Signalweg, der durch die Symmetrieebene stößt. Es muss deshalb die Differenz der Streuparameter im Even und Odd-Mode verwendet werden. In diesem Beispiel ist es jedoch unerheblich, da sowohl s_{22e} als auch s_{22o} gleich Null sind.

$$s_{32} = \frac{1}{2}(s_{22e} - s_{22o}) = \frac{1}{2}(0 - 0) = 0 \quad (2.35)$$

Bei Einspeisung an Tor 3 würde sich die Schaltung aus Symmetriegründen genau so verhalten. Es gelten also

$$\begin{aligned} s_{13} &= s_{12} = \frac{-j}{\sqrt{2}} \\ s_{33} &= s_{22} = 0 \\ s_{23} &= s_{32} = 0 \end{aligned} \quad (2.36)$$

Da die Schaltung aus rein passiven, richtungsunabhängigen Elementen besteht, ist die Schaltung reziprok. Es gilt somit

$$\begin{aligned} s_{21} &= s_{12} = \frac{-j}{\sqrt{2}} \\ s_{31} &= s_{13} = \frac{-j}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Insgesamt erhält man also die Streumatrix

$$[S_{Wilkinson}] = \begin{bmatrix} 0 & -j/\sqrt{2} & -j/\sqrt{2} \\ -j/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ -j/\sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.38)$$

Frage 2.4.4 Wie lautet die Leistungsbilanz des Wilkinson-Teilers bei Einspeisung an den Toren 1, 2 oder 3? In welcher Betriebsart ist der Teiler verlustfrei? Welche Tore sind voneinander entkoppelt? Welche Phasenbeziehungen ergeben sich für die Spannungen an den Toren? Analysieren Sie hierzu die Streumatrix.

Lösung: Bei Einspeisung an Tor 1 wird die Hälfte der Leistung an Tor 2 transmittiert, die andere Hälfte an Tor 3. Es wird keine Leistung an Tor 1 reflektiert und es geht keine Leistung verloren, d.h. der Teiler ist in diesem Fall verlustfrei. Die Phase zwischen der Spannung an Tor 1 und den Spannungen an Tor 2 bzw. Tor 3 beträgt -90° .

Bei Einspeisung an Tor 2 oder 3 wird die Hälfte der Leistung an Tor 1 transmittiert, die andere Hälfte geht im Querwiderstand verloren. Es treten auch an diesen Toren keine Reflexionen auf. Die Phase der Spannungen von Tor 2 und Tor 3 relativ zur Spannung an Tor 1 beträgt -90° .

Werden an Tor 2 und Tor 2 identische Signale eingespeist, so ist der Teiler ebenfalls verlustfrei.

Die Tore 2 und 3 sind voneinander entkoppelt, da $s_{23} = s_{32} = 0$.

3. Spezielle Netzwerke

3.1. Zirkulator

Ein Zirkulator ist ein nicht reziprokes Bauteil, das ein eingespeistes Signal jeweils an das folgende Tor weitergibt. Die Drehrichtung ist durch einen Pfeil im Schaltbild nach Abbildung 3.1.1 gekennzeichnet.

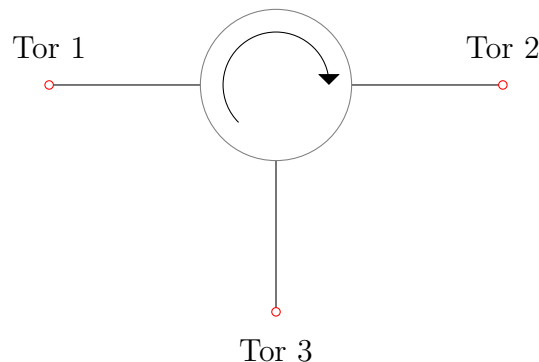


Abbildung 3.1.1: Zirkulator

Die Streumatrix eines idealen Zirkulators lautet

$$[S_{Zirkulator}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

Der ideale Zirkulator ist reflexionsfrei und verlustfrei. Er kann als Dreitor deshalb nicht reziprok sein.

Ein Zirkulator wird beispielsweise eingesetzt, falls eine Antenne an einen Sender und einen Empfänger angeschlossen werden soll. Schließt man den Sender an Tor 1 des Zirkulators an, so folgt an Tor 2 die Antenne, an die die Leistung des Senders weitergereicht wird. Im Empfangsfall speist die Antenne Leistung in Tor 2 ein, die an Tor 3 weitergegeben wird, woran folglich der Empfänger angeschlossen werden muss.

3.2. Leistungsteiler

3.2.1. Resistive Teiler

Resistive Teiler stellen eine Anpassung der Tore über Widerstände her. Sie sind verlustbehaftet, besitzen jedoch den entscheidenden Vorteil, dass sie sehr breitbandig sind, da die Widerstände theoretisch nicht von der Frequenz abhängen.

Die Abbildung 3.2.1 zeigt den einfachsten resistiven Teiler. Die beiden Serienwiderstände in den Zweigen zu den Toren 2 bzw. 3 erhöhen den Widerstand, der vom Verzweigungspunkt aus in Richtung Tor 2 bzw. 3 sichtbar ist, auf $2 R_0$. Durch die Parallelschaltung der beiden Zweige halbiert sich der Widerstand jedoch wieder. An Tor 1 ist somit der Bezugswiderstand R_0 sichtbar, sodass der Teiler an Tor 1 reflexionsfrei ist. Die Tore 2 und

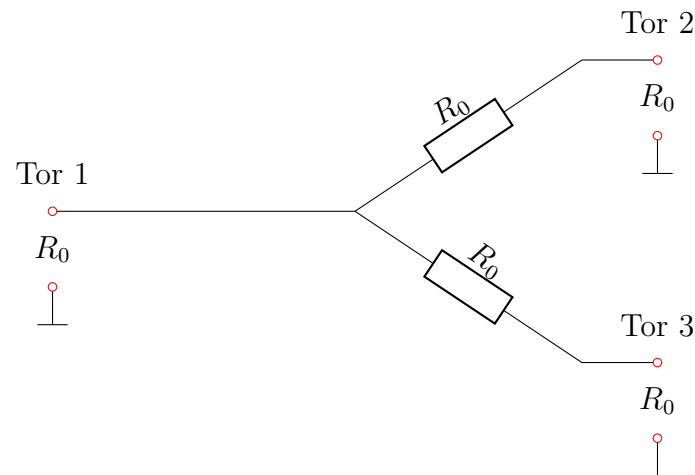


Abbildung 3.2.1: Resistiver Signalteiler

3 sind jedoch nicht reflexionsfrei. Die gesamte Streumatrix des Teilers ist in Gleichung 3.2 gegeben.

$$[S] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Der Teiler kann sinnvoll eingesetzt werden, falls ausschließlich an Tor 1 eingespeist wird. Bei Einspeisung an Tor 2 oder Tor 3 treten Reflexionen auf. Außerdem wird die Leistung nicht zu gleichen Teilen auf die weiteren Tore übertragen.

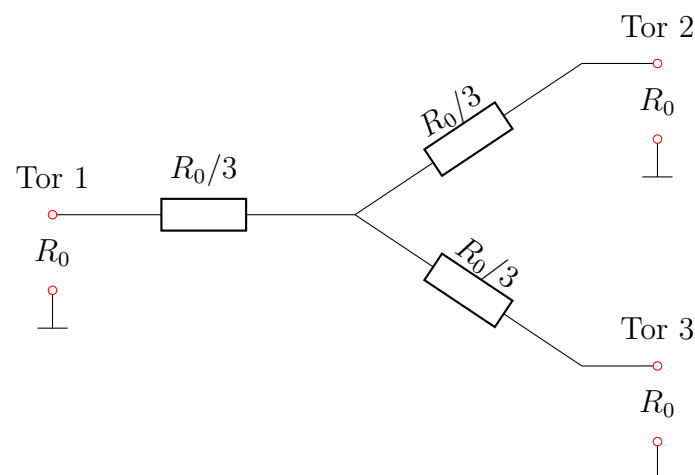


Abbildung 3.2.2: Resistiver Signalteiler

Ein verbesserter und symmetrischer Teiler ist in Abbildung 3.2.2 gegeben. Durch den symmetrischen Aufbau mit drei Serienwiderständen kann eine Anpassung an allen Toren erreicht werden. Die Streumatrix des Teiler ist in Gleichung 3.3 gegeben.

$$[S] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Dieser symmetrische resistive Teiler wird sehr häufig für breitbandige Anwendungen verwendet.

3.2.2. Reaktive Teiler

Reaktive Teiler führen die notwendigen Impedanztransformationen mittels RC-Gliedern aus. Die Bezugswiderstände R_0 an den Toren 2 und 3 werden durch die Reaktanzen so transformiert, dass an Tor 1 wiederum der Bezugswiderstand sichtbar ist. Tor 1 ist damit reflexionsfrei. Wie im Falle des einfachen resistiven Teilers sind die Tore 2 und 3 nicht reflexionsfrei.

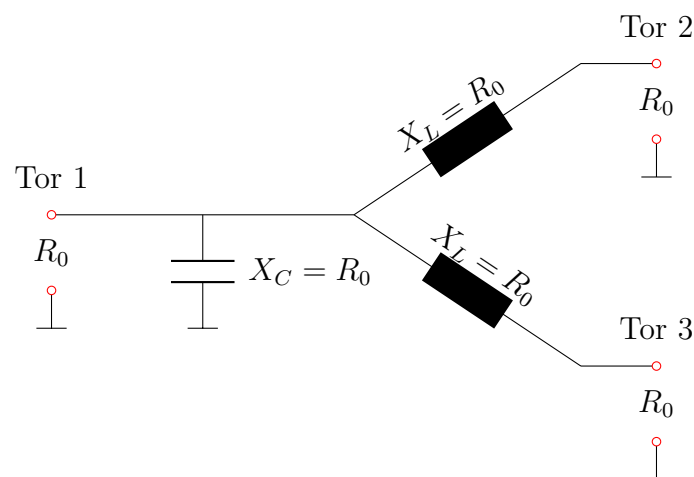


Abbildung 3.2.3: Reaktiver Signalteiler

In Gleichung 3.4 ist die Streumatrix des reaktiven Teilers gezeigt.

$$[S] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2}e^{-j45^\circ} & \sqrt{2}e^{-j45^\circ} \\ \sqrt{2}e^{-j45^\circ} & j & -j \\ \sqrt{2}e^{-j45^\circ} & -j & j \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Im Vergleich zum resistiven Teiler ist der reaktive Teiler verlustfrei, besitzt jedoch eine eingeschränkte Bandbreite, da die Reaktanzen von der Frequenz abhängig sind. Außerdem besitzen die Tore 2 und 3 eine Phasenverschiebung von -45° gegenüber dem Tor 1.

Der resistive Teiler kann auch asymmetrisch aufgebaut werden, wie in Abbildung 3.2.4 dargestellt. Die Beträge der Streumatrix nach Gleichung 3.5 sind identisch zum vorherigen reaktiven Teiler. Die Phase des Ausgangssignals an Tor 3 ist nun jedoch $+45^\circ$ gegenüber dem Eingangssignal an Tor 1. Die Ausgangssignale an den Toren 2 und 3 besitzen eine Phasenverschiebung von 90° gegeneinander.

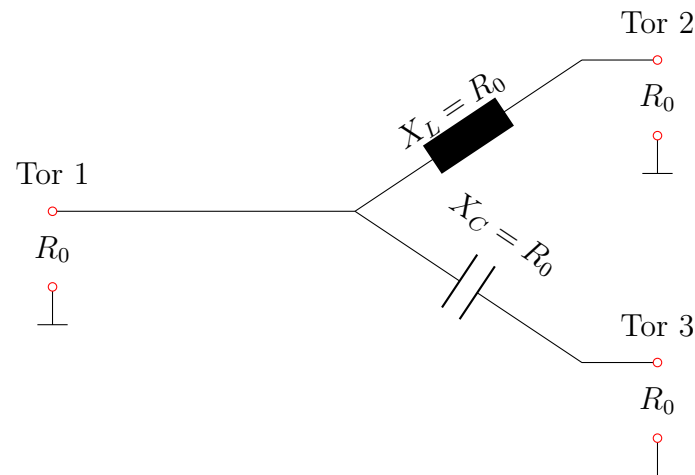


Abbildung 3.2.4: Reaktiver Signalteiler

$$[S] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2}e^{-j45^\circ} & \sqrt{2}e^{+j45^\circ} \\ \sqrt{2}e^{-j45^\circ} & j & 1 \\ \sqrt{2}e^{+j45^\circ} & 1 & -j \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Beide reaktiven Teiler besitzen jedoch den Nachteil, dass die Tore 2 und 3 nicht reflexionsfrei sind. Da bekanntlich ein Dreitor, das reziprok und verlustfrei ist, nicht vollständig reflexionsfrei sein kann, gibt es hier keine symmetrische und reflexionsfreie Form wie beim resistiven Teiler.

3.2.3. Teiler mit Viertelwellenleitungen

Am häufigsten werden Viertelwellenleitungen zur Impedanztransformation in Teilern eingesetzt, da diese sehr kostengünstig sind und keine konzentrierten Bauelemente benötigt werden.

Der Teiler mit Viertelwellenleitungen ist in Abbildung 3.2.5 dargestellt. Er ist ebenfalls verlustfrei. Die Beträge der Streuelemente in Gleichung 3.6 sind identisch zu den Beträgen der Streuelemente des reaktiven Teilers. Die Phasendrehung von Tor 1 zu Tor 2 bzw. Tor 3 beträgt aufgrund der Viertelwellenleitung jedoch -90° .

$$[S] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -j\sqrt{2} & -j\sqrt{2} \\ -j\sqrt{2} & 1 & -1 \\ -j\sqrt{2} & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

3.2.4. Wilkinson-Teiler

Der Wilkinson-Teiler nach Abbildung 3.2.6 besitzt im Unterschied zum einfachen Teiler mit Viertelwellentransformatoren zusätzlich einen Querwiderstand $R = 2 R_0$ zwischen Tor 2 und Tor 3. Damit kann Anpassung an den Toren 2 und 3 erreicht werden. Außerdem geht aus der Streumatrix des Wilkinson-Teilers nach Gleichung 3.7 hervor, dass die Tore 2 und 3 vollständig entkoppelt sind.

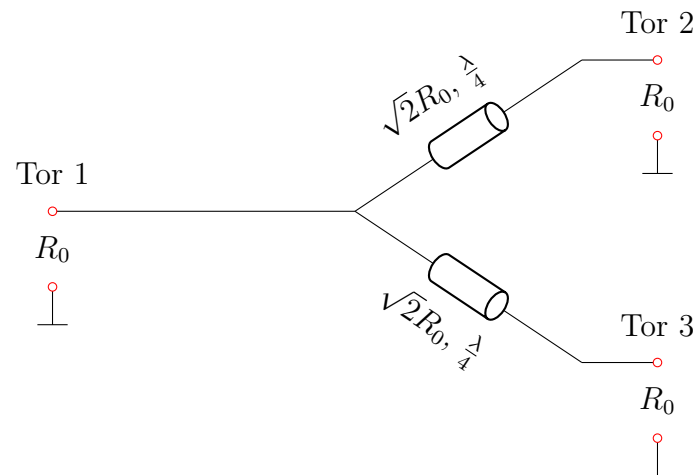


Abbildung 3.2.5: Signalteiler mit Viertelwellen-Transformatoren

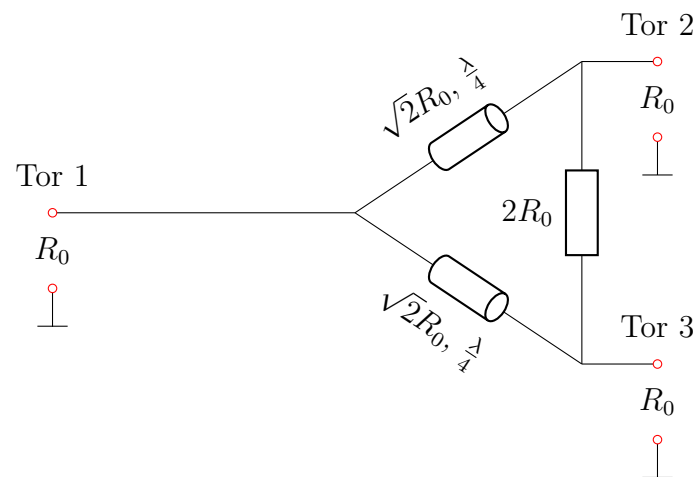


Abbildung 3.2.6: Wilkinson-Teiler

$$[S_{Wilkinson}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -j\sqrt{2} & -j\sqrt{2} \\ -j\sqrt{2} & 0 & 0 \\ -j\sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Der Wilkinson-Teiler kann deshalb auch als Signalkombinierer eingesetzt werden, d.h. es werden Signale, die an Tor 2 und 3 einlaufen, ausschließlich zum Tor 1 transmittiert. Der Wilkinson-Teiler ist in diesem Betriebsfall jedoch nicht verlustfrei.

Verlustfreiheit wird jedoch erreicht, falls an Tor 2 und Tor 3 identische Signale einlaufen. In diesem Fall fällt am Querwiderstand keine Spannung ab. Falls jedoch gegenphasige Signale an Tor 2 und Tor 3 einlaufen, so wird die gesamte Leistung im Querwiderstand in Wärme umgewandelt. Zusammenfassend kann gesagt werden, dass die Gleichkomponente der einlaufenden Wellen an den Toren 2 und 3 an Tor 1 weitergeleitet wird, die gegenphasige Komponente der einlaufenden Wellen wird vernichtet.

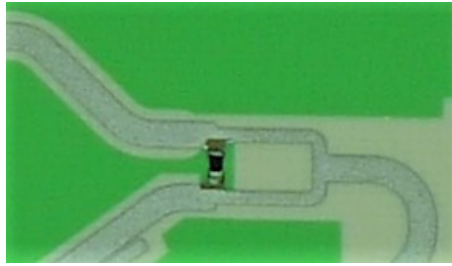


Abbildung 3.2.7: Beispiel eines Wilkinson-Teilers

3.3. Koppler

3.3.1. Branchline-Koppler

Der sogenannte Branchline-Koppler besteht aus vier Viertelwellenleitungen. Zwei Leitungen besitzen den Wellenwiderstand Z_0 , die beiden Querleitungen den Wellenwiderstand $\frac{Z_0}{\sqrt{2}}$. Der Bezugswiderstand aller Tore ist Z_0 .

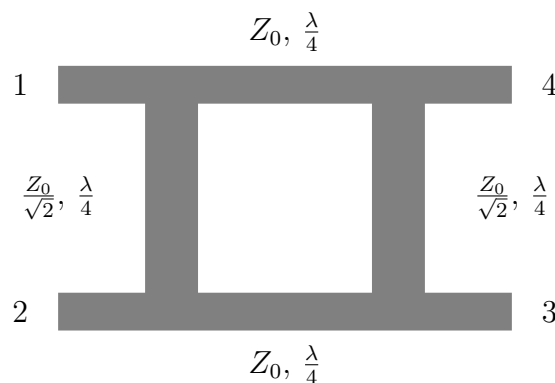


Abbildung 3.3.1: Branchline-Koppler

Das Verhalten des Kopplers, das durch die Streumatrix $[S_{Branchline}]$ beschrieben ist, gilt nur für die Frequenz, für die der Koppler ausgelegt wurde und für die die Leitungen die Länge einer Viertelwelle besitzen.

$$[S_{Branchline}] = \frac{-1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & j & 1 & 0 \\ j & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & j \\ 0 & 1 & j & 0 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Der Branchline-Koppler kann als Signalteiler eingesetzt werden. Wird beispielsweise an Tor 1 eingespeist, so wird jeweils die Hälfte der Leistung an Tor 2 und Tor 3 transmittiert. Tor 4 ist von Tor 1 vollständig entkoppelt. Die Phasendifferenz der austretenden Wellen an den Toren 2 und 3 besitzen gegeneinander eine Phasenverschiebung von 90° , weshalb der Branchline-Koppler oft als 90° -Koppler bezeichnet wird.

Der Branchline-Koppler kann jedoch auch als Signal-Combiner eingesetzt werden. Hierzu kann beispielsweise an den entkoppelten Toren 1 und 4 eingespeist werden. An den

Tore 2 und 3 erhält man dann kombinierte Signale.

3.3.2. Rat-Race-Koppler

In Abbildung 4.5.20 ist ein Rat-Race-Koppler in Microstreifenleitungstechnik gezeigt. Er besteht aus 3 Viertelwellenleitungen und einer Leitung der Länge $\frac{3\lambda}{4}$. Alle Leitungen des Rings besitzen den Wellenwiderstand $\sqrt{2} Z_0$. Der Bezugswiderstand aller Tore ist Z_0 .

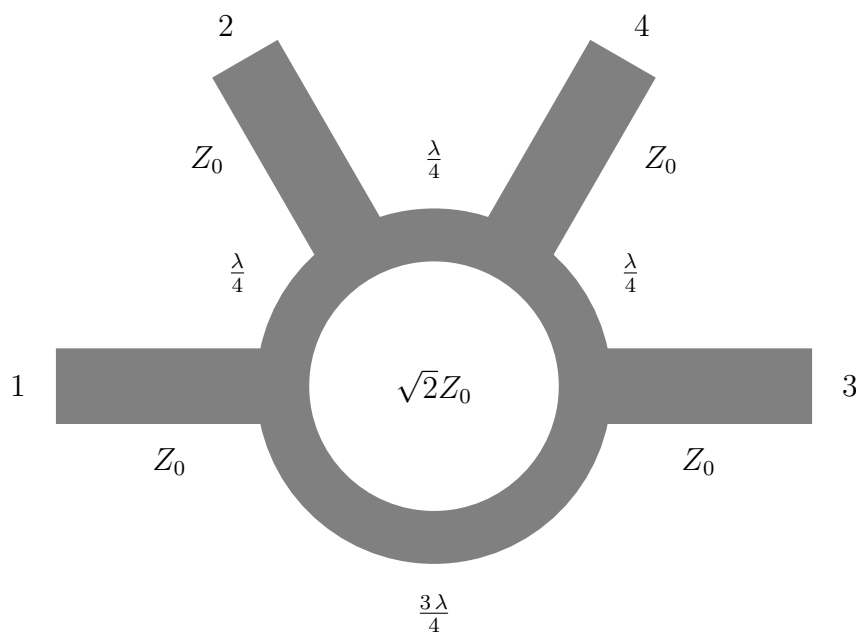


Abbildung 3.3.2: Rat-Race-Koppler



Abbildung 3.3.3: Beispiel eines Rat-Race Kopplers

Die Wirkung des Rat-Race-Kopplers ist sehr ähnlich zum Branchline-Koppler. Auch hier sind die Tore 1 und 4 sowie 2 und 3 gegeneinander entkoppelt.

$$[S_{Ratrace}] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & -j & j & 0 \\ -j & 0 & 0 & -j \\ j & 0 & 0 & -j \\ 0 & -j & -j & 0 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Verwendet man den Rat-Race-Koppler als Signalteiler, so sind die beiden Ausgangswellen nicht wie beim Branchline-Koppler um 90° , sondern um 180° gegeneinander Phasenverschoben. Der Rat-Race-Koppler wird deshalb auch 180° -Koppler genannt.

Die Phasenverschiebung von 180° ist auch zu beachten, falls Signale kombiniert werden sollen.

3.4. Filter

Filter können mittels konzentrierter Bauelemente L_n und C_n aufgebaut werden. Ein einfacher Tiefpass besteht z.B. aus einer Parallelkapazität und einer Serieninduktivität. Allerdings ist es wünschenswert die Filter bzw. die konzentrieren Bauelemente einfacher und kostengünstiger über Leitungselemente zu realisieren. Ein Ansatz hierfür ist das sogenannte Stepped-Impedance-Filter oder auch High-Z Low-Z Filter. Wie der Name schon andeutet, wird das Filter aus Leitungsstücken verschiedener Wellenwiderstände aufgebaut.

Zur Herleitung einer solchen Filterstruktur geht man zunächst von einem Leitungstück mit Wellenimpedanz Z_L aus. Diese besitzt die Kettenmatrix $[A]$ nach folgender Formel.

$$[A] = \begin{bmatrix} \cos(\beta l) & j Z_L \sin(\beta l) \\ \frac{j}{Z_L} \sin(\beta l) & \cos(\beta l) \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Über die Umrechnungsformeln aus Gleichungen 1.6 bis 1.7 können die Impedanzmatrixelemente des Leitungsstücks bestimmt werden.

$$Z_{11} = \frac{A_{11}}{A_{21}} = -\frac{j Z_L}{\tan(\beta l)} \quad (3.11)$$

$$Z_{12} = \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}}{A_{21}} = -\frac{j Z_L \cos^2(\beta l)}{\sin(\beta l)} - \frac{j Z_L \sin^2(\beta l)}{\sin(\beta l)} = -\frac{j Z_L}{\sin(\beta l)} \quad (3.12)$$

$$Z_{21} = \frac{1}{A_{21}} = -\frac{j Z_L}{\sin(\beta l)} \quad (3.13)$$

$$Z_{22} = \frac{A_{22}}{A_{21}} = -\frac{j Z_L}{\tan(\beta l)} \quad (3.14)$$

Die komplette Impedanzmatrix des Leitungsstücks ist damit:

$$[Z]_{Leitung} = \begin{bmatrix} -\frac{j Z_L}{\tan(\beta l)} & -\frac{j Z_L}{\sin(\beta l)} \\ -\frac{j Z_L}{\sin(\beta l)} & -\frac{j Z_L}{\tan(\beta l)} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Da die Leitungsstücke des Stepped-Impedance-Filters konzentrierte Bauelemente ersetzen sollen, wird hier die Impedanzmatrix $[Z]_{Leitung}$ mit der Impedanzmatrix eines T-Glieds verglichen.

$$[Z]_{T-Glied} = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_3 & Z_3 \\ Z_3 & Z_2 + Z_3 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Über einen Vergleich der Matrizen $[Z]_{Leitung}$ und $[Z]_{T-Glied}$ findet man die Werte Z_1 , Z_2 und Z_3 in Abhängigkeit der Eigenschaften des Leitungsstücks.

$$Z_3 = -\frac{j Z_L}{\sin(\beta l)} \quad (3.17)$$

$$Z_1 = Z_2 = -\frac{j Z_L}{\tan(\beta l)} + \frac{j Z_L}{\sin(\beta l)} \quad (3.18)$$

$$= -j Z_L \frac{\cos(\beta l) - 1}{\sin(\beta l)} \quad (3.19)$$

$$= -j Z_L \frac{\cos(\beta l) - \cos(0)}{\sin(\beta l) - \sin(0)} \quad (3.20)$$

$$= -j Z_L \frac{-2 \sin\left(\frac{\beta l}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\beta l}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{\beta l}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\beta l}{2}\right)} \quad (3.21)$$

$$= j Z_L \tan\left(\frac{\beta l}{2}\right) \quad (3.22)$$

Nun wird angenommen, dass die Länge des Leitungsstücks sehr klein ist. Die trigonometrischen Funktionen können damit vereinfacht werden.

$$Z_1 = Z_2 = \frac{j Z_L \beta l}{2} \quad (3.23)$$

$$Z_3 = -\frac{j Z_L}{\beta l} \quad (3.24)$$

3.4.1. Approximation $Z_L = Z_{high}$

Der Wellenwiderstand des Leitungsstück wird jetzt auf einen sehr großen Wert Z_{high} gesetzt. Die Querimpedanz Z_3 entspricht dann einem Bruch mit sehr großem Zähler und sehr kleinem Nenner. Sie ist deshalb extrem groß und kann als Parallelement vernachlässigt werden.

$$Z_1 = Z_2 = \frac{j Z_{high} \beta l_n}{2} \quad (3.25)$$

$$Z_3 = -\frac{j Z_{high}}{\beta l_n} \approx \infty \quad (3.26)$$

Das T-Glied besteht damit nur noch aus den Serienelementen Z_1 und Z_2 . Die Summe aus Z_1 und Z_2 entspricht genau einer Serieninduktivität, die durch die Leitung realisiert wird. Der Wert der Induktivität hängt dabei von der Leitungslänge sowie dem Wellenwiderstand Z_{high} ab.

$$Z_1 + Z_2 = j Z_{high} \beta l_n = j \omega L_n \quad (3.27)$$

$$l_n = \frac{\omega L_n}{Z_{high} \beta} = \frac{v_{ph} L_n}{Z_{high}} \quad (3.28)$$

In der Bestimmungsgleichung für l_n wurde $\frac{\omega}{\beta} = v_{ph}$ ersetzt. Es ist damit zu sehen, dass die Induktivität L der Leitung nicht von der Frequenz abhängt.

Der Wellenwiderstand Z_{high} muss möglichst groß gewählt werden. Allerdings sind Streifenleitungen mit großem Wellenwiderstand sehr schmal und können nicht beliebig schmaler hergestellt werden. Typische Werte für Z_{high} sind in der Größenordnung von 150Ω .

3.4.2. Approximation $Z_L = Z_{low}$

Ist der Wellenwiderstand des Leitungsstücks sehr klein, werden die Serienelemente Z_1 und Z_2 extrem klein, sodass diese vernachlässigt werden können.

$$Z_1 = Z_2 = \frac{j Z_{low} \beta l_n}{2} \approx 0 \quad (3.29)$$

$$Z_3 = -\frac{j Z_{low}}{\beta l_n} \quad (3.30)$$

Das T-Glied besteht damit nur noch aus dem Parallelelement Z_3 .

$$Z_3 = -\frac{j Z_{low}}{\beta l_n} = \frac{1}{j \omega C_n} \quad (3.31)$$

$$l_n = \frac{Z_{low} \omega C_n}{\beta} = v_{ph} Z_{low} C_n \quad (3.32)$$

Typische Werte für Z_{low} sind in der Größenordnung von 10Ω .

4. Antennen

Antennen besitzen die Aufgabe leitungsgebundene Wellen in eine Freiraumwelle zu überführen. Hierbei müssen verschiedene Aspekte berücksichtigt werden:

- Die Antenne muss den Leitungswellenwiderstand an den Freiraumwellenwiderstand anpassen, sodass möglichst keine Leistung reflektiert wird.
- Die Antenne sollte nur in gewünschte Raumrichtungen abstrahlen.
- Eventuell soll nur ein bestimmter oder ein sehr breiter Frequenzbereich empfangen oder gesendet werden.

4.1. Ebene Welle

Ebene Wellen sind definitionsgemäß Wellen mit ebenen Wellenfronten. Anders ausgedrückt bilden die Orte gleichen Phasenwinkels Ebenen. Mathematisch lassen sich solche Wellen relativ einfach beschreiben und werden deshalb sehr oft zur näherungsweisen Beschreibung des Fernfeldes angewandt.

Das elektrische Feld einer solchen ebenen Welle ist in Gleichung 4.1 angegeben. Das elektrische Feld besitzt hier lediglich eine Komponente in x-Richtung mit Amplitude E_0 . Der Vektor $\vec{e}_x = (1, 0, 0)^T$ ist der Einheitsvektor in x-Richtung. Die Welle breitet sich mit der Ausbreitungskonstanten $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$ in z-Richtung aus. Die Ebenen konstanter Phase befinden sich bei $\omega t - \beta z = \text{const.}$ Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle entspricht der Phasengeschwindigkeit $c = \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\omega}{\beta}$.

$$\vec{E} = E_0 \vec{e}_x e^{j(\omega t - \beta z)} \quad (4.1)$$

Eine elektrische Welle existiert jedoch niemals ohne ein zugehöriges magnetisches Feld \vec{H} bzw. magnetische Flussdichte \vec{B} . Nach dem Induktionsgesetz (3. Maxwell-Gleichung) gilt:

$$\text{rot } \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \quad (4.2)$$

$$\vec{H} = -\frac{1}{\mu_0} \int \text{rot } \vec{E} dt \quad (4.3)$$

Es wird hier nur die magnetische Permeabilität μ_0 berücksichtigt, sodass die Gleichungen strenggenommen nur im Vakuum gelten. Die relative Permeabilität μ_r von Luft wird jedoch als vernachlässigbar angenommen, sodass die Gleichungen auch in Luft gelten.

Einsetzen des elektrischen Feldes aus Gleichung 4.1 und berechnen der Rotation ergibt:

$$\vec{H} = -\frac{1}{\mu_0} \int \begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix} dt = -\frac{1}{\mu_0} \int \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - 0 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} dt \quad (4.4)$$

$$= \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{\beta}{\omega} E_0 \vec{e}_y e^{j(\omega t - \beta z)} \quad (4.5)$$

Das Verhältnis $\frac{\omega}{\beta}$ entspricht der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum $c_0 = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$.

$$\vec{H} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cdot E_0 \vec{e}_y e^{j(\omega t - \beta z)} \quad (4.6)$$

Das magnetische Feld \vec{H} nach Gleichung 4.6 ist in Phase zum elektrischen Feld aus Gleichung 4.1. Außerdem stehen elektrisches Feld und magnetisches Feld senkrecht aufeinander.

4.1.1. Freiraumwellenwiderstand

In Gleichung 4.6 ist ersichtlich, dass die Amplituden von elektrischem Feld und magnetischem Feld der ebenen Welle proportional über den Faktor $\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$ zusammenhängen. Dieses Verhältnis wird als Freiraumwellenwiderstand Z_{F0} bezeichnet.

$$Z_{F0} = \frac{|\vec{E}|}{|\vec{H}|} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 376.730313 \Omega \approx 120\pi \Omega \quad (4.7)$$

Der Freiraumwellenwiderstand ist das Pendant zum Wellenwiderstand R_W auf Leitungen, der das Verhältnis von Spannung und Strom einer leitungsgebundenen Welle angibt.

4.1.2. Strahlungsleistungsdichte

Die Strahlungsleistungsdichte bzw. der Pointing-Vektor \vec{S} beschreibt die Leistung, die pro Flächeneinheit übertragen wird und ist wie folgt definiert:

$$\vec{S}(t) = \vec{E}(t) \times \vec{H}(t) \quad (4.8)$$

Der Vektor zeigt dabei in Ausbreitungsrichtung der Freiraumwelle bzw. der Richtung des Energietransports. Die Form in Gleichung beschreibt den Energietransport allgemein in Abhängigkeit der Zeit. Für homogene Wellen, d.h. sinusförmige Zeitabhängigkeit der Welle, wird jedoch meist die Form 4.9 verwendet, die die mittlere Strahlungsleistungsdichte der Welle angibt.

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \cdot \vec{E} \times \vec{H} \quad (4.9)$$

Für die homogene, ebene Welle nach Gleichungen 4.1 und 4.6 ergibt sich wie erwartet ein Pointing-Vektor in z-Richtung.

$$\vec{S} = \frac{1}{2} E_0 \vec{e}_x e^{j(\omega t - \beta z)} \times \frac{E_0^* \vec{e}_y e^{-j(\omega t - \beta z)}}{Z_{F0}} = \frac{|E_0|^2 \vec{e}_z}{2 Z_{F0}} \quad (4.10)$$

4.1.3. Polarisation

Die Polarisation beschreibt die Richtung der elektrischen Feldkomponente einer Welle.

Lineare Polarisation liegt vor, wenn das elektrische Feld einer Welle nur in einer beliebigen Raumrichtung existiert. Die Richtung wird meist mit angegeben und die Welle beispielsweise als **vertikal** oder **horizontal polarisiert** bezeichnet. Die Richtung kann natürlich auch schief stehen, d.h. die Welle besitzt eine vertikale als auch eine horizontale Komponente.

Eine **zirkular polarisierte** Welle besteht dagegen aus einer vertikalen und einer horizontalen Feldkomponente, die die gleiche Amplitude besitzen, jedoch zeitlich um 90° phasenverschoben sind.

$$\vec{E}_{\text{zirkular}}(z) = E_0 \vec{e}_x e^{j(\omega t - \beta z)} + j E_0 \vec{e}_y e^{j(\omega t - \beta z)} \quad (4.11)$$

Die **elliptische Polarisation** entsteht aus der zirkularen Polarisation, falls die beiden Feldkomponenten unterschiedliche Amplituden besitzen.

$$\vec{E}_{\text{elliptisch}}(z) = E_{0x} \vec{e}_x e^{j(\omega t - \beta z)} + j E_{0y} \vec{e}_y e^{j(\omega t - \beta z)} \quad (4.12)$$

Die Polarisation muss bei der Ausrichtung von Antennen beachtet werden, um optimalen Empfang zu gewährleisten.

4.2. Eigenschaften von Antennen

4.2.1. Kugelstrahler

Der sogenannte Kugelstrahler ist eine theoretisch angenommene Antenne, die in alle Raumrichtungen gleichmäßig abstrahlt. Dieser Kugelstrahler kommt in der Realität nie vor, er wird jedoch oft als Bezug bzw. Vergleichsmaßstab verwendet.

Der Betrag des Pointing-Vektors des Kugelstrahlers S_i ist

$$S_i(r) = \frac{P_S}{4\pi r^2}. \quad (4.13)$$

Die Sendeleistung P_S wird in Richtung des Radius \vec{e}_r gleichmäßig abgestrahlt. Die Strahlungsleistungsdichte S_i lässt sich durch Division der Sendeleistung durch die Kugeloberfläche im Abstand r berechnen. Der Index i steht hierbei für **isotrop**, d.h. gleichmäßige Abstrahlung in alle Raumrichtungen.

4.2.2. Richtfunktion und Richtcharakteristik

Antennen senden die Leistung im Gegensatz zum isotropen Kugelstrahler nicht gleichmäßig in alle Raumrichtungen ab, sondern besitzen eine mehr oder weniger komplexe Richtwirkung. Die Richtfunktion $D(\phi, \theta)$ gibt in Abhängigkeit der beiden Raumwinkel ϕ

und θ die Strahlungsleistungsdichte der ausgesendeten Welle relativ zur Strahlungsleistungsdichte des isotropen Kugelstrahlers an. Die Richtcharakteristik $C(\phi, \theta)$ beschreibt dagegen die Feldstärke in einer Richtung in Bezug zum Maximum der Feldstärke.

$$D(\phi, \theta) = \frac{|\vec{E}(r, \phi, \theta)|^2}{E_i^2(r)} \bigg|_{r \rightarrow \infty} = \frac{|\vec{H}(r, \phi, \theta)|^2}{H_i^2(r)} \bigg|_{r \rightarrow \infty} = \frac{|\vec{S}(r, \phi, \theta)|}{S_i(r)} \bigg|_{r \rightarrow \infty} \quad (4.14)$$

$$C(\phi, \theta) = \frac{|\vec{E}(r, \phi, \theta)|}{|\vec{E}_{max}(r)|} \bigg|_{r \rightarrow \infty} = \frac{|\vec{H}(r, \phi, \theta)|}{|\vec{H}_{max}(r)|} \bigg|_{r \rightarrow \infty} \quad (4.15)$$

Zur besseren Darstellung der Richtfunktion bzw. der Richtcharakteristik werden diese in Graphen sehr oft in logarithmischem Maßstab bzw. in der Pseudoeinheit dB angegeben. Es ist zu beachten, dass $C(\phi, \theta)$ ein Verhältnis von Feldgrößen beschreibt und $D(\phi, \theta)$ ein Verhältnis von Leistungsgrößen, wodurch sich die unterschiedlichen Vorfaktoren bei der Berechnung des dB-Wertes erklären.

$$D(\phi, \theta)/\text{dBi} = 10 \log_{10} (D(\phi, \theta)) \quad (4.16)$$

$$C(\phi, \theta)/\text{dB} = 20 \log_{10} (C(\phi, \theta)) \quad (4.17)$$

Da die Richtcharakteristik auf das Maximum der Feldstärke bezogen wurde, liegt ihr Wertebereich zwischen 1 und 0 bzw. zwischen 0 dB und $-\infty$ dB. Die Abbildung 4.2.1 zeigt die 3D-Richtcharakteristik eines Dipols der Länge $\frac{\lambda}{2}$. Sehr oft wird die Richtcharakteristik als horizontaler oder vertikaler Schnitt dargestellt, siehe Abbildung 4.2.2.

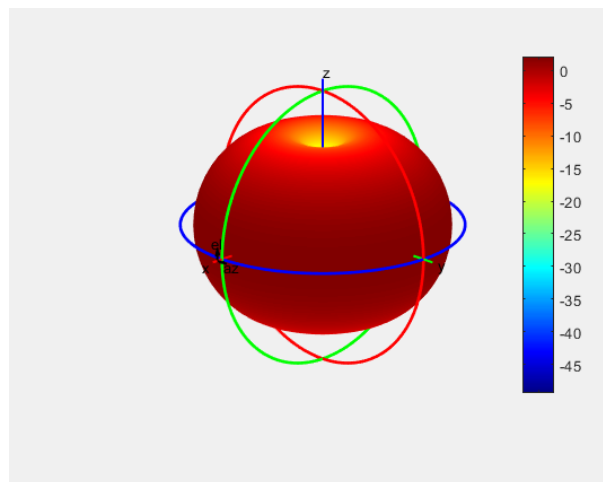


Abbildung 4.2.1: 3D-Richtcharakteristik eines Dipols

Der horizontale Schnitt wird bestimmt indem der Elevationswinkel auf $\theta = 90^\circ$ gesetzt wird. Für die vertikale Richtcharakteristik wird ϕ auf einen festen Wert gesetzt.

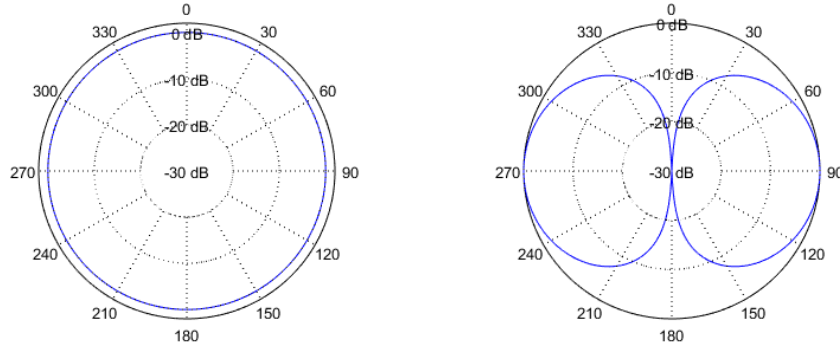


Abbildung 4.2.2: Horizontale und vertikale Richtcharakteristik

4.2.3. Richtfaktor

Der Richtfaktor D einer Antenne berechnet sich aus der maximalen Strahlungsleistungsdichte dividiert durch die Strahlungsleistungsdichte des Kugelstrahlers.

$$D = \frac{|\vec{E}_{max}|^2}{E_i^2} = \frac{|\vec{H}_{max}|^2}{H_i^2} = \frac{|\vec{S}_{max}|}{S_i} \quad (4.18)$$

Der Richtfaktor kann auch über die Quadrate des E-Felds oder des H-Feld bestimmt werden. Dies ist möglich, da E-Feld und H-Feld in freien Raum immer über den Freiraumwellenwiderstand in einer festen Beziehung zueinander stehen.

Die Richtfunktion $D(\phi, \theta)$ und das Quadrat der Richtcharakteristik $C^2(\phi, \theta)$ können über den Richtfaktor in Beziehung gebracht werden.

$$D(\phi, \theta) = D \cdot C^2(\phi, \theta) \quad (4.19)$$

Umgekehrt kann auch der Richtfaktor D aus der Richtcharakteristik $C(\phi, \theta)$ berechnet werden.

$$P = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi S_r \cdot r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{|E|^2}{2 Z_{F0}} \cdot r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi \quad (4.20)$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \underbrace{\frac{|E|^2}{|E_{max}|^2}}_{C^2(\phi, \theta)} \cdot \underbrace{\frac{|E_{max}|^2}{E_i^2}}_D \cdot \underbrace{\frac{E_i^2}{2 Z_{F0}}}_{S_i} \cdot r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi \quad (4.21)$$

$$(4.22)$$

Der Term $\frac{E_i^2}{2 Z_{F0}} = \frac{P}{4\pi r^2} = S_i$ ist gerade die Strahlungsichte des isotropen Kugelstrahlers. Einsetzen und Umstellen ergibt den gesuchten Richtfaktor D in Abhängigkeit der Richtcharakteristik.

$$P = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi C^2(\phi, \theta) \cdot D \cdot \frac{P}{4\pi} \sin(\theta) d\theta d\phi \quad (4.23)$$

$$D = \frac{4\pi}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi C^2(\phi, \theta) \cdot \sin(\theta) d\theta d\phi} \quad (4.24)$$

4.2.4. Antennengewinn

Der Antennengewinn G berücksichtigt im Gegensatz zum Richtfaktor D die ohmschen Verluste der Antenne.

$$G = \eta D \quad (4.25)$$

Der Gewinn ist deshalb für passive Antennen immer kleiner als D . Für näherungsweise verlustfreie Antennen gilt $G \approx D$.

4.2.5. Eingangsimpedanz

Die Antenne ist aus Sicht des Senders ein Eintor mit einer bestimmten Eingangsimpedanz, die möglichst gut an den Sender angepasst sein sollte. Die Eingangsimpedanz einer Antenne setzt sich zusammen aus dem Strahlungswiderstand R_S inkl. einer Reaktanz X_A sowie einem Verlustwiderstand R_V . Die Leistung, die im reellen Strahlungswiderstand verbraucht wird, entspricht der Leistung, die tatsächlich gesendet wird. Die Leistung des Verlustwiderstands geht verloren bzw. wird in Wärme umgewandelt. Aus beiden Widerstandswerten kann damit der Wirkungsgrad η der Antenne angegeben werden.

$$\eta = \frac{R_S}{R_S + R_V} \quad (4.26)$$

Achtung: Verluste aufgrund von Reflexionen bzw. einer Fehlanpassung der Antenne an Sender oder Empfänger sind in η nicht enthalten.

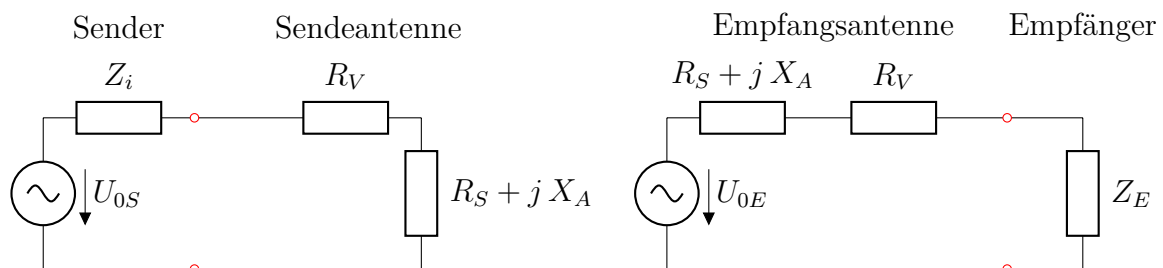


Abbildung 4.2.3: Ersatzschaltbilder von Sender mit Sendeantenne und Empfangsantenne inkl. Empfänger

Die Widerstandswerte einer Antenne sind identisch, egal ob sie als Sendeantenne oder Empfangsantenne verwendet wird. Die Leerlaufspannung U_{0E} der Empfangsantenne entsteht durch die einfallende Welle. Um möglichst viel Leistung von Empfangsantenne zum Empfänger zu transportieren, müssen Empfangsantenne und Empfänger angepasst sein. Im Idealfall gilt mit $R_V = 0$, dass $R_S + j X_A = Z_E^*$.

Die zum Empfänger transportierte Leistung ist dann.

$$P_E = \frac{\left| \frac{U_{0E}}{2} \right|^2}{2 R_S} = \frac{|U_{E0}|^2}{8 R_S} \quad (4.27)$$

4.2.6. Antennenwirkfläche

Eine Antenne kann im Allgemeinen sowohl als Sendeantenne als auch als Empfangsantenne verwendet werden. Auch hier gilt wie bei den Mehrtoren die Reziprozität, d.h. die Antenne verhält sich in beiden Richtungen gleich. Dies wird zum Beispiel anhand der Richtcharakteristik deutlich, die im Sende- und Empfangsfall identisch ist. Eine Antenne, die in eine Richtung stärker abstrahlt, wird aus dieser Richtung auch besser empfangen.

Eine nützliche Größe einer Empfangsantenne ist die sogenannte Antennenwirkfläche.

$$A_W = \frac{P_E}{S} \quad \Leftrightarrow \quad P_E = A_W S \quad (4.28)$$

In Hauptstrahlrichtung ist die Antennenwirkfläche

$$A_W = \frac{\lambda^2}{4\pi} G. \quad (4.29)$$

Achtung: Die Antennenwirkfläche ist keine geometrische Fläche der Antenne!

4.2.7. Reziprozität

Die Reziprozität besagt, dass sich eine Funkstrecke in beide Richtungen identisch verhält. Dies ist äquivalent zur Reziprozität bei Zweitoren, wo die Streuparameter s_{21} und s_{12} identisch sein müssen.

Es wird zunächst angenommen, dass eine Antenne mit Index 1 die Leistung P_S ausendet. Die Leistungsdichte im Abstand r in Richtung des Strahlungsmaximums beträgt dann $S_1 = P_S G_1 \frac{1}{4\pi r^2}$. Die ideal ausgerichtete Antenne 2 mit Antennenwirkfläche A_{W2} empfängt die Leistung $P_E = S_1 \cdot A_{W2}$

$$P_E = P_S G_1 \cdot \frac{1}{4\pi r^2} \cdot A_{W2} \quad (4.30)$$

Falls Antenne 2 als Sendeantenne verwendet wird und Antenne 1 empfängt, kann eine äquivalente Gleichung aufgestellt werden.

$$P_E = P_S G_2 \cdot \frac{1}{4\pi r^2} \cdot A_{W1} \quad (4.31)$$

Das Verhältnis der Empfangsleistung P_E zur Sendeleistung P_S muss in beiden Fällen identisch sein. Dies führt nach einfacher Umformung auf:

$$\frac{A_{W1}}{G_1} = \frac{A_{W2}}{G_2} \quad (4.32)$$

Das Verhältnis von Antennengewinn und Antennenwirkfläche ist also für jede Antenne identisch, jedoch noch zu bestimmen. Das Verhältnis wird im folgenden Abschnitt für den Hertzschen Dipol hergeleitet und beträgt allgemein $\frac{\lambda^2}{4\pi}$.

4.2.8. Freiraumdämpfung

Wie im vorherigen Abschnitt kann die Empfangsleistung P_E in Abhängigkeit der Sendeleistung P_S , des Sendeantennengewinns G_S und der Antennenwirkfläche der Empfangsantenne A_W angegeben werden.

$$P_E = P_S G_S \cdot \frac{1}{4\pi r^2} \cdot A_W \quad (4.33)$$

Die Antennenwirkfläche hängt über den bekannten Faktor $\frac{\lambda^2}{4\pi}$ mit dem Gewinn der Empfangsantenne zusammen. Die Empfangsleistung kann deshalb über die Gewinne der beiden Antennen angegeben werden.

$$P_E = P_S G_S G_E \cdot \underbrace{\frac{1}{4\pi r^2} \cdot \frac{\lambda^2}{4\pi}}_{1/L_{F0}} \quad (4.34)$$

Der hintere Term der Gleichung entspricht dem Kehrwert der Freiraumdämpfung L_{F0} . Die Freiraumdämpfung ist keine Dämpfung im eigentlichen Sinn, sondern beschreibt lediglich die Abnahme der Empfangsleistung mit der Entfernung. Sie entspricht dem Verhältnis der Kugeloberfläche einer Kugel mit Radius r zur Antennenwirkfläche eines isotropen Kugelstrahlers.

$$L_{F0} = \frac{(4\pi r)^2}{\lambda^2} \quad (4.35)$$

Meist wird die Freiraumdämpfung in dB angegeben.

$$L_{F0}/\text{dB} = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{(4\pi r)^2}{\lambda^2} \right) \quad (4.36)$$

4.2.9. Äquivalente isotrope Sendeleistung EIRP

Die *EIRP* ist die Leistung, die ein Sender aufbringen müsste, um mit einem isotropen Kugelstrahler als Antenne dieselbe Strahlungsdichte zu erreichen als mit der tatsächlich eingesetzten Antenne mit Gewinn G_S .

$$EIRP = G_S \cdot P_S \quad (4.37)$$

Die *EIRP* wird in Funkstandards oft als Grenzwert verwendet.

4.3. Hertzscher Dipol

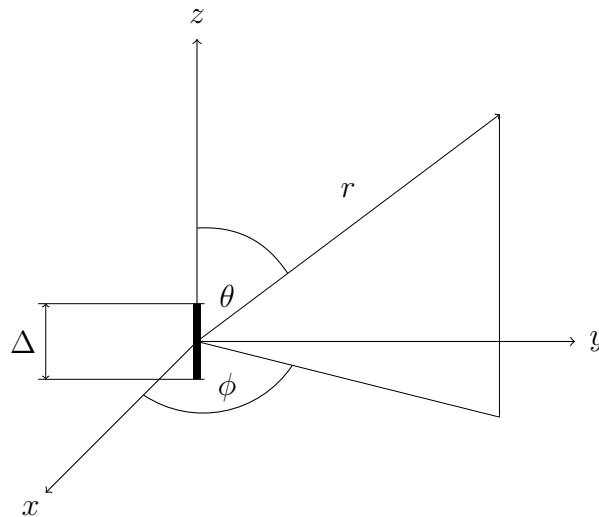


Abbildung 4.3.1: Hertzscher Dipol in z-Richtung

Der Hertzsche Dipol ist eine theoretische Antenne, aus der sich viele weitere Antennen und Antenneneigenschaften herleiten lassen. Konkret ist der Hertzsche Dipol ein sehr, sehr kurzer Leiter der Länge Δ (hier in senkrechter Richtung), der vom Strom I mit Frequenz $f = \frac{c}{\lambda}$ durchflossen wird.

Das Feld des Hertschen Dipols lässt sich exakt aus den Maxwell-Gleichungen herleiten und ist:

$$E_r = j \frac{Z_{F0} I}{2\pi} \cdot \frac{\Delta}{\lambda} \cdot \cos(\theta) \cdot \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{j\beta r^3} \right) \cdot e^{-j\beta r} \quad (4.38)$$

$$E_\theta = j \frac{Z_{F0} I}{2} \cdot \frac{\Delta}{\lambda} \cdot \sin(\theta) \cdot \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{j\beta r^2} - \frac{1}{\beta^2 r^3} \right) \cdot e^{-j\beta r} \quad (4.39)$$

$$H_\phi = j \frac{I}{2} \cdot \frac{\Delta}{\lambda} \cdot \sin(\theta) \cdot \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{j\beta r^2} \right) \cdot e^{-j\beta r} \quad (4.40)$$

$$E_\phi = H_r = H_\theta = 0 \quad (4.41)$$

Der Winkel θ bezeichnet den Elevationswinkel, wobei $\theta = 0^\circ$ senkrecht nach oben bedeutet und $\theta = 90^\circ$ die waagerechte Ebene ist. r ist der Abstand zum Mittelpunkt des Hertzschen Dipols.

Im **Fernfeld**, d.h. in großer Entfernung zur Antenne ($r > 10\lambda$), können die Terme mit höheren Potenzen von r im Nenner entfallen, da diese sehr viel schneller mit dem Abstand r abnehmen als die Terme mit $\frac{1}{r}$.

$$E_\theta = j \frac{Z_{F0} I}{2r} \cdot \frac{\Delta}{\lambda} \cdot \sin(\theta) \cdot e^{-j\beta r} \quad (4.42)$$

$$H_\phi = j \frac{I}{2r} \cdot \frac{\Delta}{\lambda} \cdot \sin(\theta) \cdot e^{-j\beta r} \quad (4.43)$$

$$E_\phi = E_r = H_r = H_\theta = 0 \quad (4.44)$$

Das elektrische Feld und das magnetische Feld stehen senkrecht aufeinander. Wie erwartet ist das Verhältnis beider Größen genau Z_{F0} .

$$\frac{E_\theta}{H_\phi} = Z_{F0} \approx 120 \pi \Omega \quad (4.45)$$

Die **Strahlungsdichte** bzw. der Pointing-Vektor des Hertzschen Dipols kann aus dem magnetischen und dem elektrischen Feld bestimmt werden. Da der Pointing-Vektor senkrecht auf magnetischem und elektrischem Feld steht, zeigt er in radiale Richtung, was durch den Index r angegeben ist.

$$S_r = \frac{1}{2} \cdot E_\theta \cdot H_\phi^* = \frac{1}{2 Z_{F0}} \cdot \left(\frac{Z_{F0} |I|}{2r} \cdot \frac{\Delta}{\lambda} \cdot \sin(\theta) \right)^2 \quad (4.46)$$

$$= 15 \pi \Omega \cdot \left(\frac{|I|}{r} \cdot \frac{\Delta}{\lambda} \cdot \sin(\theta) \right)^2 \quad (4.47)$$

Die abgestrahlte Leistung des Hertzschen Dipols berechnet sich aus der Integration der Strahlungsdichte über die komplette Kugeloberfläche.

$$P = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{2 Z_{F0}} \cdot \left(\frac{Z_{F0} |I|}{2r} \cdot \frac{\Delta}{\lambda} \cdot \sin(\theta) \right)^2 \cdot r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi \quad (4.48)$$

$$= \frac{Z_{F0} \pi}{4} \cdot |I|^2 \cdot \left(\frac{\Delta}{\lambda} \right)^2 \underbrace{\int_0^\pi \sin^3(\theta) d\theta}_{\frac{4}{3}} \quad (4.49)$$

$$= \frac{Z_{F0} \pi}{3} \cdot |I|^2 \cdot \left(\frac{\Delta}{\lambda} \right)^2 \quad (4.50)$$

$$= 40 \pi^2 \Omega \cdot |I|^2 \cdot \left(\frac{\Delta}{\lambda} \right)^2 \quad (4.51)$$

Die **Sendeleistung** kann auch über den Strom sowie den Strahlungswiderstand der Antenne R_S angegeben werden.

$$P = \frac{1}{2} \cdot |I|^2 \cdot R_S \quad (4.52)$$

Gleichsetzen beider Leistungsberechnungen und Umformen führt auf den Strahlungswiderstand.

$$R_S = 80 \pi^2 \left(\frac{\Delta}{\lambda} \right)^2 \Omega \quad (4.53)$$

Die Strahlungsdichte eines Kugelstrahlers mit gleicher Leistung ist

$$S_i = \frac{1}{2} \cdot \frac{R_S \cdot |I|^2}{4 \pi r^2} = \frac{10 \pi \Omega |I|^2}{r^2} \cdot \left(\frac{\Delta}{\lambda} \right)^2. \quad (4.54)$$

Hieraus kann die **Richtfunktion** $D(\phi, \theta)$ bestimmt werden.

$$D(\phi, \theta) = \left| \frac{S_r}{S_i} \right| = \frac{15 \pi \Omega \cdot \left(\frac{|I|}{r} \cdot \frac{\Delta}{\lambda} \cdot \sin(\theta) \right)^2}{\frac{10 \pi \Omega |I|^2}{r^2} \cdot \left(\frac{\Delta}{\lambda} \right)^2} \quad (4.55)$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \sin^2(\theta) \quad (4.56)$$

Der Richtfaktor D ist das Maximum der Richtfunktion.

$$D = \max(D(\phi, \theta)) = \frac{3}{2} \quad (4.57)$$

Da der Hertzsche Dipol als verlustfrei angenommen wird ($\eta = 1$), gilt auch

$$G = \eta D = \frac{3}{2}. \quad (4.58)$$

Der Richtfaktor wird meist in dB angegeben. Da es sich um eine Leistungsgröße handelt, wird der Vorfaktor 10 verwendet. Als Pseudoeinheit wird dBi angegeben, um anzuzeigen, dass der isotrope Kugelstrahler als Referenz genutzt wurde.

$$D = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{3}{2} \right) = 1,76 \text{ dBi} \quad (4.59)$$

Die **Richtcharakteristik** $C(\phi, \theta)$ ist:

$$C(\phi, \theta) = \sqrt{\frac{D(\phi, \theta)}{D}} = \sin(\theta) \quad (4.60)$$

Der Halbwertsinkel α_{HW} ist der Winkel, an dem das Feld E um den Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ relativ zum Maximum abgenommen hat. Das Maximum des Richtdiagramms befindet sich bei $\theta_{max} = 90^\circ$.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = C(\varphi_{max}, \theta_{max} + \alpha_{HW}) \quad (4.61)$$

$$= \sin(\theta_{max} + \alpha_{HW}) \quad (4.62)$$

$$= \cos(\alpha_{HW}) \quad (4.63)$$

$$\alpha_{HW} = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 45^\circ; \quad (4.64)$$

Die Halbwertsbreite $\alpha_{HB} = 2 \alpha_{HW}$ ist damit gleich $\alpha_{HB} = 90^\circ$.

Die Antennenwirkfläche des Hertzschen Dipols ist nach Definition

$$A_W = \frac{P_E}{S_E}. \quad (4.65)$$

Hierbei ist P_E die maximal verfügbare Empfangsleistung und S_E die Strahlungsdichte der einfallenden bzw. empfangenen Welle. Das elektrische Feld E dieser Welle erzeugt über die Länge Δ des Dipols eine Spannung U_{0E} , die der erzeugten Leerlaufspannung der Empfangsantenne entspricht. Das elektrische Feld hängt wiederum mit $S = \frac{|E|^2}{2 Z_{F0}}$ mit der Strahlungsdichte zusammen. Auflösen nach dem elektrischen Feld und Einsetzen in die Gleichung für U_{0E} ergibt:

$$U_{0E} = E \cdot \Delta = \sqrt{2 Z_{F0} S_E} \cdot \Delta \quad (4.66)$$

Die maximal abgegebene Leistung der Empfangsantenne bei angepasstem Empfänger ist

$$P_E = \frac{\left(\frac{U_{0E}}{2}\right)^2}{2 R_S}. \quad (4.67)$$

Es muss hier beachtet werden, dass es sich bei U_{0E} um einen Scheitelwert handelt und bei P_E um einen Durchschnittswert. Außerdem fällt bei optimaler Anpassung nur die Hälfte der Leerlaufspannung U_E am Empfänger ab.

Einsetzen des Strahlungswiderstands R_S des Dipols aus Gleichung 4.53 führt auf:

$$P_E = \frac{U_E^2}{8 R_S} = \frac{1}{4} \frac{Z_{F0}}{R_S} \cdot S_E \cdot \Delta^2 \quad (4.68)$$

$$= \frac{1}{4} \frac{120 \pi \Omega}{80 \pi^2 \Omega \left(\frac{\Delta}{\lambda}\right)^2} \cdot S_E \cdot \Delta^2 \quad (4.69)$$

$$= \frac{3 \lambda^2}{8 \pi} \cdot S_E \quad (4.70)$$

Einsetzen der Leistung P_E in die Definition der Antennenwirkfläche aus 4.65 führt auf.

$$A_W = \frac{P_E}{S_E} = \frac{3 \lambda^2}{8 \pi} \quad (4.71)$$

Das Verhältnis der **Antennenwirkfläche** A_W und des Gewinns G aus Gleichung 4.58 ist.

$$\frac{A_W}{G} = \frac{\lambda^2}{4 \pi} \quad (4.72)$$

Dieses Verhältnis gilt aufgrund der Reziprozität für jede beliebige Antenne. Die Antennenwirkfläche A_W kann also immer und für jede Antenne aus dem Gewinn G ermittelt werden und muss nicht gesondert hergeleitet werden.

4.4. Lineare-Antennen

Lineare Antennen bzw. Stabantennen der Länge $l = 2h$ kann man aus sich vielen Hertzschen Dipolen aufgebaut vorstellen. Der Speisepunkt einer Stabantenne kann entweder in der Mitte des Stabes erfolgen (Dipol-Antenne) oder im Fußpunkt (Monopolantenne). Die besonderen Unterschiede der beiden Antennentypen werden später geklärt. Zunächst soll vom bekannten Fernfeld des Hertzschen Dipols ausgegangen werden.

$$E_\theta = j \frac{Z_{F0} I}{2 r} \cdot \frac{\Delta}{\lambda} \cdot \sin(\theta) \cdot e^{-j\beta r} \quad (4.73)$$

$$H_\phi = j \frac{I}{2 r} \cdot \frac{\Delta}{\lambda} \cdot \sin(\theta) \cdot e^{-j\beta r} \quad (4.74)$$

Die Stabantenne nach Abbildung 4.4.3 besteht aus vielen Hertzschen Dipolen der Länge Δ . Das elektrische Feld der Antenne errechnet sich aus der Summe der elektrischen Felder dieser Hertzschen Dipole. Zu beachten ist, dass die elektrischen Felder phasenrichtig zu addieren sind.

Der Abstand eines beliebigen fernen Punktes vom Antennenmittelpunkt sei r_0 . Der Abstand $r(r_0, z)$ des fernen Punktes von einem anderen Ort auf der Antenne z kann

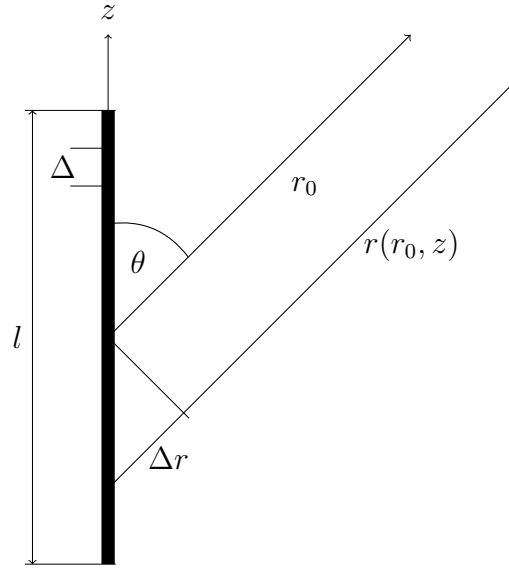


Abbildung 4.4.1: Dipol-Antenne

dann mittels Δr angegeben werden. Es wird angenommen, dass die Strahlen für die Fernfeldberechnung parallel sind.

$$\Delta r = -z \cos(\theta) \quad (4.75)$$

$$r(r_0, z) = r_0 - z \cos(\theta) \quad (4.76)$$

Das elektrische Feld $dE_\theta(r_0, \theta, z)$ eines infinitesimal kurzen Dipols der Länge dz kann damit angegeben werden.

$$dE_\theta(r_0, \theta, z) = j \frac{Z_{F0} I(z)}{2 r(r_0, z)} \cdot \frac{dz}{\lambda} \cdot \sin(\theta) \cdot e^{-j\beta r(r_0, z)} \quad (4.77)$$

Das Gesamtfeld der Stabantenne ist die Integration über alle infinitesimal kurzen Dipole.

$$E_\theta(r_0, \theta) = \int_{-h}^{+h} dE_\theta(r_0, \theta, z) = \int_{-h}^{+h} j \frac{Z_{F0} I(z)}{2 r(r_0, z)} \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \sin(\theta) \cdot e^{-j\beta r(r_0, z)} dz \quad (4.78)$$

Alle nicht von z abhängigen Terme werden anschließend vor das Integral gezogen.

$$E_\theta(r_0, \theta) = j \frac{Z_{F0}}{2 r_0} \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot e^{-j\beta r_0} \cdot \sin(\theta) \cdot \underbrace{\int_{-h}^{+h} I(z) \cdot e^{j\beta z \cos(\theta)} dz}_{F(\theta)} \quad (4.79)$$

Der Anteil $F(\theta)$ enthält alle von θ abhängigen Terme und beschreibt deshalb den Richtungsterm des elektrischen Feldes. Die zugehörige magnetische Feldkomponente $H_\theta(r_0, \theta)$ lässt sich über $H_\theta(r_0, \theta) = \frac{1}{Z_{F0}} \cdot E_\theta(r_0, \theta)$ berechnen.

Die einzige noch zu bestimmende Unbekannte ist der genaue Verlauf des Stromes $I(z)$ in Abhängigkeit des Ortes z . Für Stabantennen kann grob angenommen werden, dass der Stromverlauf entlang des Stabes sinusförmig ist, wobei der Strom an den Stabenden Null sein muss. Mit diesen Annahmen erhält man folgenden Stromverlauf:

$$I(z) = I_0 \sin(\beta(h - |z|)) \quad (4.80)$$

Das resultierende elektrische Feld ist damit:

$$E_\theta(r_0, \theta) = j \frac{Z_{F0}}{2 r_0 \lambda} \cdot e^{-j\beta r_0} \cdot \sin(\theta) \cdot \int_{-h}^h I_0 \sin(\beta(h - |z|)) \cdot e^{j\beta z \cos(\theta)} dz \quad (4.81)$$

$$= j \frac{Z_{F0}}{r_0 \lambda} \cdot e^{-j\beta r_0} \cdot \sin(\theta) \cdot \int_0^h I_0 \sin(\beta(h - z)) \cdot \cos(j\beta z \cos(\theta)) dz \quad (4.82)$$

$$= j \frac{Z_{F0} I_0}{2 \pi r_0} \cdot e^{-j\beta r_0} \cdot \frac{\cos(\beta h \cos(\theta)) - \cos(\beta h)}{\sin(\theta)} \quad (4.83)$$

4.4.1. Halbwellendipol

Der Halbwellendipol besitzt - wie der Name andeutet - die Länge $l = \frac{\lambda}{2}$ und ist der am häufigsten eingesetzte Dipol. Mit $h = \frac{l}{2} = \frac{\lambda}{4}$ und $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$ und der Stromverteilung

$$I(z) = I_0 \sin(\beta(h - |z|)) \quad (4.84)$$

ergibt sich für diesen Dipol das elektrische Feld zu

$$E_\theta(r_0, \theta) = j \frac{Z_{F0} I_0}{2 \pi r_0} \cdot e^{-j\beta r_0} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos(\theta)\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\sin(\theta)} \quad (4.85)$$

$$= j \frac{Z_{F0} I_0}{2 \pi r_0} \cdot e^{-j\beta r_0} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos(\theta)\right)}{\sin(\theta)}. \quad (4.86)$$

Das Maximum des elektrischen Feldes tritt bei $\theta = 90^\circ$ auf und ist

$$|E_{\theta, \max}(r_0)| = |E_\theta(r_0, \theta = 90^\circ)| = \frac{Z_{F0} I_0}{2 \pi r_0}. \quad (4.87)$$

Daraus kann die Richtcharakteristik $C(\theta)$ des Halbwellendipols bestimmt werden.

$$C(\theta) = \frac{|E_\theta(r_0, \theta)|}{|E_{\theta, \max}(r_0)|} \bigg|_{r_0 \rightarrow \infty} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos(\theta)\right)}{\sin(\theta)} \quad (4.88)$$

Aus der Richtcharakteristik kann der Richtfaktor bestimmt werden, der mit $\eta = 1$ auch dem Gewinn G des Dipols entspricht. Das Integral wurde numerisch gelöst.

$$D = \frac{4\pi}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi C^2(\theta) \cdot \sin(\theta) d\theta d\phi} \quad (4.89)$$

$$= \frac{2}{\int_0^\pi \frac{\cos^2(\frac{\pi}{2} \cos(\theta))}{\sin(\theta)} d\theta} = 1,64 = 2,15 \text{ dBi} \quad (4.90)$$

Der Richtfaktor bzw. der Gewinn des Halbwellendipols unterscheidet sich mit $D = 1,64$ nur leicht vom Gewinn des Hertzschen Dipols ($D_{\text{Hertz}} = 1,5$).

Eine weitere wichtige Eigenschaft ist der Wert des Strahlungswiderstands R_S der Antenne. Dieser wird wie beim Hertschen Dipol über den Vergleich von eingespeister Leistung zu abgestrahlter Leistung berechnet. Die abgestrahlte Leistung wird über den schon berechneten Gewinn angegeben.

$$\frac{P_S}{4\pi r^2} = \frac{|S_{\max}|}{G} \rightarrow P_S = 4\pi r^2 \frac{|\vec{S}_{\max}|}{G} \quad (4.91)$$

Mit $\vec{S}_{\max} = \frac{|\vec{E}_{\max}|^2}{2Z_{F0}}$ ist die Leistung

$$P_S = 4\pi r^2 \cdot \frac{|\vec{E}_{\max}|^2}{2Z_{F0}G} \quad (4.92)$$

Die eingespeiste Leistung muss wegen der hier angenommenen Verlustfreiheit ($\eta = 1$) gleich der abgestrahlten Leistung sein. Der Strom am Speisepunkt entspricht genau dem Strom-Maximum I_0 .

$$P_S = \frac{R_S \cdot |I_0|^2}{2} \quad (4.93)$$

Gleichsetzen und Auflösen führt auf den Strahlungswiderstand.

$$R_S = \frac{2}{|I_0|^2} \cdot 4\pi r^2 \cdot \frac{|\vec{E}_{\max}|^2}{2Z_{F0}G} \quad (4.94)$$

$$= \frac{Z_{F0}}{\pi G} = 73,17 \Omega \quad (4.95)$$

Der Strahlungswiderstand des Halbwellendipols ist damit in einer sehr brauchbaren Größenordnung und gibt einen Hinweis, warum neben der 50 Ω -Technik auch die 75 Ω -Technik sehr weit verbreitet ist.

4.4.2. Dipol der Länge λ

Für den Dipol mit Länge $l = 2h = \lambda$ können die Eigenschaften analog zum Halbwellendipol hergeleitet werden. Als Ausgangspunkt wird auch hier der Verlauf der Stromverteilung als sinusförmig angenommen.

$$I(z) = I_0 \sin(\beta(h - |z|)) \quad (4.96)$$

Das elektrische Feld ist damit

$$E_\theta(r_0, \theta) = j \frac{Z_{F0} I_0}{2 \pi r_0} \cdot e^{-j\beta r_0} \cdot \frac{\cos(\pi \cos(\theta)) - \cos(\pi)}{\sin(\theta)} \quad (4.97)$$

$$= j \frac{Z_{F0} I_0}{2 \pi r_0} \cdot e^{-j\beta r_0} \cdot \frac{\cos(\pi \cos(\theta)) + 1}{\sin(\theta)}. \quad (4.98)$$

Das Maximum des elektrischen Feldes tritt ebenfalls bei $\theta = 90^\circ$ auf und ist

$$|E_{\theta, \max}(r_0)| = |E_\theta(r_0, \theta = 90^\circ)| = \frac{Z_{F0} I_0}{\pi r_0}. \quad (4.99)$$

Daraus kann die Richtcharakteristic $C(\theta)$ des Halbwellendipols bestimmt werden.

$$C(\theta) = \frac{|E_\theta(r_0, \theta)|}{|E_{\theta, \max}(r_0)|} \bigg|_{r_0 \rightarrow \infty} = \frac{\cos(\pi \cos(\theta)) + 1}{2 \cdot \sin(\theta)} \quad (4.100)$$

Der Richtfaktor D ist

$$D = \frac{4 \pi}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi C^2(\theta) \cdot \sin(\theta) d\theta d\phi} \quad (4.101)$$

$$= \frac{2}{\int_0^\pi \frac{\cos^2(\pi \cos(\theta))}{2 \cdot \sin(\theta)} d\theta} = 2,41 = 3,82 \text{ dBi}. \quad (4.102)$$

Die Richtfunktion $D(\phi, \theta) = D \cdot C^2(\phi, \theta)$ des längeren Dipols ist deutlich schmaler, d.h. die Richtwirkung ist größer.

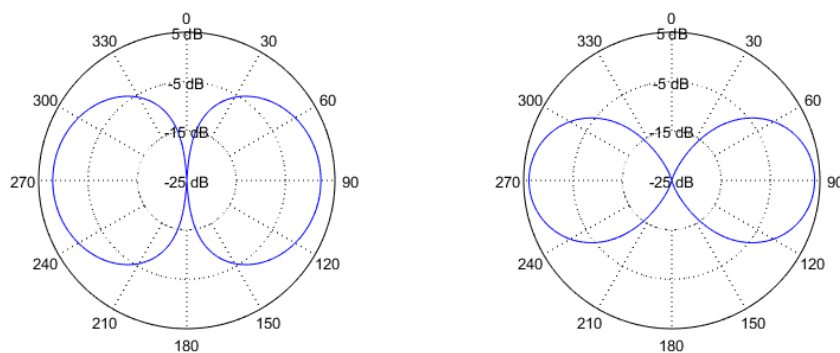


Abbildung 4.4.2: Vertikale Richtfunktionen von Halbwellendipol und Dipol der Länge λ

Der Strahlungswiderstand R_S des λ -Dipols kann nicht direkt berechnet werden, da der Strom am Speisepunkt $z = 0$ gleich Null ist. Die eingespeiste Leistung wäre nach Theorie also Null, was nicht der Realität entsprechen kann. Allerdings ist der Speisestrom tatsächlich sehr, sehr klein. Der Strahlungswiderstand muss deshalb sehr groß sein. Dies ist auch tatsächlich der Fall und macht die Anpassung von λ -Dipolen schwierig. Der genaue Strahlungswiderstand hängt hauptsächlich von der Dipoldicke ab. Der Strahlungswiderstand wird mit zunehmender Dicke kleiner. Er kann in der Größenordnung von $R_S > 1\text{ k}\Omega$ liegen.

4.4.3. Monopole

Die Eigenschaften eines Monopols der Höhe h können direkt aus den Eigenschaften des Dipols der Länge $l = 2h$ bestimmt werden. Dies ist möglich aufgrund des Spiegelungsprinzips.

Die leitene Grundfläche des Monopols ist eine Kurzschlusssebene. Dies bedeutet, das Dipol und Monopol im oberen Halbraum exakt die gleichen Wellen anregen. Unterhalb der Grundfläche erzeugt der Monopol natürlich keine Wellen.

Die abgestrahlte Leistung des Monopols ist bei gleichem Strom genau halb so groß. Damit ist auch die Eingangsleistung und folglich auch die Eingangsspannung und der Strahlungswiderstand R_S des Monopols nur halb so groß.

Der Gewinn des Monopols ist dagegen doppelt so groß.

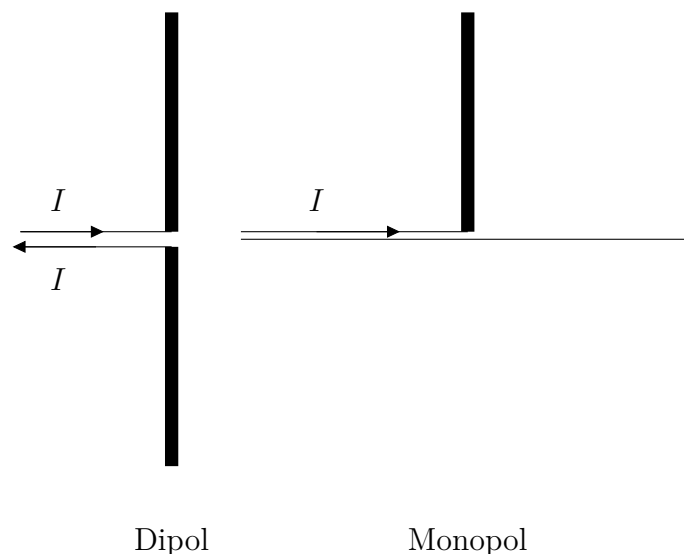


Abbildung 4.4.3: Dipol- und Monopol-Antenne

4.5. Antennenformen

Je nach Anwendung sind verschiedene Antennen notwendig. Sehr oft sind jedoch Antennen verlangt, die in einer Vorzugsrichtung senden und einen größeren Gewinn besitzen. Beispiele hierfür sind die Parabolantenne, die Linsenantenne oder auch die Yagi-Antenne.

4.5.1. Reflektorantenne

Mittels eines metallischen Reflektors kann die Wirkfläche bzw. der Gewinn einer sogenannten Primärantenne stark vergrößert werden. Diese Primärantenne z.B. ein Dipol oder Hornstrahler sitzt im Brennpunkt vor dem Reflektor. Die von der Primärantenne radial ausgehende Leistung wird durch den Reflektor in eine bestimmte Vorzugsrichtung abgelenkt. Falls die Abmessungen wie Brennweite f und Reflektordurchmesser D groß gegenüber der Wellenlänge sind, kann die Reflektorantenne mit Hilfe der Strahlenoptik erklärt werden.

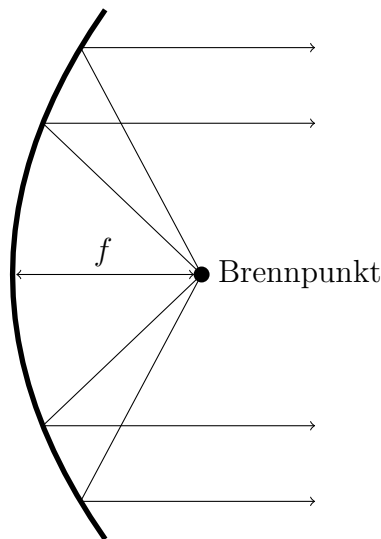


Abbildung 4.5.1: Parabolspiegelantenne

Es kann mathematisch gezeigt werden, dass die Reflektorfläche einem Paraboloid entspricht. Der Schnitt durch den Reflektor ist eine Parabel.

Für die Reflektorantenne kann grob angenommen werden, dass die Antennenwirkfläche A_W ca. 50 Prozent bis 75 Prozent der tatsächlichen geometrischen Fläche des Reflektors entspricht. Mit dieser Kenntniss lassen sich Näherungsformeln für den Antennengewinn einer Reflektorantenne in Abhängigkeit der Reflektordurchmessers D finden.

$$G \approx 0,6 \cdot \left(\frac{\pi D}{\lambda} \right)^2 \quad (4.103)$$

Die Halbwertsbreite α_{HB} bzw. der Öffnungswinkel der Reflektorantenne kann ebenfalls grob abgeschätzt werden.

$$\alpha_{HB} \approx \frac{200}{\sqrt{G}} \text{ Grad} \quad (4.104)$$

Dabei gilt: Je höher der Gewinn G der Antenne, desto kleiner der Öffnungswinkel. Damit ist beispielweise eine größere Reflektorantenne schwieriger auszurichten als eine kleinere.

Typische Parabolspiegelantennen erreichen Gewinne von mehr als 30 dBi. Werden kleinere Gewinne benötigt, ist meist eine andere Antennenform z.B. Hornstrahler oder Yagi-Antenne aufgrund des besseren Wirkungsgrades vorteilhafter.

4.5.2. Linsenantennen

Linsenantennen arbeiten nach dem gleichen Prinzip der Strahlbündelung. Statt eines Reflektors wird jedoch eine dielektrische Linse eingesetzt. Ein typisches Anwendungsgebiet von Linsenantennen sind z.B. Auto-Radare zur Abstandskontrolle.

Übungsblatt 1

Aufgabe 1

Es sind zwei Anpassnetzwerke gegeben, die jeweils aus einer Induktivität und einer Kapazität aufgebaut sind. Der Verbraucher $R_A = 100\ \Omega$ soll in beiden Schaltungen so angepasst werden, dass am Eingang des Zweitorts $R_E = 50\ \Omega$ sichtbar sind.

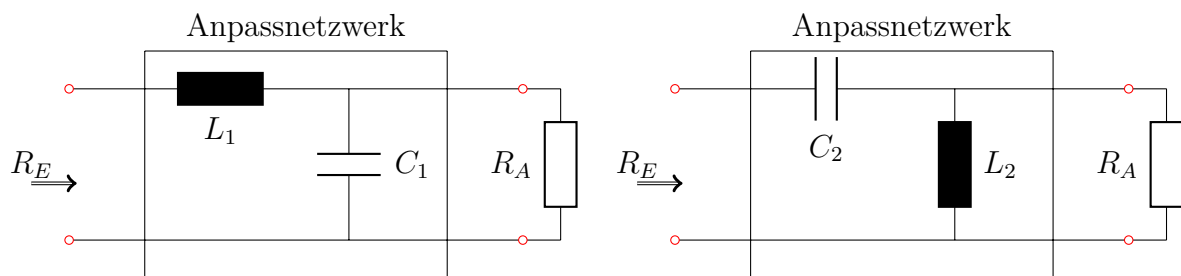


Abbildung 4.5.2: Anpassnetzwerk in Tiefpass- und Hochpassform

- Berechnen Sie C_1 und L_1 bei Frequenz $\frac{500}{2\pi}$ MHz.
- Berechnen Sie C_2 und L_2 bei der gleichen Frequenz.
- Zeichnen Sie die Transformationswege in ein Smith-Chart ein.

Aufgabe 2

Aus der Leitungstheorie sind folgende Gleichungen bekannt, die Spannung und Strom auf einer verlustlosen Leitung ausgehend von U_0 und I_0 am Leitungsabschluss angeben.

$$U(l) = U_0 \cos(\beta l) + j I_0 Z_L \sin(\beta l)$$

$$I(l) = I_0 \cos(\beta l) + j \frac{U_0}{Z_L} \sin(\beta l)$$

- Stellen Sie mit Hilfe dieser Leitungsgleichungen allgemein die Kettenmatrix $[A_l]$ eines Leitungsstücks der Länge l auf.
- Wie lautet die Kettenmatrix einer verlustlosen Leitung der Länge $l = \frac{\lambda}{4}$?

Aufgabe 3

Es sind mehrere Netzwerke mit Serien- und/oder Parallelimpedanzen gegeben.

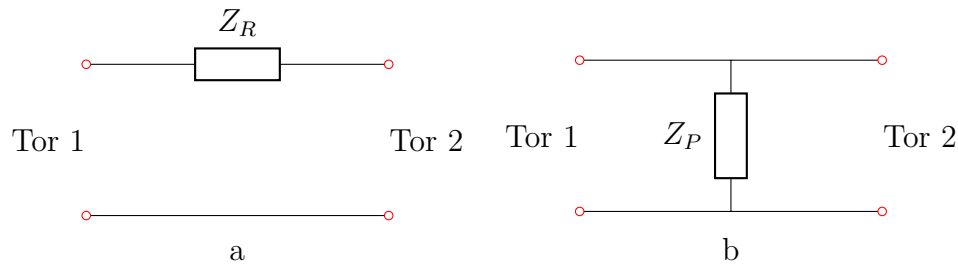


Abbildung 4.5.3: Reihenschaltung (a) und Parallelschaltung (b)

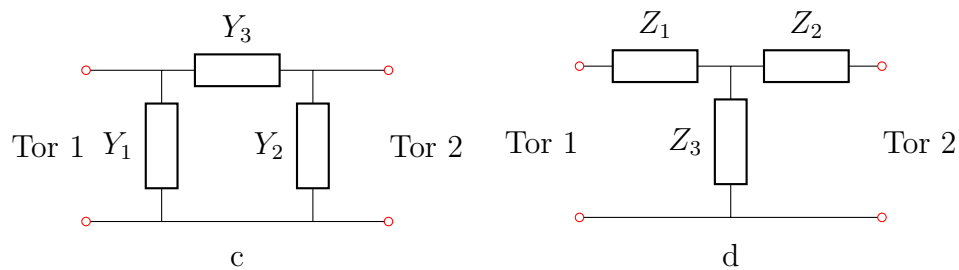


Abbildung 4.5.4: π -Schaltung (c) und T-Schaltung (d)

- Berechnen Sie die Impedanzmatrizen $[Z]$ und die Admittanzmatrizen $[Y]$ der dargestellten Netzwerke (Reihenschaltung, Parallelschaltung, π und T-Schaltung). Ist die Bestimmung beider Matrizen immer möglich?
- Geben Sie die Kettenmatrizen der Netzwerke an. Verwenden Sie hierzu die Messvorschriften der Kettenmatrixelemente.
- Verketten Sie Reihen- und Parallelschaltung und nochmals Reihenschaltung und prüfen Sie, ob Ihr Ergebnis der Kettenmatrix der T-Schaltung entspricht.

Übungsblatt 2

Aufgabe 1

Ein Zweitor besteht aus einer Impedanz Z nach Abbildung 4.5.5. Leitungseffekte sollen hier nicht berücksichtigt werden. Alle Leitungen werden als unendlich kurz angenommen.

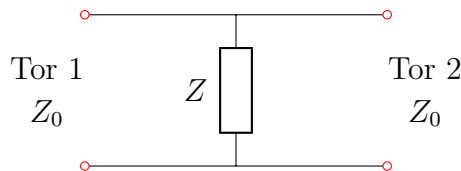


Abbildung 4.5.5: Zweitor mit Querimpedanz

- Berechnen Sie die S-Parameter des Zweitors mit der Bezugsgröße Z_0 an beiden Toren.
- Überprüfen Sie die Plausibilität Ihres Ergebnisses mit Hilfe folgender Grenzfälle: Kurzschluss ($Z = 0$), Leerlauf ($Z \rightarrow \infty$).

Aufgabe 2

Folgende Abbildung zeigt eine Leitung mit Wellenwiderstand Z_L der Länge l .

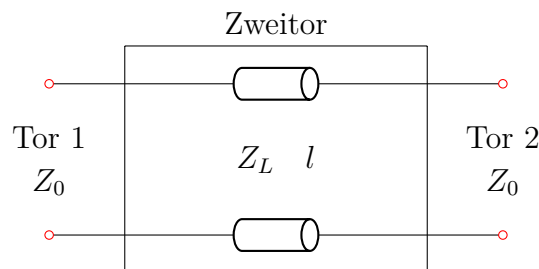


Abbildung 4.5.6: Leitung

- Skizzieren Sie die Beschaltung zur Ermittlung der Streuparameter. Berechnen Sie die Streuparameter des Zweitors mit Bezugsimpedanz $Z_0 = Z_L$. Zeigen Sie mit Hilfe der Streumatrix, dass das Zweitor verlustfrei ist.
- Ermitteln Sie hieraus die Streumatrizen für Viertelwellentransformatoren und Halbwellentransformatoren.
- Eine gegebene Lastimpedanz R_2 soll an eine gegebene Quellimpedanz R_1 durch Wahl eines geeigneten Wellenwiderstandes Z_L des Viertelwellentransformators angepasst werden. Wie muss Z_L gewählt werden?

- d) Stellen Sie die Transformation zur Leistungsanpassung aus der vorausgegangenen Aufgabe in einem Smith-Diagramm dar. Verwenden Sie als Bezugsgröße den Wellenwiderstand Z_L des Viertelwellenleiters. Der Widerstand R_2 der Last betrage $R_2 = 2 Z_L$. Welche Transformation würde ein Halbwellentransformator leisten? Gibt es andere Leitungslängen, die zur Anpassung ebenfalls funktionieren?

Aufgabe 3

Ein Zweitor aus konzentrierten Bauelementen (Zweitor A mit Serienimpedanz Z) wird mit einem Zweitor bestehend aus einer verlustlosen Leitung mit Wellenwiderstand Z_L und Leitungslänge l verkettet.

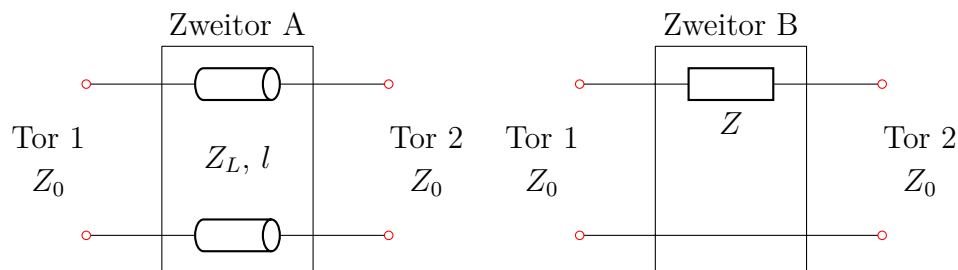


Abbildung 4.5.7: Zweitore A und B

- Berechnen Sie die Streuparameter für Zweitor A mit der Bezugsgröße $Z_0 = Z_L$ an beiden Toren.
- Berechnen Sie die Streuparameter für Zweitor B mit der Bezugsgröße Z_0 an beiden Toren.
- Prüfen Sie die Plausibilität Ihrer Berechnung für die Grenzfälle: $Z = 0$, $Z \rightarrow \infty$.
- Es seien $Z = Z_L = Z_0$ und $l = \lambda/4$. Wie lauten die Streumatrizen der Zweitore A und B? Wie sind die Leistungsbilanzen von Zweitor A bzw. Zweitor B?
- Kette von A und B für den Fall $Z = Z_L = Z_0$ und $l = \lambda/4$: Berechnen Sie die Streuparameter der Kette bestehend aus Zweitor A und Zweitor B.
- Berechnen Sie die Streumatrix der Kette von A und B über die entsprechenden Kettenmatrizen der Zweitore A und B, die bereits aus den Aufgaben aus Übungsblatt 1 bekannt sind.

Übungsblatt 3

Aufgabe 1

Gegeben sind die resistiven Signalteiler nach Abbildungen 4.5.8 und 4.5.9. Der Bezugswiderstand aller Tore ist $Z_0 = R_0$.

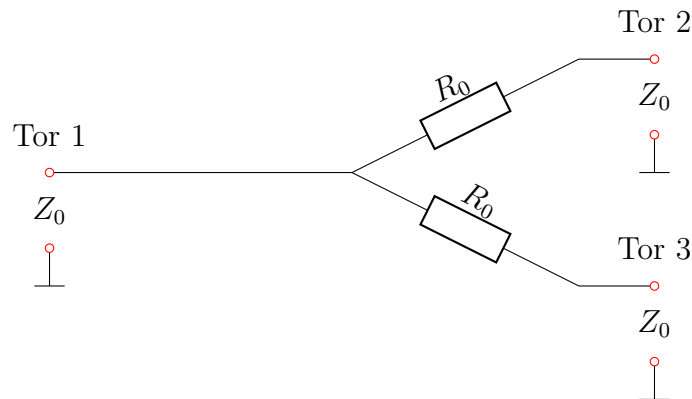


Abbildung 4.5.8: Resistiver Signalteiler

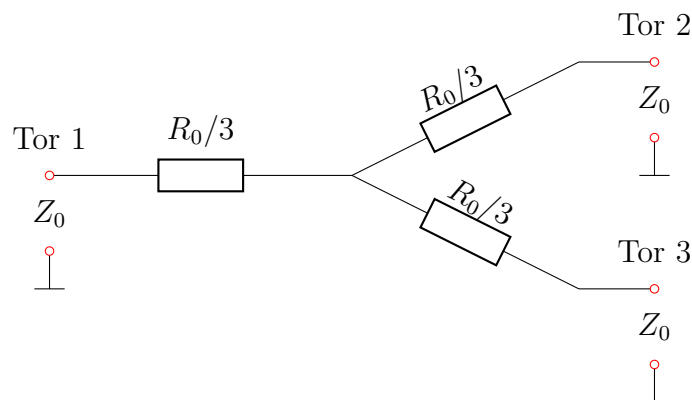


Abbildung 4.5.9: Vollständig symmetrischer resistiver Signalteiler

- Berechnen Sie die Streumatrix des Signalteilers nach Abbildung 4.5.8.
- Wie ist die Leistungsbilanz im Vorwärtsbetrieb, d.h. bei Einspeisung an Tor 1? Berechnen Sie konkret den Anteil der reflektierten Leistung an Tor 1, den Anteil der Leistung, der an Tor 2 und Tor 3 gelangt und den Anteil der Leistung, der im Signalteiler verloren geht.
- Berechnen Sie die Streumatrix des Signalteilers nach Abbildung 4.5.9.
- Berechnen Sie die Leistungsbilanz des zweiten Signalteilers im Vorwärtsbetrieb.

- e) Es soll nun an Tor 1 eingespeist werden. Wie groß ist die Phasenverschiebung der Ausgangswellen an den Toren 2 und 3?
- f) Was ist der Vorteil des vollständig symmetrischen Teilers?

Aufgabe 2

Reaktive Netzwerke bestehen aus verlustfreien passiven Bauteilen, d.h. Reaktanzen (Blindwiderstände) bzw. Suszeptanzen (Blindleitwerte). Sie sind aus diskreten Bauteilen aufgebaut oder enthalten Leitungselemente.

Der in Abbildung 4.5.10 dargestellte reaktive Signalteiler soll im folgenden untersucht werden. Der Signalteiler besitzt einen Kondensator sowie eine Spule. Leitungseffekte sollen hier vernachlässigt werden. Der Bezugswiderstand aller Tore ist $Z_0 = R_0$.

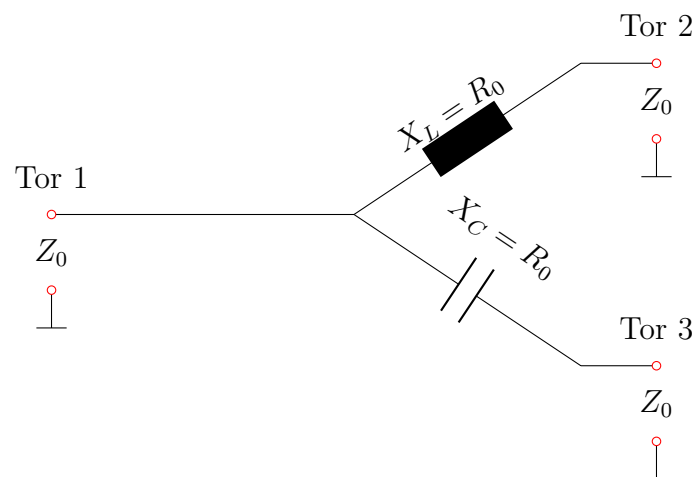


Abbildung 4.5.10: Reaktiver Signalteiler

- a) Berechnen Sie die Streumatrix des reaktiven Teilers
- b) Prüfen Sie den Teiler mittels der im Script angegebenen Formel $[S]^T \cdot [S]^* = [E]$ auf Verlustfreiheit.
- c) Ist der Teiler reziprok? Ist er allseitig angepasst?
- d) Es soll nun an Tor 1 eingespeist werden. Wie groß ist die Phasenverschiebung der Ausgangswellen an den Toren 2 und 3?
- e) Welchen Nachteil und welchen Vorteil besitzt dieser reaktive Teiler gegenüber einem vollständig symmetrischen resistiven Teiler?

Übungsblatt 4

Aufgabe 1

Gegeben ist das symmetrische Dämpfungsglied in folgender Abbildung. Die Bezugswiderstände der Tore 1 und 2 sind R_0 . Die Parallelwiderstände sind $R_1 = 3 R_0$ und der Serienwiderstand ist $R_2 = \frac{3}{4} R_0$.

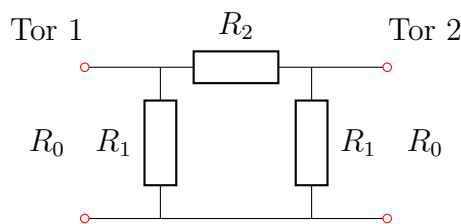


Abbildung 4.5.11: π -Dämpfungsglied

- Zeichnen Sie das Ersatzschaltbild des Dämpfungsglieds im Even-Mode (Gleichtakt) und berechnen Sie den Reflexionsfaktor s_{11e} .
- Zeichnen Sie das Ersatzschaltbild des Dämpfungsglieds im Odd-Mode (Gegentakt) und berechnen Sie den Reflexionsfaktor s_{11o} .
- Berechnen Sie die gesamte Streumatrix des Dämpfungsglieds aus den Ergebnissen der Teilaufgaben a) und b).
- Überprüfen Sie Ihr Ergebnis aus c), indem Sie die Streumatrix des Dämpfungsglieds mit Hilfe der Kettenmatrix bestimmen.
- Es wird nun die Leistung P_{a1} in Tor 1 eingespeist. Welcher prozentuale Anteil von P_{a1} wird
 - an Tor 1 reflektiert,
 - nach Tor 2 transmittiert,
 - vom Zweitor in Wärme umgewandelt?

Wie groß ist die Einfügedämpfung des Dämpfungsglieds in dB?

Aufgabe 2

Gegeben ist ein sogenannter Rat-Race-Koppler nach Abbildung 4.5.20. Der Wellenwiderstand der Ringleitung beträgt $\sqrt{2}Z_0$. Der Bezugswiderstand der Tore sei Z_0 . Die Leitungslängen der Anschlussleitungen sind zu vernachlässigen bzw. besitzen die Länge Null.

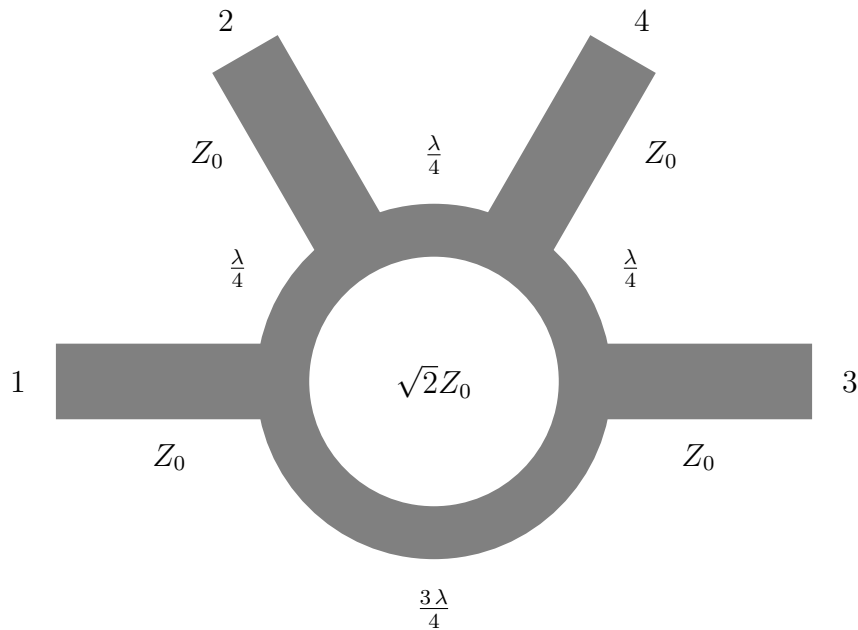


Abbildung 4.5.12: Rat-Race-Koppler

- Bestimmen Sie die Symmetrieebene und zeichnen die Ersatzschaltbilder im Gleichtaktbetrieb und Gegentaktbetrieb.
- Berechnen Sie die Streumatrix für den Gleichtaktfall mit Hilfe der Kettenmatrizen.
- Bestimmen Sie die Streumatrix für den Gegentaktfall. Können Sie die Ergebnisse aus Aufgabenteil b) hierzu nutzen?
- Berechnen Sie die Streumatrix des Rat-Race-Kopplers.
- Ist der Koppler verlustfrei und reziprok? Ist er reflexionsfrei?
- Tor 1 wird als Eingang verwendet. Wie groß ist die Phasendifferenz an den Ausgängen Tor 2 und Tor 3.

Übungsblatt 5

Aufgabe 1

Dämpfungsglieder sind oftmals aus drei Widerständen als T oder π -Netzwerk aufgebaut. Hier wird ein T -Dämpfungsglied berechnet. Das Netzwerk soll die Anforderung der Reflexionsfreiheit erfüllen und eine Einfügedämpfung von 6 dB besitzen.

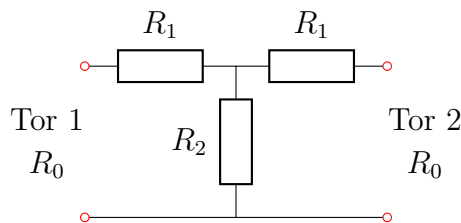


Abbildung 4.5.13: T -Dämpfungsglied

- Bestimmen die Streumatrix des Dämpfungsglieds aus den gegebenen Anforderungen.
- Berechnen Sie die Widerstände R_1 und R_2 . Der Bezugswiderstand an beiden Toren ist $R_0 = 50 \Omega$. Hinweis: Es kann die Kettenmatrix verwendet werden.

Aufgabe 2

Gegeben ist ein Branchline-Koppler nach Abbildung 4.5.22 in Mikrostreifentechnik, der aus vier Viertelwelleleitungen besteht. Der Wellenwiderstand der beiden waagrechten Leitungen beträgt Z_0 , der Wellenwiderstand der beiden senkrechten Leitungen beträgt $\frac{Z_0}{\sqrt{2}}$. Der Bezugswiderstand aller Tore ist Z_0 . Die Leitungslängen der Anschlussleitungen sind zu vernachlässigen.

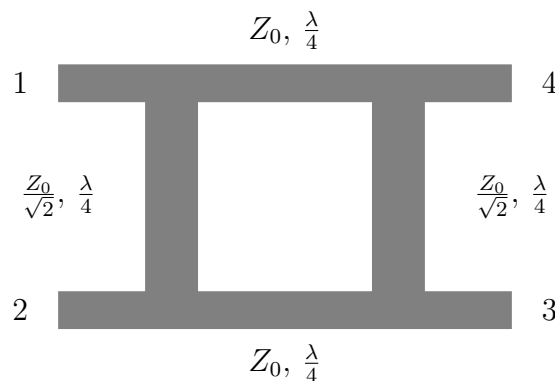


Abbildung 4.5.14: Branchline-Koppler

- a) Bestimmen Sie die Symmetrieebenen des Kopplers.
- b) Zeichnen die Ersatzschaltbilder im Gleichtaktbetrieb und Gegentaktbetrieb für eine Symmetrieebene.
- c) Berechnen Sie die Streumatrix für den Gleichtaktfall mit Hilfe der Kettenmatrizen.
- d) Bestimmen Sie die Streumatrix für den Gegentaktfall.
- e) Berechnen Sie die Streumatrix des gesamten Kopplers.
- f) Tor 1 wird als Eingang verwendet. Wie groß ist die Phasendifferenz zwischen den Ausgangswellen an Tor 2 und Tor 3.

Übungsblatt 6

Aufgabe 1

Eine als verlustlos angenommene Streifenleitung besitze den Wellenwiderstand $Z_L = 55,9 \Omega$ und die Phasengeschwindigkeit $v_p = \frac{\omega}{\beta} = 1,5 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$.

- a) Welchen Induktivitätsbelag L' und welchen Kapazitätsbelag C' besitzt die Leitung?
- b) Es wird für die folgenden Aufgaben angenommen, dass eine zweite identische Leitung parallel zur ersten geführt wird und die Leitungen mit dem Koppelfaktor $k = 0,2$ verkoppelt sind. Wie ist das Verhältnis der Wellenwiderstände im Odd- und Even-Mode $\frac{Z_{Le}}{Z_{Lo}}$ in Abhängigkeit von k ? Die Ausbreitungskonstanten beider Modi seien hier identisch $\beta_o = \beta_e$.
- c) Berechnen Sie den gegenseitigen Induktivitätsbelag M' und den Kapazitätsbelag C'_k .
- d) Berechnen Sie die Wellenwiderstände Z_{Le} und Z_{Lo} .
- e) Berechnen Sie die Phasengeschwindigkeiten v_{pe} und v_{po} im Even- und Odd-Mode. Unterscheiden Sie sich von der gegebenen Phasengeschwindigkeit v_p für eine einzelne ungekoppelte Leitung?
- f) Es wird mit diesen Leitungen ein Richtkoppler der Länge $l = \frac{\lambda}{4}$ aufgebaut. Mit welchem Bezugswiderstand Z_0 muss der Richtkoppler an allen Toren abgeschossen werden, damit dieser reflexionsfrei ist.

Übungsblatt 7

Das Aufgabenblatt wird zukünftig die Aufgaben zum Richtkoppler und dem Stepped-Impedance Filter beinhalten.

Übungsblatt 8

Aufgabe 1

Gegeben ist eine lineare Dipolantenne der Länge $l = 2h$. Die Stromverteilung wird als sinusförmig angenommen:

$$I(t, z) = I_0 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot (h - |z|)\right) \cdot e^{j\omega t} \quad (4.105)$$

a) Das elektrische Fernfeld eines infinitesimal kleinen herzschen Dipols ist:

$$dE_\theta = j \cdot \frac{Z_{F0} I(t, z)}{2r} \cdot \frac{dz}{\lambda} \cdot \sin(\theta) \cdot e^{-j\beta r} \quad (4.106)$$

Berechnen Sie das elektrische Fernfeld der gegebenen linearen Antenne. Hinweis:

$$\int_{z=0}^h \sin(\beta \cdot (h - z)) \cdot \cos(\beta z \cos(\theta)) dz = \frac{\cos(\beta h \cos(\theta)) \cdot \cos(\beta h)}{\beta \cdot \sin^2(\theta)} \quad (4.107)$$

- b) Skizzieren Sie das Vertikaldiagramm einer linearen Dipolantenne der Länge $l = \lambda/2$ und $l = \lambda$.
- c) Wie groß ist die abgestrahlte Leistung in Abhängigkeit von I_0 für eine Antenne der Länge $l = \lambda/2$? Lösen Sie das Integral numerisch mit Hilfe von z.B. Matlab.
- d) Wie groß ist der Gewinn einer linearen Antenne der Länge $l = \lambda/2$.
- e) Wie groß ist der reelle Eingangswiderstand der Antenne mit Länge $l = \lambda/2$.

Aufgabe 2

Die Eigenschaften einer Parabolspiegelantenne mit Durchmesser 80 cm sollen im folgenden bestimmt werden.

- a) Weisen Sie mathematisch nach, dass der Spiegel bzw. der Reflektor die Form einer Parabel besitzen muss.
- b) Berechnen Sie den Gewinn der Antenne. Es soll angenommen werden, dass die Antennenwirkfläche 75 Prozent der geometrischen Fläche der Antenne beträgt.
- c) Schätzen Sie den Öffnungswinkel α_{HB} (Halbwertsbreite) der Parabolspiegelantenne ab. Leiten Sie zunächst einen allgemeinen Zusammenhang zwischen Öffnungswinkel und Antennengewinn her.

Aufgabe 3

Im 2,4 GHz Band des WLAN ist eine maximale Sendeleistung von 20 dBm EIRP erlaubt. Ein angenommener Sender und ein Empfänger besitzen Antennen mit einem Gewinn von 5 dBi. Der Sender wird so betrieben, dass die maximale EIRP erreicht wird.

- a) Um die Reichweite zu erhöhen, werden nun Antennen mit einem Gewinn von 8 dBi eingesetzt. Wie stark muss die Senderleistung gedrosselt werden, um die maximale EIRP einzuhalten?
- b) Warum steigt die Reichweite trotz der Reduzierung der Senderleistung?

Übungsblatt 9

Aufgabe 1

Ein geostationärer Satellit befindet sich in 36000 km Höhe und sendet mit einer Leistung von 100 Watt im 12 GHz-Band. Die Sendeantenne besitze einen Gewinn von 25 dBi, die Empfangsantenne am Erdboden 35 dBi. Die Effekte der Erdatmosphäre sollen in den folgenden Aufgaben unberücksichtigt bleiben.

- a) Wie groß ist die $EIRP$ des Satelliten in dBm?
- b) Wie groß ist die Freiraumdämpfung L_{F0} in dB?
- c) Berechnen Sie die Empfangsleistung in dBm und in Watt.

Aufgabe 2

In dieser Aufgabe sollen die Eigenschaften einer Dipolantenne mit Hilfe der Matlab Antenna-Toolbox untersucht werden. Die Frequenz f_0 des Sendesignals soll 100 MHz betragen.

- a) Erzeugen Sie in Matlab eine Dipolantenne `ant` der Länge $l = \lambda/2$. Nutzen Sie hierzu die Funktion `ant = dipole('length',1)`. Betrachten Sie das 3D-Richtdiagramm mittels `pattern(ant,f0)`.
- b) Variieren Sie die Länge des Dipols auf $l = \lambda$, $l = \frac{3}{2}\lambda$, $l = 2\lambda$ und $l = 4\lambda$. Wie verändert sich das 3D-Richtdiagramm und der Gewinn. Können Sie die Veränderung erklären?
- c) Betrachten Sie die Stromverteilung auf der Antenne mittels `current(ant,f0)` und ermitteln Sie mit `impedance(ant,f0)` die Eingangsimpedanz der Antenne. Stellen Sie einen Zusammenhang fest?

Übungsblatt 10

Aufgabe 1

Zwei in z -Richtung ausgerichtete Halbwellendipole werden jeweils von einem Strom I_0 gespeist. Dipol 1 befinde sich bei $(x_1 = \frac{d}{2}, y_1 = 0)$ und Dipol 2 bei $(x_2 = -\frac{d}{2}, y_2 = 0)$. Sie besitzen zunächst einen Abstand $d = \frac{\lambda}{2}$ voneinander.

- a) Berechnen Sie das gemeinsame elektrische Fernfeld in der Azimuth-Ebene bei $\theta = 90^\circ$.
- b) Geben Sie die Richtcharakteristik $C(\phi, \theta = 90^\circ)$ an.
- c) Wie groß ist der Gewinn der Antenne ($\eta = 1$)?
- d) Der Abstand wird nun auf $d = \lambda$ vergrößert. Wie ändert sich die Richtcharakteristik?
- e) Hat sich der Gewinn verändert?
- f) Prüfen Sie Ihre Ergebnisse aus den vorherigen Teilaufgaben mit Hilfe der Matlab Antenna-Toolbox. Ein Dipolpaar mit Abstand $d = \frac{\lambda}{2}$ kann beispielsweise mit
`ant = linearArray('ElementSpacing', lambda0/2, 'NumElements', 2)`
erzeugt werden. Die Eigenschaften der Antennenelemente können dann über
`ant.Element`
geprüft werden. Stellen Sie die Länge der Antennenelemente auf
`ant.Element.Length = lambda0/2.`

Aufgabe 2

Gegeben sei ein Antennenarray, indem die nach z ausgerichteten Dipole einen Abstand von $d = \frac{\lambda}{2}$ besitzen.

- a) Bestimmen Sie die Richtcharakteristik $C(\phi, \theta = 90^\circ)$, falls 4 Elemente verwendet werden.
- b) Bestimmen Sie die Richtcharakteristik $C(\phi, \theta = 90^\circ)$, falls 8 Elemente verwendet werden. Wie verändert sie sich generell bei Zunahme der Elementanzahl.

Lösung zu Übungsblatt 1

Aufgabe 1

a) Es kann folgende Gleichung aufgestellt werden:

$$R_E = X_{L1} + R_A || jX_{C1} = jX_{L1} + \frac{jR_A X_{C1}}{R_A + jX_{C1}} \quad (4.108)$$

Multiplizieren mit $R_A + jX_{C1}$ auf beiden Seiten und Sortieren nach Real- und Imaginärteilen ergibt zwei Gleichungen für die beiden Unbekannten.

$$\begin{aligned} R_E R_A &= -X_{L1} X_{C1} \\ R_E X_{C1} &= X_{L1} R_A + X_{C1} R_A \end{aligned} \quad (4.109)$$

Auflösen des Gleichungssystems ergibt:

$$\begin{aligned} X_{C1} &= \pm R_A \sqrt{\frac{R_E}{R_E - R_A}} \\ X_{L1} &= -\frac{R_E R_A}{X_{C1}} \end{aligned} \quad (4.110)$$

Der Wert für X_{C1} muss negativ sein (Kapazität). Es sind nach Einsetzen der gegebenen Werte $X_{C1} = -100\Omega$, $X_{L1} = 50\Omega$ und damit $C_1 = 20pF$ und $L_1 = 100nH$

b) Es sind $X_{C2} = -50\Omega$, $X_{L2} = 100\Omega$ und damit $C_2 = 40pF$ und $L_2 = 200nH$. Die Herleitung ist äquivalent zur vorherigen Aufgabe.

c) Der Bezugswiderstand des Smithchart ist 50Ω . Der normierte Lastwiderstand ist $z_L = \frac{Z_L}{50\Omega} = 2$ und kann damit ins Smith-Diagramm eingetragen werden. Zur Berücksichtigung der Parallelschaltung wird ein Kreis konstanten Leitwerts in das Smithchart gezeichnet, dessen Punkte durch $R = 2$ und $R = 0$ (Kurzschlusspunkt) gehen. Ausgehend von $z_L = 2$ ergeben sich die Transformationswege der beiden Schaltungen.

- Die erste Schaltung transformiert durch den parallelgeschalteten Kondensator auf dem eingezeichneten Kreis nach unten bis zum Punkt (-1,1). Anschließend transformiert die in Reihe geschaltete Spule bis in den Anpasspunkt (roter Weg), der den gewünschten 50Ω entspricht.
- Die zweite Schaltung transformiert durch die parallelgeschaltete Spule auf dem eingezeichneten Kreis nach oben bis zum Punkt (1,1). Anschließend transformiert der in Reihe geschaltete Kondensator bis in den Anpasspunkt (blaue Linie).

Welche der beiden äquivalenten Schaltungen angewendet wird, hängt von den verfügbaren Bauteilen oder ggf. von den erreichbaren Bandbreiten der beiden Schaltungen ab

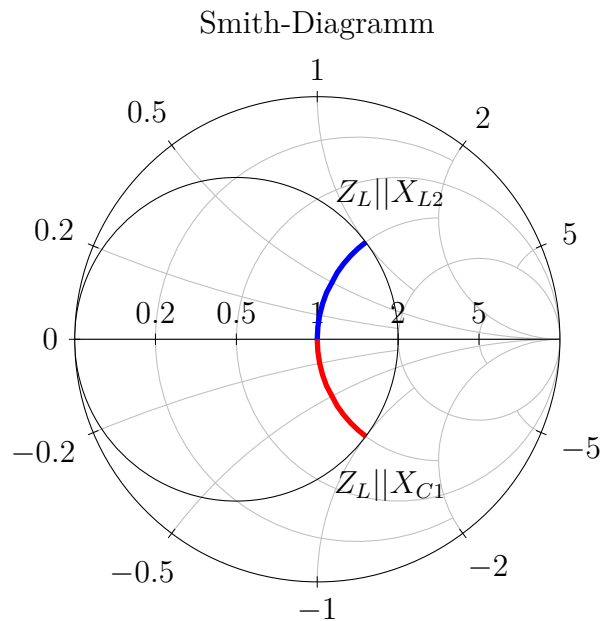


Abbildung 4.5.15: Transformationspfad

Aufgabe 2

a) Die Kettenmatrix einer Leitung mit Wellenwiderstand Z_L ist:

$$[A_l] = \begin{bmatrix} \cos(\beta l) & jZ_L \sin(\beta l) \\ j\frac{1}{Z_L} \sin(\beta l) & \cos(\beta l) \end{bmatrix} \quad (4.111)$$

b) Die Kettenmatrix eines Leitungsstücks der Länge $l = \frac{\lambda}{4}$ und Wellenwiderstand Z_L ist:

$$[A_{\frac{\lambda}{4}}] = \begin{bmatrix} 0 & jZ_L \\ j\frac{1}{Z_L} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.112)$$

Aufgabe 3

a) Die Impedanzmatrizen und Admittanzmatrizen der gegebenen Schaltungen sind folgend gegeben:

$$[Z_R] \text{ existiert nicht} \quad [Y_R] = \begin{bmatrix} \frac{1}{Z_R} & -\frac{1}{Z_R} \\ -\frac{1}{Z_R} & \frac{1}{Z_R} \end{bmatrix} \quad (4.113)$$

$$[Z_P] = \begin{bmatrix} Z_P & Z_P \\ Z_P & Z_P \end{bmatrix} \quad [Y_P] \text{ existiert nicht} \quad (4.114)$$

$$[Z_\pi] = \frac{1}{\det([Y_\pi])} \begin{bmatrix} Y_2 + Y_3 & Y_3 \\ Y_3 & Y_1 + Y_3 \end{bmatrix} \quad [Y_\pi] = \begin{bmatrix} Y_1 + Y_3 & -Y_3 \\ -Y_3 & Y_2 + Y_3 \end{bmatrix} \quad (4.115)$$

$$[Z_T] = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_3 & Z_3 \\ Z_3 & Z_2 + Z_3 \end{bmatrix} \quad [Y_T] = \frac{1}{\det([Z_T])} \begin{bmatrix} Z_2 + Z_3 & -Z_3 \\ -Z_3 & Z_1 + Z_3 \end{bmatrix} \quad (4.116)$$

b) Kettenmatrizen:

$$[A_R] = \begin{bmatrix} 1 & Z_R \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [A_P] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z_P} & 1 \end{bmatrix} \quad (4.117)$$

$$[A_\pi] = \frac{1}{Y_3} \begin{bmatrix} Y_2 + Y_3 & 1 \\ \det([Y_\pi]) & Y_1 + Y_3 \end{bmatrix} \quad [A_T] = \frac{1}{Z_3} \begin{bmatrix} Z_1 + Z_3 & \det([Z_T]) \\ 1 & Z_2 + Z_3 \end{bmatrix}$$

c) Die Verkettung wird mittels Multiplikation durchgeführt. Hier ist unbedingt auf die Reihenfolge der Multiplikationen zu achten!

$$\begin{aligned} [A_T] &= \begin{bmatrix} 1 & Z_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z_3} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & Z_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{Z_1}{Z_3} & Z_1 \\ \frac{1}{Z_3} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & Z_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{Z_1 + Z_2}{Z_3} & \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_1 Z_3}{Z_3} \\ \frac{1}{Z_3} & \frac{Z_2 + Z_3}{Z_3} \end{bmatrix} = \frac{1}{Z_3} \begin{bmatrix} Z_1 + Z_3 & \det([Z_T]) \\ 1 & Z_2 + Z_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.118)$$

Wie erwartet ist $[A_T]$ identisch zur Lösung aus der vorherigen Teilaufgabe.

Lösung zu Übungsblatt 2

Aufgabe 1

a) Berechnung des Reflexions- und des Transmissionsfaktors bei Speisung an Tor 1:

$$s_{11} = \frac{(Z||Z_0) - Z_0}{(Z||Z_0) + Z_0} = -\frac{Z_0^2}{2Z_0 Z + Z_0^2} \quad (4.119)$$

$$s_{21} = \frac{2U_2}{U_{01}} = \frac{2(Z_0||Z)}{Z_0 + (Z_0||Z)} = \frac{2Z_0 Z}{2Z_0 Z + Z_0^2} \quad (4.120)$$

Aus Symmetriegründen ist $s_{22} = s_{11}$ und $s_{12} = s_{21}$.

Alternativ kann die Streumatrix über die Impedanzmatrix und die Formel

$$[S] = ([Z] + Z_0 [E])^{-1} \cdot ([Z] - Z_0 [E]) \quad (4.121)$$

gefunden werden. Die Impedanzmatrix einer Serienimpedanz ist

$$[Z] = \begin{bmatrix} Z & Z \\ Z & Z \end{bmatrix}. \quad (4.122)$$

Eingesetzt in die gegebene Formel ergibt:

$$[S] = \begin{bmatrix} Z + Z_0 & Z \\ Z & Z + Z_0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} Z - Z_0 & Z \\ Z & Z - Z_0 \end{bmatrix} \quad (4.123)$$

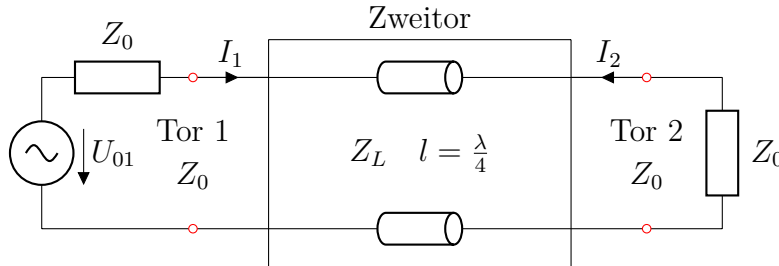
$$= \frac{1}{(Z + Z_0)^2 - Z^2} \cdot \begin{bmatrix} Z + Z_0 & -Z \\ -Z & Z + Z_0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} Z - Z_0 & Z \\ Z & Z - Z_0 \end{bmatrix} \quad (4.124)$$

$$= \frac{1}{2Z_0 Z + Z_0^2} \cdot \begin{bmatrix} -Z_0^2 & 2Z_0 Z \\ 2Z_0 Z & -Z_0^2 \end{bmatrix} \quad (4.125)$$

Das Ergebnis der beiden Lösungswege ist erwartungsgemäß identisch.

- b) Für $Z = 0$ herrscht auf beiden Seiten ein Kurzschluss. Es gilt $s_{11} = s_{22} = -1$ und $s_{12} = s_{21} = 0$. Für $Z \rightarrow \infty$ entspricht Tor 1 exakt Tor 2. Es gilt $s_{11} = s_{22} = 0$ und $s_{12} = s_{21} = 1$.

Aufgabe 2

Abbildung 4.5.16: Beschaltung zur Ermittlung der Streuparameter s_{11} und s_{21} .

- a) Die allgemeinen Vierpolgleichungen einer verlustlosen Leitung der Länge l und dem Wellenwiderstand Z_L sind:

$$\begin{aligned} U(l) &= U_0 \cos(\beta l) + j Z_L I_0 \sin(\beta l) \\ I(l) &= I_0 \cos(\beta l) + j \frac{U_0}{Z_L} \sin(\beta l) \end{aligned} \quad (4.126)$$

Angewandt auf das Zweitor entspricht $U_0 = U_2$ und $I_0 = -I_2$ (Tor 2) bzw. $U(l) = U_1$ und $I(l) = I_1$ (Tor 1). Es ist besonders auf das negative Vorzeichen bei $I_0 = -I_2$ zu achten, da innerhalb der typischen Vierpolgleichungen I_0 in entgegengesetzter Richtung definiert ist als I_2 in der gegebenen Abbildung. Bei der Bestimmung der Streuparameter ist die Leitung mit dem Bezugswiderstand Z_0 abgeschlossen. Damit gilt am Ausgang $U_2 = -I_2 Z_0$ und am Eingang der Leitung (Tor 1):

$$\begin{aligned} U_1 &= U_2 \cos(\beta l) + j \frac{Z_L}{Z_0} U_2 \sin(\beta l) \\ I_1 &= -I_2 \cos(\beta l) - j \frac{Z_0}{Z_L} I_2 \sin(\beta l) \end{aligned} \quad (4.127)$$

Für $Z_L = Z_0$ gilt weiter:

$$\begin{aligned} U_1 &= U_2 \cos(\beta l) + j U_2 \sin(\beta l) = U_2 e^{j\beta l} \\ I_1 &= -I_2 \cos(\beta l) - j I_2 \sin(\beta l) = -I_2 e^{j\beta l} \end{aligned} \quad (4.128)$$

Der Eingangswiderstand an Tor 1 ist $Z_1 = \frac{U_1}{I_1} = \frac{U_2}{-I_2} = Z_0$. Demzufolge ist der Reflexionsfaktor $s_{11} = \frac{Z_1 - Z_0}{Z_1 + Z_0} = 0$. Mithilfe des Spannungsteilers $\frac{2Z_0}{Z_0} = \frac{U_{01}}{U_1}$ kann der

Transmissionsfaktor $s_{21} = \frac{2U_2}{U_{01}}$ bestimmt werden. $s_{21} = \frac{2U_2}{2U_1} = e^{-j\beta l}$. Da die Leitung symmetrisch ist, gilt $s_{22} = s_{11}$ und $s_{12} = s_{21}$.

$$[S_l] = \begin{bmatrix} 0 & e^{-j\beta l} \\ e^{-j\beta l} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.129)$$

Das Zweitor bzw. die Leitung ist verlustfrei, da gilt:

$$|s_{11}|^2 + |s_{21}|^2 = |0|^2 + |e^{-j\beta l}|^2 = 0 + 1 = 1 \quad (4.130)$$

$$|s_{12}|^2 + |s_{22}|^2 = |e^{-j\beta l}|^2 + |0|^2 = 1 + 0 = 1 \quad (4.131)$$

- b) Durch Einsetzen von $l = \frac{\lambda}{4}$ bzw. $l = \frac{\lambda}{2}$ erhält man die Streuparameter für Viertelwellentransformatoren bzw. Halbwellentransformatoren.

$$[S_{\lambda/4}] = \begin{bmatrix} 0 & -j \\ -j & 0 \end{bmatrix} \quad (4.132)$$

$$[S_{\lambda/2}] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.133)$$

- c) Falls Tor 2 den Bezugswiderstand R_2 anstatt Z_0 besitzen soll, können die aufgestellten Gleichungen aus Teilaufgabe a) leicht modifiziert werden, indem Z_0 durch R_2 als Abschlusswiderstand ersetzt wird.

$$\begin{aligned} U_1 &= U_2 \cos(\beta l) + j \frac{Z_L}{R_2} U_2 \sin(\beta l) \\ I_1 &= I_2 \cos(\beta l) - j \frac{R_2}{Z_L} I_2 \sin(\beta l) \end{aligned} \quad (4.134)$$

Durch Wahl von $l = \frac{\lambda}{4}$ vereinfachen sich die Gleichungen.

$$\begin{aligned} U_1 &= j \frac{Z_L}{R_2} U_2 \\ I_1 &= -j \frac{R_2}{Z_L} I_2 \end{aligned} \quad (4.135)$$

Am Eingang ist dann folgender Widerstand sichtbar:

$$R_1 = \frac{U_1}{I_1} = \frac{j \frac{Z_L}{R_2} U_2}{-j \frac{R_2}{Z_L} I_2} = \frac{Z_L^2}{R_2} \quad (4.136)$$

Durch Umformen erhält man den gewünschten Wellenwiderstand Z_L

$$Z_L = \sqrt{R_1 R_2} \quad (4.137)$$

- d) Der Viertelwellenleiter transformiert die Impedanz R_2 (blauer Punkt) auf einem Halbkreis im Uhrzeigersinn zur Impedanz R_1 der Quelle (roter Punkt). Ein Halbwellenleiter würde eine ganze Drehung auf dem eingezeichneten Kreis bewirken und die Eingangsimpedanz nicht transformieren. Eine andere mögliche Leitungslänge zur Transformation ist $l = \frac{3\lambda}{4}$ (eineinhalb Drehungen).

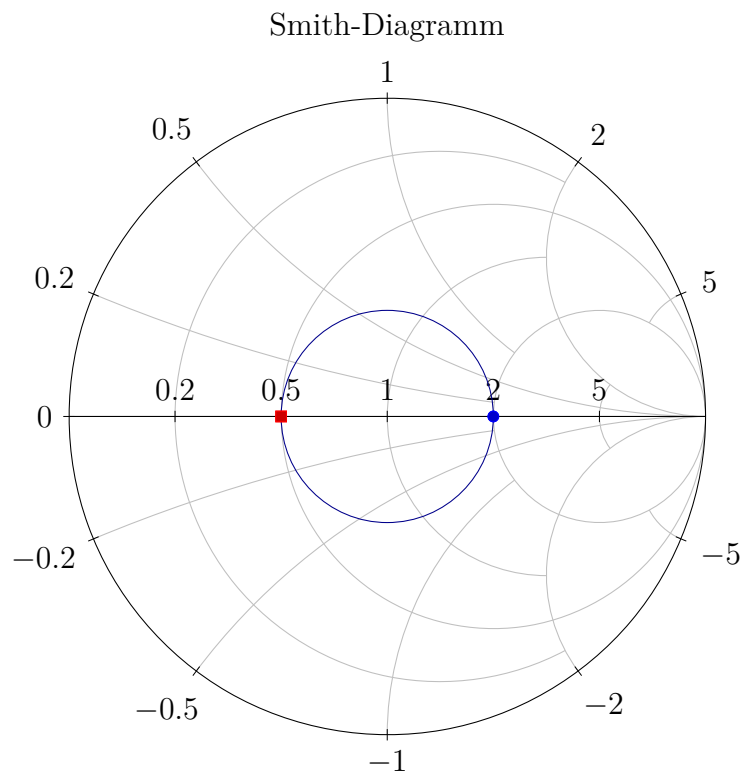


Abbildung 4.5.17: Transformation der Eingangsimpedanz durch die Leitung mit Z_L

Aufgabe 3

- a) Die allgemeinen Vierpolgleichungen einer verlustlosen Leitung der Länge l sind:

$$\begin{aligned} U(l) &= U_0 \cos(\beta l) + j Z_L I_0 \sin(\beta l) \\ I(l) &= I_0 \cos(\beta l) + j \frac{U_0}{Z_L} \sin(\beta l) \end{aligned} \quad (4.138)$$

Angewandt auf das Zweitor entspricht $U_0 = U_2$ und $I_0 = -I_2$ (Tor 2) bzw. $U(l) = U_1$ und $I(l) = I_1$ (Tor 1). Bei der Bestimmung der Streuparameter ist die Leitung mit dem Bezugswiderstand Z_L abgeschlossen. Damit gilt am Ausgang $U_2 = -I_2 Z_L$ und am Eingang der Leitung (Tor 1):

$$\begin{aligned} U_1 &= U_2 \cos(\beta l) + j U_2 \sin(\beta l) = U_2 e^{j\beta l} \\ I_1 &= -I_2 \cos(\beta l) - j I_2 \sin(\beta l) = -I_2 e^{j\beta l} \end{aligned} \quad (4.139)$$

Der Eingangswiderstand an Tor 1 ist $Z_1 = \frac{U_1}{I_1} = \frac{U_2}{-I_2} = Z_L$. Demzufolge ist der Reflexionsfaktor $s_{11} = \frac{Z_L - Z_L}{Z_L + Z_L} = 0$. Mithilfe des Spannungsteilers $\frac{2Z_L}{Z_L + Z_L} = \frac{U_{01}}{U_1}$ kann der Transmissionsfaktor $s_{21} = \frac{2U_2}{U_{01}}$ bestimmt werden. $s_{21} = \frac{2U_2}{2U_1} = e^{-j\beta l}$. Da die Leitung symmetrisch ist, gilt $s_{22} = s_{11}$ und $s_{12} = s_{21}$.

$$[S_A] = \begin{bmatrix} 0 & e^{-j\beta l} \\ e^{-j\beta l} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.140)$$

- b) Das Zweitor ist symmetrisch. Es müssen deshalb nur zwei Parameter tatsächlich berechnet werden. Die Reflexionsfaktoren ergeben sich zu

$$s_{11} = s_{22} = \frac{(Z + Z_L) - Z_L}{(Z + Z_L) + Z_L} = \frac{Z}{Z + 2Z_L}. \quad (4.141)$$

Die Transmissionsfaktoren lassen sich hier sehr leicht über den Spannungsteiler bestimmen.

$$s_{12} = s_{21} = \frac{2U_2}{U_{01}} = \frac{2Z_L}{Z + 2Z_L} \quad (4.142)$$

Die Streumatrix ist damit:

$$[S_B] = \begin{bmatrix} \frac{Z}{Z+2Z_L} & \frac{2Z_L}{Z+2Z_L} \\ \frac{2Z_L}{Z+2Z_L} & \frac{Z}{Z+2Z_L} \end{bmatrix} \quad (4.143)$$

- c) Für $Z = 0$ ist die Streumatrix die Einheitsmatrix. Die gesamte Leistung wird transmittiert.

$$[S_{B,Z=0}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.144)$$

Für $Z \rightarrow \infty$ ist die Streumatrix

$$[S_{B,Z \rightarrow \infty}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.145)$$

An beiden Toren ist ein Leerlauf sichtbar. Die Wellen werden vollständig reflektiert.

d) Die Streumatrizen sind:

$$[S_A] = \begin{bmatrix} 0 & -j \\ -j & 0 \end{bmatrix} \quad [S_B] = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.146)$$

Die Leitung (Zweitor A) ist verlustlos. Es wird die komplette Leistung transmittiert. In Zweitor B wird der Anteil $|s_{11}|^2 = |s_{22}|^2 = \frac{1}{9}$ reflektiert und der Anteil $|s_{21}|^2 = |s_{12}|^2 = \frac{4}{9}$ transmittiert. Der Anteil $1 - \frac{1}{9} - \frac{4}{9} = \frac{4}{9}$ geht im Zweitor B verloren.

e) Die Kette aus Zweitor A und Zweitor B wird im folgenden als Zweitor C bezeichnet. Am einfachsten können die Streuparameter von C über den Signalfluss ermittelt werden.

$$\begin{aligned} s_{C11} &= s_{A21} s_{B11} s_{A12} = -j \cdot \frac{1}{3} \cdot -j = -\frac{1}{3} \\ s_{C22} &= s_{B22} = \frac{1}{3} \\ s_{C21} &= s_{A21} s_{B21} = -j \cdot \frac{2}{3} = \frac{-j2}{3} \\ s_{C12} &= s_{B12} s_{A12} = \frac{2}{3} \cdot -j = \frac{-j2}{3} \end{aligned}$$

$$[S_C] = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & -j2 \\ -j2 & 1 \end{bmatrix}$$

f) Die Kettenmatrizen der Zweitore A und B sind:

$$[A_A] = \begin{bmatrix} 0 & jZ_L \\ \frac{j}{Z_L} & 0 \end{bmatrix} \quad [A_B] = \begin{bmatrix} 1 & Z_L \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Durch Multiplikation in der richtigen Reihenfolge ergibt sich die Kettenmatrix des Gesamtnetzwerks.

$$[A_C] = \begin{bmatrix} 0 & jZ_L \\ \frac{j}{Z_L} & j \end{bmatrix}$$

Die Kettenmatrix muss nun mit den bekannten Formeln in die Streumatrix umgewandelt werden.

$$\begin{aligned}
 s_{11} &= \frac{A_{11} + A_{12}/Z_L - A_{21}Z_L - A_{22}}{A_{11} + A_{12}/Z_L + A_{21}Z_L + A_{22}} = \frac{0 + j - j - j}{0 + j + j + j} = -\frac{1}{3} \\
 s_{12} &= \frac{2(A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})}{A_{11} + A_{12}/Z_L + A_{21}Z_L + A_{22}} = \frac{2(0 - j \cdot j)}{0 + j + j + j} = \frac{-j2}{3} \\
 s_{21} &= \frac{2}{A_{11} + A_{12}/Z_L + A_{21}Z_L + A_{22}} = \frac{2}{0 + j + j + j} = \frac{-j2}{3} \\
 s_{22} &= \frac{-A_{11} + A_{12}/Z_L - A_{21}Z_L + A_{22}}{A_{11} + A_{12}/Z_L + A_{21}Z_L + A_{22}} = \frac{0 + j - j + j}{0 + j + j + j} = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

Das Ergebnis entspricht erwartungsgemäß genau dem der vorherigen Aufgabe.

Lösung zu Übungsblatt 3

Aufgabe 1

- a) Um die Eingangsreflexionsfaktoren der Tore zu bestimmen, wird zunächst deren Eingangswiderstand berechnet. Der Eingangswiderstand Z_{e1} an Tor 1 ist mit $Z_0 = R_0$

$$Z_{e1} = (R_0 + Z_0) || (R_0 + Z_0) = \frac{(2 Z_0)^2}{2 Z_0 + 2 Z_0} = Z_0. \quad (4.147)$$

Über den bekannten Zusammenhang kann damit s_{11} bestimmt werden.

$$s_{11} = \frac{Z_{e1} - Z_0}{Z_{e1} + Z_0} = 0 \quad (4.148)$$

Die Eingangsreflexionsfaktoren der Tor 2 und 3 können auf die gleiche Weise berechnet werden. Aufgrund der Symmetrie der Schaltung sind natürlich beide Eingangswiderstände und auch beide Reflexionsfaktoren identisch.

$$Z_{e2} = Z_{e3} = (Z_0 || (R_0 + Z_0)) + R_0 = \frac{2 Z_0^2}{2 Z_0 + Z_0} + Z_0 = \frac{5 Z_0}{3} \quad (4.149)$$

$$s_{22} = \frac{Z_{e2} - Z_0}{Z_{e2} + Z_0} = \frac{1}{4} \quad (4.150)$$

$$s_{33} = \frac{Z_{e3} - Z_0}{Z_{e3} + Z_0} = \frac{1}{4} \quad (4.151)$$

Die Reflexionsfaktoren werden über das Spannungsverhältnis von Ausgangsspannung und Generatorspannung am Eingang berechnet. Hier bietet es sich an, das Spannungsverhältnis mit U_1 zu erweitern, um zwei einfacher zu berechnende Spannungsverhältnisse zu erhalten.

$$s_{21} = \frac{2 U_2}{U_{01}} = 2 \cdot \frac{U_1}{U_{01}} \cdot \frac{U_2}{U_1} = 2 \cdot \frac{Z_{e1}}{Z_{e1} + R_0} \cdot \frac{R_0}{R_0 + Z_0} = \frac{1}{2} \quad (4.152)$$

Aufgrund der Reziprozität gilt

$$s_{12} = s_{21} = \frac{1}{2} \quad (4.153)$$

und wegen der Symmetrie der Schaltung gilt ebenfalls

$$s_{31} = s_{13} = \frac{1}{2}. \quad (4.154)$$

Zur Berechnung von s_{32} wird das Spannungsverhältnis ebenfalls aufgesplittet.

$$s_{32} = \frac{2U_3}{U_{02}} = 2 \cdot \frac{U_1}{U_{02}} \cdot \frac{U_3}{U_1} \quad (4.155)$$

$$(4.156)$$

Das Spannungsverhältnis $\frac{U_1}{U_{02}}$ kann aus dem bereits bekannten Streuparameter s_{12} sehr einfach abgeleitet werden.

$$s_{12} = \frac{2U_1}{U_{02}} \quad \rightarrow \quad \frac{U_1}{U_{02}} = \frac{s_{12}}{2} = \frac{1}{4} \quad (4.157)$$

Das Spannungsverhältnis $\frac{U_3}{U_1}$ ist ein simpler Spannungsteiler.

$$\frac{U_3}{U_1} = \frac{R_0}{R_0 + Z_0} = \frac{1}{2} \quad (4.158)$$

Eingesetzt in die ursprüngliche Formel für s_{32} ergibt

$$s_{32} = 2 \cdot \frac{U_1}{U_{02}} \cdot \frac{U_3}{U_1} = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}. \quad (4.159)$$

Aufgrund der Reziprozität gilt wiederum $s_{23} = s_{32}$. Damit ist die gesamte Streumatrix bekannt.

$$[S] = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.160)$$

b) Anteil der reflektierten Leistung:

$$\frac{P_{b1}}{P_{a1}} = \frac{\frac{1}{2}|b_1|^2}{\frac{1}{2}|a_1|^2} = \frac{|s_{11} \cdot a_1|^2}{|a_1|^2} = |s_{11}|^2 = 0 \quad (4.161)$$

Anteil der Leistung, der nach Tor 2 bzw. Tor 3 transmittiert wird:

$$\frac{P_{b2}}{P_{a1}} = \frac{\frac{1}{2}|b_2|^2}{\frac{1}{2}|a_1|^2} = \frac{|s_{21} \cdot a_1|^2}{|a_1|^2} = |s_{21}|^2 = \frac{1}{4} \quad (4.162)$$

$$\frac{P_{b3}}{P_{a1}} = \frac{\frac{1}{2}|b_3|^2}{\frac{1}{2}|a_1|^2} = \frac{|s_{31} \cdot a_1|^2}{|a_1|^2} = |s_{31}|^2 = \frac{1}{4} \quad (4.163)$$

Die transmittierten Leistungen sind natürlich aufgrund der Symmetrie der Schaltung identisch.

Der Anteil der Leistung, der verloren geht ist der Leistungsanteil, die an keinem Tor mehr hinausläuft.

$$\frac{P_{Verlust}}{P_{a1}} = 1 - \frac{P_{b1}}{P_{a1}} - \frac{P_{b2}}{P_{a1}} - \frac{P_{b3}}{P_{a1}} = \frac{1}{2} \quad (4.164)$$

- c) Äquivalent zur Teilaufgabe a) werden zunächst die Reflexionsfaktoren über die Eingangswiderstände bestimmt.

$$Z_{e1} = \left(\left(Z_0 + \frac{R_0}{3} \right) \parallel \left(Z_0 + \frac{R_0}{3} \right) \right) + \frac{R_0}{3} = \frac{2R_0}{3} + \frac{R_0}{3} = R_0 \quad (4.165)$$

Da der Widerstand Z_{e1} gleich dem Bezugswiderstand R_0 ist, verschwindet der Reflexionsfaktor an Tor 1. Aufgrund der vollständigen Symmetrie der Schaltung sind die Reflexionsfaktoren der Tore 2 und 3 gleich Null. Es gilt:

$$s_{11} = s_{22} = s_{33} = 0 \quad (4.166)$$

Die Transmissionsfaktoren sind aufgrund der Symmetrie ebenfalls alle identisch. Exemplarisch wird hier s_{21} berechnet. Das Spannungsverhältnis wird zur Vereinfachung mit der Spannung am Verzweigungspunkt U_v erweitert.

$$s_{21} = \frac{2U_2}{U_{01}} = 2 \cdot \frac{U_v}{U_{01}} \cdot \frac{U_2}{U_v} \quad (4.167)$$

Die resultierenden Spannungsverhältnisse lassen sich relativ einfach berechnen.

$$\frac{U_v}{U_{01}} = \frac{\frac{2}{3}R_0}{Z_0 + \frac{1}{3}R_0 + \frac{2}{3}R_0} = \frac{1}{3} \quad (4.168)$$

$$\frac{U_2}{U_v} = \frac{Z_0}{Z_0 + \frac{R_0}{3}} = \frac{3}{4} \quad (4.169)$$

Durch Einsetzen erhält man den gewünschten Transmissionsfaktor.

$$s_{21} = \frac{2U_2}{U_{01}} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \quad (4.170)$$

Da alle Transmissionsfaktoren aufgrund der Symmetrie und der Reziprozität identisch sind, kann sofort die Streumatrix angegeben werden.

$$[S] = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.171)$$

- d) Die Streuparameter s_{21} und s_{31} sind beide reell. Der Teiler bewirkt also keine Phasenverschiebung. Es sind deshalb auch die Ausgangswellen der Tore 2 und 3 in Phase, besitzen also keine Phasenverschiebung gegeneinander.
- e) Der Vorteil des vollständig symmetrischen Teilers ist, dass er allseitig angepasst ist. Es kann jedes beliebige Tor als Eingangstor verwendet werden.

Aufgabe 2

- a) Zur Berechnung der Reflexionsfaktoren wird wie üblich zunächst der Eingangswiderstand des entsprechenden Tors bestimmt.

Reflexionsfaktor an Tor 1:

$$\begin{aligned} Z_{e1} &= (jX_L + R_0) || (-jX_C + R_0) = \frac{(jR_0 + R_0) \cdot (-jR_0 + R_0)}{jR_0 + R_0 - jR_0 + R_0} = R_0 \\ s_{11} &= \frac{Z_{e1} - R_0}{Z_{e1} + R_0} = \frac{R_0 - R_0}{R_0 + R_0} = 0 \end{aligned} \quad (4.172)$$

Reflexionsfaktor an Tor 2:

$$\begin{aligned} Z_{e2} &= jX_L + R_0 || (-jX_C + R_0) = jR_0 + \frac{R_0 \cdot (-jR_0 + R_0)}{R_0 - jR_0 + R_0} = \frac{3+4j}{5} R_0 \\ s_{22} &= \frac{Z_{e2} - R_0}{Z_{e2} + R_0} = \frac{\frac{3+4j}{5} R_0 - R_0}{\frac{3+4j}{5} R_0 + R_0} = \frac{-2+4j}{8+4j} = \frac{j}{2} \end{aligned} \quad (4.173)$$

Reflexionsfaktor an Tor 3:

$$\begin{aligned}
 Z_{e3} &= -jX_C + R_0 || (jX_L + R_0) = -jR_0 + \frac{R_0 \cdot (jR_0 + R_0)}{R_0 + jR_0 + R_0} = \frac{3-4j}{5} R_0 \\
 s_{33} &= \frac{Z_{e3} - R_0}{Z_{e3} + R_0} = \frac{\frac{3-4j}{5} R_0 - R_0}{\frac{3-4j}{5} R_0 + R_0} = \frac{-2-4j}{8-4j} = -\frac{j}{2}
 \end{aligned} \tag{4.174}$$

Die Transmissionsfaktorberechnung geschieht über die Spannungsverhältnisse:

$$s_{21} = \frac{2U_2}{U_{01}} = 2 \cdot \frac{U_1}{U_{01}} \cdot \frac{U_2}{U_1} \tag{4.175}$$

$$= 2 \cdot \frac{Z_{e1}}{Z_{e1} + R_0} \cdot \frac{R_0}{R_0 + jX_L} \tag{4.176}$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1-j}{2} = \frac{1-j}{2} \tag{4.177}$$

$$s_{31} = \frac{2U_3}{U_{01}} = 2 \cdot \frac{U_1}{U_{01}} \cdot \frac{U_3}{U_1} \tag{4.178}$$

$$= 2 \cdot \frac{Z_{e1}}{Z_{e1} + R_0} \cdot \frac{R_0}{R_0 - jX_C} \tag{4.179}$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1+j}{2} = \frac{1+j}{2} \tag{4.180}$$

$$s_{32} = \frac{2U_3}{U_{02}} = 2 \cdot \frac{U_1}{U_{02}} \cdot \frac{U_3}{U_1} \tag{4.181}$$

$$= 2 \cdot \frac{(R_0 - jX_C) || R_0}{R_0 + jX_L + (R_0 - jX_C) || R_0} \cdot \frac{R_0}{R_0 - jX_C} \tag{4.182}$$

$$= 2 \cdot \frac{1-j}{4} \cdot \frac{1+j}{2} = \frac{1}{2} \tag{4.183}$$

Da das Zweitor reziprok ist, gilt $s_{12} = s_{21}$, $s_{13} = s_{31}$ und $s_{23} = s_{32}$. Es sind damit alle Streuparameter bekannt.

$$[S] = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1-j & 1+j \\ 1-j & j & 1 \\ 1+j & 1 & -j \end{bmatrix} \tag{4.184}$$

b) Test auf Verlustlosigkeit:

$$[S]^T \cdot [S]^* = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1-j & 1+j \\ 1-j & j & 1 \\ 1+j & 1 & -j \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1+j & 1-j \\ 1+j & j & 1 \\ 1-j & 1 & -j \end{bmatrix} \quad (4.185)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = [E] \quad (4.186)$$

Da das Ergebnis der Einheitsmatrix entspricht, ist der Teiler verlustlos. Dieses Ergebnis war auch zu erwarten, da weder Spule noch Kondensator verlustbehaftet sind.

- c) Der Teiler ist natürlich reziprok, da keine richtungsabhängigen Bauteile verwendet wurden. Der Teiler besteht nur aus einer Spule und einem Kondensator.

Der Teiler ist nicht allseitig angepasst. Lediglich Tor 1 ist angepasst.

- d) Es wird die Welle a_1 eingespeist. Die Wellen b_2 und b_3 laufen aus Tor 2 bzw. Tor 3 hinaus.

$$b_2 = s_{21} a_1 = \frac{1-j}{2} a_1 \quad (4.187)$$

$$b_3 = s_{31} a_1 = \frac{1+j}{2} a_1 \quad (4.188)$$

Die Welle b_2 eilt der Eingangswelle a_1 um 45° nach, die Welle b_3 eilt ihr um 45° voraus. Welle b_3 eilt damit Welle b_2 um 90° voraus.

- e) Ein Nachteil ist, dass der reaktive Teiler nicht allseitig angepasst ist. Da der reaktive Teiler verlustfrei und reziprok ist, kann er als Dreitor nicht allseitig angepasst sein.

Ein Vorteil des reaktiven Teilers ist natürlich die Verlustfreiheit.

Lösung zu Übungsblatt 4

Aufgabe 1

a) Der Reflexionsfaktor im Even-Mode ist:

$$s_{11e} = \frac{R_1 - R_0}{R_1 + R_0} = \frac{3R_0 - R_0}{3R_0 + R_0} = \frac{1}{2} \quad (4.189)$$

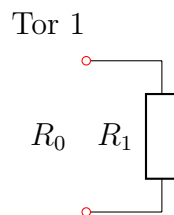


Abbildung 4.5.18: π -Dämpfungsglied im Even-Mode

b) Der Reflexionsfaktor im Odd-Mode ist:

$$s_{11o} = \frac{R_1 || \frac{R_2}{2} - R_0}{R_1 || \frac{R_2}{2} + R_0} = \frac{3R_0 || \frac{3R_0}{8} - R_0}{3R_0 || \frac{3R_0}{8} + R_0} = \frac{\frac{R_0}{3} - R_0}{\frac{R_0}{3} + R_0} = -\frac{1}{2} \quad (4.190)$$

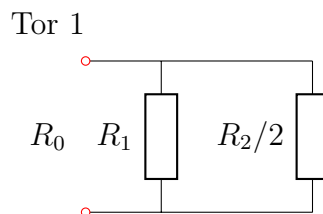


Abbildung 4.5.19: π -Dämpfungsglied im Odd-Mode

c) Überlagerung von Gleichtakt und Gegentakt:

$$s_{11} = \frac{1}{2}(s_{11e} + s_{11o}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = 0 \quad (4.191)$$

$$s_{21} = \frac{1}{2}(s_{11e} - s_{11o}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{2} \quad (4.192)$$

Da das Zweitor reziprok und symmetrisch ist, gilt $s_{22} = s_{11}$ und $s_{12} = s_{21}$.

Die gesamte Streumatrix ist

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.193)$$

- d) Die Kettenmatrizen von zwei Parallelwiderständen und einem Serienwiderstand müssen in der richtigen Reihenfolge multipliziert werden.

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{3R_0} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{3R_0}{4} \\ \frac{1}{R_0} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{3R_0} & 1 \end{bmatrix} \quad (4.194)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \frac{3R_0}{4} \\ \frac{1}{3R_0} & \frac{5}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{3R_0} & 1 \end{bmatrix} \quad (4.195)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3R_0}{4} \\ \frac{4}{3} & \frac{5}{4} \end{bmatrix} \quad (4.196)$$

Nun können die Streuparameter über die bekannten Formeln aus der Kettenmatrix bestimmt werden.

$$s_{11} = \frac{\frac{5}{4} + \frac{3}{4} - \frac{3}{4} - \frac{5}{4}}{\frac{5}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{5}{4}} = 0 \quad (4.197)$$

$$s_{12} = \frac{2 \left(\frac{5}{4} \cdot \frac{5}{4} - \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \right)}{\frac{5}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{5}{4}} = \frac{1}{2} \quad (4.198)$$

$$s_{21} = \frac{2}{\frac{5}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{5}{4}} = \frac{1}{2} \quad (4.199)$$

$$s_{22} = \frac{-\frac{5}{4} + \frac{3}{4} - \frac{3}{4} + \frac{5}{4}}{\frac{5}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{5}{4}} = 0 \quad (4.200)$$

- e) Es wird keine Leistung an Tor 1 reflektiert, da $s_{11} = 0$. Der Anteil, der nach Tor 2 transmittiert wird beträgt

$$|s_{21}|^2 = \frac{1}{4} = 25\%. \quad (4.201)$$

Die restliche Leistung, d.h. 75% wird im Dämpfungsglied in Wärme umgewandelt.

Die Einfügedämpfung beträgt $IL = -20 \cdot \log_{10}(|s_{21}|) \approx 6 \text{ dB}$

Aufgabe 2

Gegeben ist ein sogenannter Rat-Race-Koppler nach Abbildung 4.5.20. Der Wellenwiderstand der Ringleitung beträgt $\sqrt{2}Z_0$. Der Bezugswiderstand der Tore sei Z_0 . Die Leitungslängen der Anschlussleitungen sind zu vernachlässigen bzw. besitzen die Länge Null.

- a) Die Symmetrieebene verläuft senkrecht durch die Mitte des Rings, sodass die $\frac{\lambda}{4}$ -Leitung oben und die $\frac{3\lambda}{4}$ -Leitung unten jeweils in der Hälfte durchtrennt werden. Im Even-Mode entstehen an diesen Trennstellen Leerläufe, im Odd-Mode hingegen Kurzschlüsse.

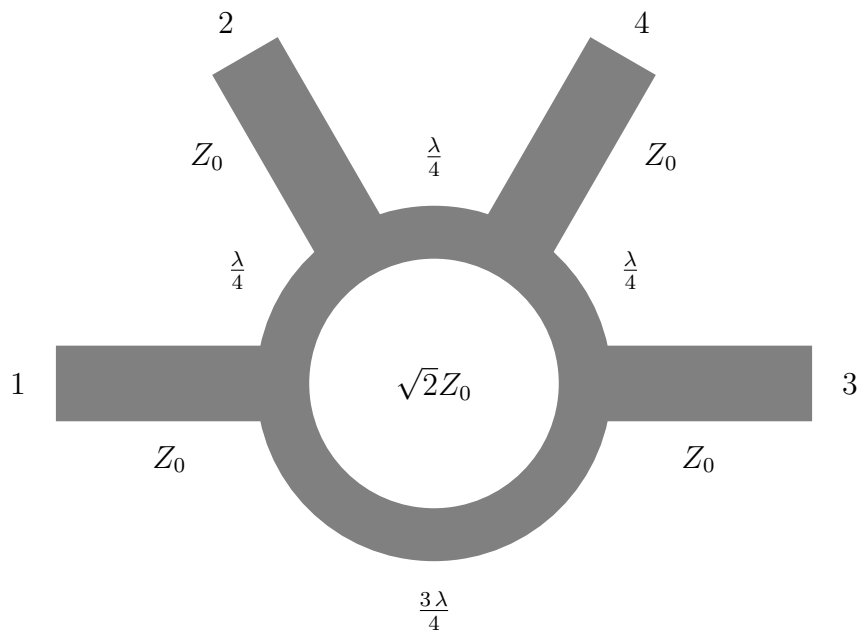


Abbildung 4.5.20: Rat-Race-Koppler

- Z_{1e} : Leerlaufende $\frac{3\lambda}{8}$ -Leitung
- Z_{2e} : Leerlaufende $\frac{\lambda}{8}$ -Leitung
- Z_{1o} : Kurzgeschlossene $\frac{3\lambda}{8}$ -Leitung
- Z_{2o} : Kurzgeschlossene $\frac{\lambda}{8}$ -Leitung

Diese leerlaufenden bzw. kurzgeschlossenen Leitungsstücke werden in den Ersatzschaltbildern durch die Impedanzen Z_{1e} und Z_{2e} bzw. Z_{1o} und Z_{2o} ersetzt.

b) Die Impedanzen der beiden Stichleitungen im Leerlauf sind:

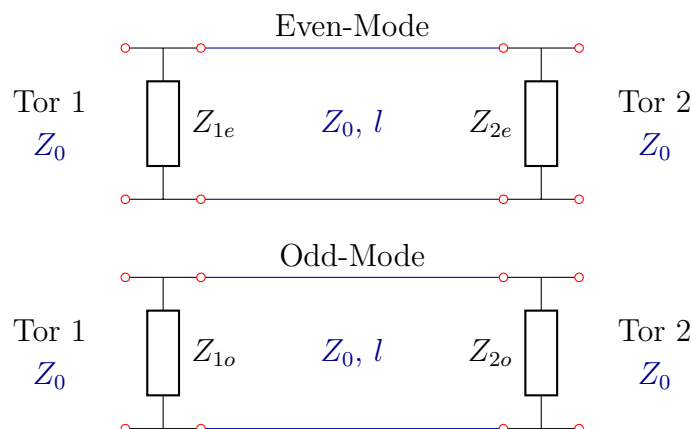


Abbildung 4.5.21: Ersatzschaltbild im Even-Mode und Odd-Mode

$$\begin{aligned}
Z_{1e} &= -j\sqrt{2}Z_0 \underbrace{\tan\left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{3\lambda}{8}\right)}_{-1} = j\sqrt{2}Z_0 \\
Z_{2e} &= -j\sqrt{2}Z_0 \underbrace{\tan\left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{1\lambda}{8}\right)}_1 = -j\sqrt{2}Z_0
\end{aligned} \tag{4.202}$$

Die Kettenmatrizen können damit angegeben werden.

$$[A_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-j}{\sqrt{2}Z_0} & 1 \end{bmatrix} \quad [A_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{j}{\sqrt{2}Z_0} & 1 \end{bmatrix} \tag{4.203}$$

Die Kettenmatrix der $\frac{\lambda}{4}$ -Leitung ist mit

$$[A_{\frac{\lambda}{4}}] = \begin{bmatrix} 0 & j\sqrt{2}Z_0 \\ \frac{j}{\sqrt{2}Z_0} & 0 \end{bmatrix} \tag{4.204}$$

bekannt. Die Kettenmatrix des gesamten Ersatzschaltbilds des Even-Modes ergibt sich aus Multiplikation der Einzelmatrizen.

$$[A_e] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-j}{\sqrt{2}Z_0} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & j\sqrt{2}Z_0 \\ \frac{j}{\sqrt{2}Z_0} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{j}{\sqrt{2}Z_0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & j\sqrt{2}Z_0 \\ \frac{j\sqrt{2}}{Z_0} & 1 \end{bmatrix} \tag{4.205}$$

Mit den im Script gegebenen Formeln zur Umrechnung der Kettenmatrix in S-Parameter erhält man:

$$\begin{aligned}
s_{11e} &= \frac{-1 + j\sqrt{2} - j\sqrt{2} - 1}{-1 + j\sqrt{2} + j\sqrt{2} + 1} = \frac{j}{\sqrt{2}} \\
s_{12e} &= \frac{2(-1 \cdot 1 + 2)}{-1 + j\sqrt{2} + j\sqrt{2} + 1} = \frac{-j}{\sqrt{2}} \\
s_{21e} &= \frac{2}{-1 + j\sqrt{2} + j\sqrt{2} + 1} = \frac{-j}{\sqrt{2}} \\
s_{22e} &= \frac{1 + j\sqrt{2} - j\sqrt{2} + 1}{-1 + j\sqrt{2} + j\sqrt{2} + 1} = \frac{-j}{\sqrt{2}}
\end{aligned} \tag{4.206}$$

- c) Das Ersatzschaltbild des Odd-Mode ist gespiegelt, da eine leerlaufende $\frac{\lambda}{8}$ -Leitung die gleiche Impedanz besitzt wie die eine kurzgeschlossene $\frac{3\lambda}{8}$ -Leitung. Die zusätzliche Länge von $\frac{\lambda}{4}$ transformiert einen Kurzschluss in einen Leerlauf. Es gilt deshalb $Z_{1o} = Z_{2e}$ und $Z_{2o} = Z_{1e}$.

Damit lassen sich auch die S-Parameter sehr leicht angeben.

$$\begin{aligned}
 s_{11o} &= s_{22e} = \frac{-j}{\sqrt{2}} \\
 s_{12o} &= s_{21e} = \frac{-j}{\sqrt{2}} \\
 s_{21o} &= s_{12e} = \frac{-j}{\sqrt{2}} \\
 s_{22o} &= s_{11e} = \frac{j}{\sqrt{2}}
 \end{aligned} \tag{4.207}$$

d) Es wird Even- und Odd-Mode überlagert.

$$\begin{aligned}
 s_{11} &= \frac{1}{2} (s_{11e} + s_{11o}) = 0 \\
 s_{12} &= \frac{1}{2} (s_{12e} + s_{12o}) = \frac{-j}{\sqrt{2}} \\
 s_{21} &= \frac{1}{2} (s_{21e} + s_{21o}) = \frac{-j}{\sqrt{2}} \\
 s_{22} &= \frac{1}{2} (s_{22e} + s_{22o}) = 0
 \end{aligned} \tag{4.208}$$

Aufgrund der Symmetrie besitzt Tor 3 denselben Reflexionsfaktor wie Tor 1 und Tor 4 denselben wie Tor 2. Außerdem verhält sich Tor 3 gegenüber Tor 4 genauso wie Tor 1 gegenüber Tor 2.

$$\begin{aligned}
 s_{33} &= s_{11} = 0 \\
 s_{34} &= s_{12} = \frac{-j}{\sqrt{2}} \\
 s_{43} &= s_{21} = \frac{-j}{\sqrt{2}} \\
 s_{44} &= s_{22} = 0
 \end{aligned} \tag{4.209}$$

Die restlichen S-Parameter sind mit Ausnutzung der Reziprozität:

$$\begin{aligned}
 s_{24} &= s_{42} = \frac{1}{2} (s_{22e} - s_{22o}) = \frac{-j}{\sqrt{2}} \\
 s_{13} &= s_{31} = \frac{1}{2} (s_{11e} - s_{11o}) = \frac{j}{\sqrt{2}} \\
 s_{14} &= s_{41} = s_{23} = s_{32} = \frac{1}{2} (s_{12e} - s_{12o}) = 0
 \end{aligned} \tag{4.210}$$

Die gesamte Streumatrix des Rat-Race-Kopplers kann damit ausgefüllt werden.

$$[S_{Ratrace}] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-j}{\sqrt{2}} & \frac{j}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{-j}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{-j}{\sqrt{2}} \\ \frac{j}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{j}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{-j}{\sqrt{2}} & \frac{j}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.211)$$

- e) Er ist verlustfrei, da kleine resistiven Elemente vorhanden sind. Er ist reziprok, da keine richtungsabhängigen Elemente verwendet sind. Der Koppler ist reflexionsfrei (angepasst), da alle s_{ii} verschwinden.
- f) Einspeisung von $a_1 = 1$. Daraus folgt $b_2 = s_{21}a_1 = \frac{-j}{\sqrt{2}}$ und $b_3 = s_{31}a_1 = \frac{j}{\sqrt{2}}$. Die Phasendifferenz zwischen Tor 2 und Tor 3 ist 180° . Der Rat-Race-Koppler wird deshalb oft auch als 180° -Koppler bezeichnet.

Lösung zu Übungsblatt 5

Aufgabe 1

- a) Da das Dämpfungsglied reflexionsfrei sein soll, ist $s_{11} = s_{22} = 0$. Die Transmissionsfaktoren ergeben sich aus der geforderten Einfügedämpfung.

$$IL_{21} = -20 \log_{10}(|s_{21}|) \rightarrow |s_{21}| = 10^{-\frac{IL_{21}}{20}} = \frac{1}{2}$$

Da nur Widerstände und keine Reaktanzen verwendet wurden, ist die Phase des Transmissionsfaktors Null, sodass $s_{21} = \frac{1}{2}$. Aufgrund der Symmetrie gilt $s_{12} = s_{21}$.

$$[S_{6dB}] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

- b) Die Kettenmatrix des Dämpfungsglieds entsteht durch Multiplikation der Kettenmatrizen der einzelnen Teilelemente des Netzwerks.

$$[A_T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R_1} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & R_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R_1} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R_1+R_2}{R_2} & \frac{R_1^2+R_2R_1}{R_2} \\ \frac{1}{R_2} & \frac{R_1+R_2}{R_2} \end{bmatrix}$$

Mit den bekannten Formeln zur Umrechnung der Kettenmatrix in die Elemente der Streumatrix können Bedingungen für R_1 und R_2 gefunden werden. Die Reflexionsfaktoren werden wie folgt aus den Kettenmatrixelementen bestimmt:

$$\begin{aligned} s_{11} = 0 &= \frac{A_{11} + A_{12}/R_0 - A_{21}R_0 - A_{22}}{A_{11} + A_{12}/R_0 + A_{21}R_0 + A_{22}} \\ s_{22} = 0 &= \frac{-A_{11} + A_{12}/R_0 - A_{21}R_0 + A_{22}}{A_{11} + A_{12}/R_0 + A_{21}R_0 + A_{22}} \end{aligned}$$

Hieraus kann abgelesen werden, dass $A_{11} = A_{22}$ und $A_{12}R_0 = \frac{A_{21}}{R_0}$ gelten muss. Für die Transmissionsfaktoren gilt damit:

$$\begin{aligned} s_{12} = \frac{1}{2} &= \frac{2(A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})}{A_{11} + A_{12}/R_0 + A_{21}R_0 + A_{22}} = \frac{A_{11}^2 - A_{21}^2R_0^2}{A_{11} + A_{21}R_0} \\ s_{21} = \frac{1}{2} &= \frac{2}{A_{11} + A_{12}/R_0 + A_{21}R_0 + A_{22}} = \frac{1}{A_{11} + A_{21}R_0} \end{aligned}$$

Aus der Gleichung für s_{21} kann die erste Bedingung abgeleitet werden:

$$A_{11} + A_{21}R_0 = 2 \quad \rightarrow \quad \frac{R_1 + R_2}{R_2} + \frac{R_0}{R_2} = 2 \quad \rightarrow \quad R_1 + R_0 = R_2$$

Die Gleichung für s_{12} liefert die zweite Bedingung.

$$A_{11}^2 - A_{21}^2 R_0^2 = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{(R_1 + R_2)^2}{R_2^2} + \frac{R_0^2}{R_2^2} = 1 \quad \rightarrow \quad R_1^2 + 2R_1R_2 = R_0^2$$

Beide Bedingungen ineinander eingesetzt, ergibt eine quadratische Gleichung für R_1

$$3R_1^2 + 2R_0R_1 - R_0^2 = 0$$

Die Lösung einer quadratischen Gleichung der Form $x^2 + px + q = 0$ ist mit $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{p^2 - 4q}$ gegeben. Angewandt auf die Gleichung für R_1 ergibt:

$$\begin{aligned} R_1 &= -\frac{1}{3}R_0 \pm \sqrt{\left(\frac{1}{3}R_0\right)^2 - \frac{R_0^2}{3}} \\ R_1 &= -\frac{1}{3}R_0 \pm \frac{2}{3}R_0 \end{aligned}$$

Da R_1 positiv sein muss, kann nur eine Lösung verwendet werden und es gilt $R_1 = \frac{R_0}{3}$. Der Widerstand R_2 kann über die zuvor aufgestellte erste Bedingung ermittelt werden ($R_2 = R_0 + R_1$). Für den gegebenen Wert des Bezugswiderstands $R_0 = 50 \Omega$ sind die Widerstände R_1 und R_2 :

$$\begin{aligned} R_1 &= 16\frac{2}{3} \Omega \\ R_2 &= 66\frac{2}{3} \Omega \end{aligned}$$

Aufgabe 2

- a) Der Branchlinekoppler besitzt zwei Symmetrieebenen, eine senkrechte und eine waagerechte. Zur Berechnung des Kopplers mittels des Gleichtakt- und Gegentaktbetriebs kann eine Ebene beliebig ausgewählt werden.

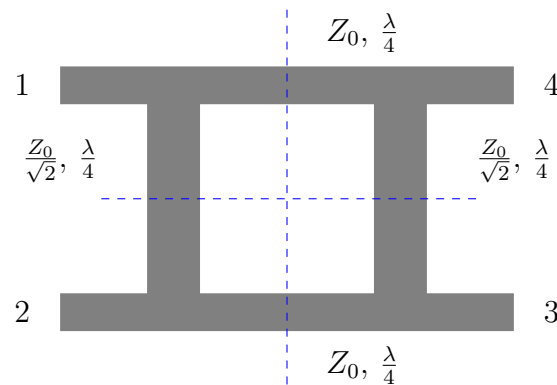


Abbildung 4.5.22: Branchline-Koppler mit Symmetrieebenen

- b) Es wird im folgenden die waagerechte Symmetrieebene verwendet. Abbildung 4.5.23 zeigt hierzu die Ersatzschaltbilder im Even-Mode und Odd-Mode. In beiden Modi existiert die Viertelwellenleitung mit Wellenwiderstand Z_0 zwischen den Toren 1 und 4. Die Widerstände Z_e im Even-Mode bzw. Z_o im Odd-Mode resultieren aus den Leitungen, die von Tor 1 bzw. Tor 4 zur Symmetrieebene hin verlaufen. Im Even-Mode ist Z_e also der Ersatzwiderstand einer offenen Leitung der Länge $\frac{\lambda}{8}$ mit Wellenwiderstand $\frac{Z_0}{\sqrt{2}}$. Z_o ist hingegen der Ersatzwiderstand einer kurzgeschlossenen Leitung der Länge $\frac{\lambda}{8}$ mit Wellenwiderstand $\frac{Z_0}{\sqrt{2}}$ im Odd-Mode.

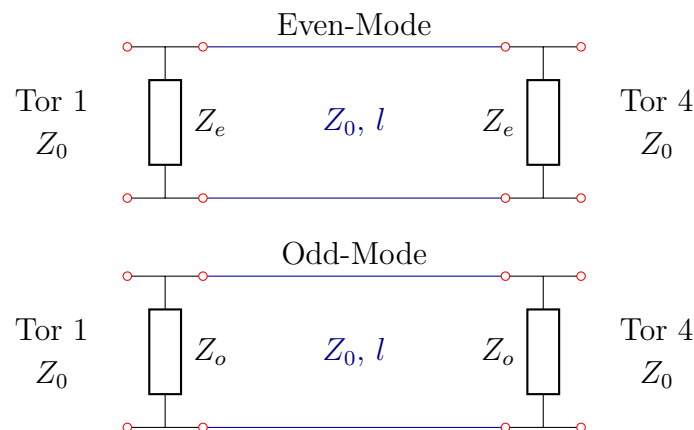


Abbildung 4.5.23: Ersatzschaltbild im Even-Mode und Odd-Mode

- c) Zunächst muss der Ersatzwiderstand Z_e bestimmt werden. Dieser kann aus dem Reflexionsfaktor r am Eingang der offenen Leitung bestimmt werden. Hierzu wird die gut bekannte Formel für den Reflexionsfaktor nach Z_e umgestellt.

$$r = \frac{Z_e - Z_L}{Z_e + Z_L} \quad Z_e = Z_L \frac{1 + r}{1 - r} \quad (4.212)$$

Ein offener Leitungsabschluss besitzt den Reflexionsfaktor $r_{\text{Leerlauf}} = 1$. Dieser wird

durch die $\frac{\lambda}{8}$ -Leitung transformiert, sodass am Eingang der Leitung der Reflexionsfaktor $r = e^{-2\beta\frac{\lambda}{8}} \cdot r_{Leerlauf} = -j$ wirkt.

$$Z_e = Z_L \frac{1+r}{1-r} = \frac{Z_0}{\sqrt{2}} \frac{1-j}{1+j} = -j \frac{Z_0}{\sqrt{2}} \quad (4.213)$$

Die Kettenmatrix im Even-Mode setzt sich nun zusammen aus den Kettenmatrizen eines Parallelwiderstands Z_e , einer Viertelwellenleitung mit $Z_L = Z_0$ und nochmals eines Parallelwiderstands Z_e .

$$[A_e] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{j\sqrt{2}}{Z_0} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & jZ_0 \\ \frac{j}{Z_0} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{j\sqrt{2}}{Z_0} & 1 \end{bmatrix} \quad (4.214)$$

$$= \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & jZ_0 \\ -\frac{j}{Z_0} & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (4.215)$$

Über die Umrechnungsvorschriften von Kettenparametern zu Streuparametern erhält man

$$s_{11e} = \frac{-\sqrt{2} + j + j + \sqrt{2}}{-\sqrt{2} + j - j - \sqrt{2}} = \frac{-j}{\sqrt{2}} \quad (4.216)$$

$$s_{41e} = \frac{2}{-\sqrt{2} + j - j - \sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \quad (4.217)$$

$$s_{14e} = s_{41e} \quad (4.218)$$

$$s_{44e} = s_{11e}. \quad (4.219)$$

- d) Die Berechnung des Odd-Mode verläuft exakt identisch. Ein kurzgeschlossener Leitungsabschluss besitzt den Reflexionsfaktor $r_{Leerlauf} = -1$. Dieser wird durch die $\frac{\lambda}{8}$ -Leitung transformiert, sodass am Eingang der Leitung der Reflexionsfaktor $r = e^{-2\beta\frac{\lambda}{8}} \cdot r_{Leerlauf} = j$ wirkt. Daraus lässt sich wie in der vorherigen Teilaufgabe die Ersatzimpedanz des Leitungsstücks berechnen,.

$$Z_o = Z_L \frac{1+r}{1-r} = \frac{Z_0}{\sqrt{2}} \frac{1+j}{1-j} = j \frac{Z_0}{\sqrt{2}} \quad (4.220)$$

Aufstellen der Kettenmatrix für den Odd-Mode:

$$[A_o] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{j\sqrt{2}}{Z_0} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & jZ_0 \\ \frac{j}{Z_0} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{j\sqrt{2}}{Z_0} & 1 \end{bmatrix} \quad (4.221)$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{2} & jZ_0 \\ -\frac{j}{Z_0} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (4.222)$$

Hieraus können wie üblich die Streuparameter bestimmt werden.

$$s_{11o} = \frac{-\sqrt{2} + j - j - \sqrt{2}}{\sqrt{2} + j - j + \sqrt{2}} = \frac{j}{\sqrt{2}} \quad (4.223)$$

$$s_{41o} = \frac{2}{\sqrt{2} + j - j + \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (4.224)$$

$$s_{14o} = s_{41o} \quad (4.225)$$

$$s_{44o} = s_{11o}. \quad (4.226)$$

- e) Die Reflexionsfaktoren der Tore 1 und 4 sowie die Transmissionfaktoren der genannten Tore lassen sich über die Addition der Streuparameter von Even- und Odd-Mode bestimmen.

$$s_{11} = \frac{1}{2}(s_{11e} + s_{11o}) = 0 \quad (4.227)$$

$$s_{44} = \frac{1}{2}(s_{44e} + s_{44o}) = 0 \quad (4.228)$$

$$s_{14} = \frac{1}{2}(s_{14e} + s_{14o}) = 0 \quad (4.229)$$

$$s_{41} = \frac{1}{2}(s_{41e} + s_{41o}) = 0 \quad (4.230)$$

Die entsprechenden Streuparameter der Tore 2 und 3 müssen aufgrund der Symmetrie identisch sein und verschwinden aus diesem Grund ebenfalls.

$$s_{22} = s_{11} = 0 \quad (4.231)$$

$$s_{33} = s_{44} = 0 \quad (4.232)$$

$$s_{23} = s_{14} = 0 \quad (4.233)$$

$$s_{32} = s_{41} = 0 \quad (4.234)$$

Transmissionsfaktoren von einem Eingangstor auf einer Seite der Symmetrieebene zu einem Ausgangstor auf der anderen Seite werden über die Subtraktion der Streuparameter von Even- und Odd-Mode bestimmt.

$$s_{21} = \frac{1}{2}(s_{11e} - s_{11o}) = \frac{-j}{\sqrt{2}} \quad (4.235)$$

$$s_{12} = s_{21} = \frac{-j}{\sqrt{2}} \quad (4.236)$$

$$s_{34} = \frac{1}{2}(s_{44e} - s_{44o}) = \frac{-j}{\sqrt{2}} \quad (4.237)$$

$$s_{43} = s_{21} = \frac{-j}{\sqrt{2}} \quad (4.238)$$

$$s_{31} = \frac{1}{2}(s_{41e} - s_{41o}) = \frac{-1}{\sqrt{2}} \quad (4.239)$$

$$s_{13} = s_{31} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \quad (4.240)$$

$$s_{24} = \frac{1}{2}(s_{14e} - s_{14o}) = \frac{-1}{\sqrt{2}} \quad (4.241)$$

$$s_{42} = s_{24} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \quad (4.242)$$

Insgesamt erhält man für den Branchline-Koppler folgende Streumatrix:

$$[S_{Branchline}] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & -j & -1 & 0 \\ -j & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -j \\ 0 & -1 & -j & 0 \end{bmatrix} \quad (4.243)$$

f) Die Ausgangswellen an den Toren 2 und 3 bei Einspeisung an Tor 1 sind:

$$b_2 = s_{21} a_1 = \frac{-j}{\sqrt{2}} a_1 \quad (4.244)$$

$$b_3 = s_{31} a_1 = \frac{-1}{\sqrt{2}} a_1 \quad (4.245)$$

Die Phasenverschiebung von Ausgangswelle an Tor 2 gegenüber der Eingangswelle an Tor 1 ist -90° , die Phasenverschiebung von Ausgangswelle an Tor 3 gegenüber der Eingangswelle an Tor 1 ist -180° . Die Betrag der Phasendifferenz zwischen den Ausgängen an den Toren 2 und 3 ist damit 90° . Der Branchline-Koppler wird deshalb oft als 90° -Koppler bezeichnet.

Lösung zu Übungsblatt 6

Aufgabe 1

- a) Der Induktivitätsbelag beträgt $L' = 372,7 \text{ pH/m}$, der Kapazitätsbelag $C' = 119,2 \text{ pF/m}$.
- b) Das Verhältnis ist $\frac{Z_{Le}}{Z_{Lo}} = \frac{1+k}{1-k} = 1,5$.
- c) Der gegenseitige Induktivitätsbelag beträgt $L' = 74,5 \text{ nH/m}$, der Koppelkapazitätsbelag $C' = 29,8 \text{ pF/m}$.
- d) Die Widerstände betragen $Z_{Le} = 61,2 \Omega$ und $Z_{Lo} = 40,8 \Omega$.
- e) Die Phasengeschwindigkeit ist $v_{pe} = v_{po} = 1,37 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.
- f) Der Bezugswiderstand muss $Z_0 = \sqrt{Z_{Le} Z_{Lo}} = 50 \Omega$ betragen.

Lösung zu Übungsblatt 8

Aufgabe 1

- a) Der Wegunterschied Δr von Strahlen von Position z aus bezüglich des Strahls vom Ursprung aus ist $\Delta r = -z \cdot \cos(\theta)$. Dieser Wegunterschied muss im Phasenterm berücksichtigt werden. Für die Amplitude ist der Wegunterschied in großer Entfernung vernachlässigbar.

$$E_\theta = \int_{-h}^h \frac{j Z_{F0} I}{2 r \lambda} \cdot \sin(\theta) \cdot e^{j(\omega t - \beta r + \beta z \cos(\theta))} dz \quad (4.246)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{j Z_{F0}}{2 r \lambda} \cdot \sin(\theta) \cdot e^{j(\omega t - \beta r)} \cdot \int_0^h I \cdot \left(e^{j(\beta z \cos(\theta))} + e^{-j(\beta z \cos(\theta))} \right) dz \\ &= \frac{j Z_{F0}}{r \lambda} \cdot \sin(\theta) \cdot e^{j(\omega t - \beta r)} \cdot \int_0^h I_0 \cdot \sin \left(\underbrace{\frac{2 \pi}{\lambda}}_{\beta} (h - z) \right) \cdot \cos(\beta z \cos(\theta)) \\ &= \frac{j Z_{F0} I_0}{r \lambda \beta} \cdot e^{j(\omega t - \beta r)} \cdot \frac{\cos(\beta h \cos(\theta)) - \cos(\beta h)}{\sin(\theta)} \\ &= \frac{j Z_{F0} I_0}{2 \pi r} \cdot e^{j(\omega t - \beta r)} \cdot \frac{\cos(\beta h \cos(\theta)) - \cos(\beta h)}{\sin(\theta)} \end{aligned} \quad (4.247)$$

- b) Die abgestrahlte Leistung kann durch Integration des Pointing-Vektors über die gesamte Kugeloberfläche bestimmt werden.

$$S_r = \frac{|E_\theta|^2}{2 Z_{F0}} = \frac{Z_{F0}}{8} \cdot \left| \frac{I_0}{\pi r} \cdot \frac{\cos(\beta h \cos(\theta)) - \cos(\beta h)}{\sin(\theta)} \right|^2 \quad (4.248)$$

Das Integral ist:

$$\begin{aligned} P_S &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi S_r r^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{Z_{F0}}{8} \cdot \frac{I_0^2}{\pi^2} \cdot \frac{|\cos(\beta h \cos(\theta)) - \cos(\beta h)|^2}{|\sin(\theta)|} d\theta d\phi \\ &= \frac{Z_{F0}}{4} \cdot \frac{I_0^2}{\pi} \cdot \int_0^\pi \frac{|\cos(\beta h \cos(\theta)) - \cos(\beta h)|^2}{|\sin(\theta)|} d\theta \end{aligned} \quad (4.249)$$

Mit $l = 2h = \lambda/2$ ist der Term $\beta h = \pi/2$. Die Leistung P_S kann damit weiter vereinfacht werden.

$$P_S = \frac{Z_{F0}}{4} \cdot \frac{I_0^2}{\pi} \cdot \int_0^\pi \frac{|\cos(\frac{\pi}{2} \cos(\theta))|^2}{|\sin(\theta)|} d\theta \quad (4.250)$$

Das verbleibende Integral wird numerisch gelöst und beträgt ca. 1,2188.

$$P_S = 30 \Omega \cdot 1,2188 \cdot I_0^2 \quad (4.251)$$

- c) Der Gewinn G entspricht für $\eta = 1$ genau dem Richtfaktor D . Dieser ist das Verhältnis von maximaler Strahlungsdichte der Antenne zur Strahlungsdichte des intrinsischen Kugelstrahlers.

$$S_{r,max} = \frac{Z_{F0} I_0^2}{8\pi^2 r^2} \quad (4.252)$$

$$S_i = \frac{P_S}{4\pi r^2} \quad (4.253)$$

$$G = \frac{S_{r,max}}{S_i} = \frac{Z_{F0} I_0^2}{8\pi^2 r^2} \cdot \frac{4\pi r^2}{30 \Omega I_0^2 \cdot 1,2188} = 1,64 = 2,15 \text{ dBi} \quad (4.254)$$

- d) Die abgestrahlte Leistung wurde bereits berechnet. Die Leistung am Antenneneingang lässt sich über den Strom und den Eingangswiderstand R_S berechnen. Durch Gleichsetzen dieser Leistungen lässt sich der gesuchte Widerstand bestimmen.

$$P_S = \frac{I_0^2 R_S}{2} = 30 \Omega \cdot 1,2188 \cdot I_0^2 \quad (4.255)$$

$$R_S = 60 \Omega \cdot 1,2188 = 73,13 \Omega \quad (4.256)$$

Aufgabe 2

- a) Die Speiseantenne der Parabolantenne sitzt im Brennpunkt. Die Mitte der Parabel ist um die Brennweite f vom Brennpunkt entfernt.

Alle Strahlen müssen dieselbe Länge besitzen. Daraus lassen sich folgende Gleichungen aufstellen:

$$2f = \sqrt{x^2 + y^2} - y \quad (4.257)$$

$$2f + y = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$4f^2 + 4fy + y^2 = x^2 + y^2$$

$$4fy = x^2 - 4f^2$$

$$y = \frac{x^2}{4f} - f \quad (4.258)$$

Dies entspricht exakt einer Parabel.

b) Die Antennenwirkfläche ist hier:

$$A_W = 0,75 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot D^2 \quad (4.259)$$

Der Gewinn lässt sich mit Hilfe des bekannten Verhältnisses von Antennenwirkfläche und Gewinn bestimmen.

$$\begin{aligned} G &= A_W \cdot \frac{4\pi}{\lambda^2} = 0,75 \cdot \frac{\pi^2 f}{c^2} \cdot D^2 \\ &= 5264 \\ &= 37,2 \text{ dBi} \end{aligned} \quad (4.260)$$

c) Es wird vereinfachend angenommen, dass die Leistungsdichte innerhalb des Winkels α_{HB} konstant ist. Die gesamte Leistung verteilt sich also auf eine Kreisfläche A_{Kreis} .

$$A_{Kreis} = \alpha_{HB}^2 r^2 \cdot \frac{\pi}{4} \quad (4.261)$$

Der Richtfaktor D ist das Verhältnis der Flächen.

$$\begin{aligned} D &= \frac{A_{Kugel}}{A_{Kreis}} \\ D &= \frac{4\pi r^2}{\alpha_{HB}^2 r^2 \frac{\pi}{4}} \\ \alpha_{HB} &= \frac{4}{\sqrt{D}} = \frac{4 \cdot \sqrt{\eta}}{\sqrt{G}} \text{ rad} \end{aligned} \quad (4.262)$$

In Grad erhält man:

$$\alpha_{HB} = \frac{180 \cdot 4 \cdot \sqrt{\eta}}{\pi \cdot \sqrt{G}} \approx \frac{200}{\sqrt{G}} \text{ Grad} \quad (4.263)$$

Setzt man die Werte ein, erhält man $\alpha_{HB} = 2,76^\circ$.

Aufgabe 3

- Die ursprüngliche Senderleistung betrug $P_S = 20 \text{ dBm} - 5 \text{ dBi} = 15 \text{ dBm}$. Mit der ersetzten Antenne ist die maximal erlaubte Senderleistung $P_S = 20 \text{ dBm} - 8 \text{ dBi} = 12 \text{ dBm}$. Die Senderleistung muss also um 3 dB bzw. um die Hälfte reduziert werden.
- Die Reichweite steigt, da auch der Empfänger mit der neuen Antenne ausgestattet wurde.

Lösung zu Übungsblatt 9

Aufgabe 1

- a) Die äquivalente isotrope Sendeleistung ist $EIRP = 50 \text{ dBm} + 25 \text{ dBi} = 75 \text{ dBm}$.
- b) Die Freiraumdämpfung ist $L_{F0} = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{4\pi r f}{c} \right) = 205,15 \text{ dB}$
- c) Die Empfangsleistung ist

$$\begin{aligned} P_E &= 50 \text{ dBm} + 25 \text{ dBi} - 205,15 \text{ dB} + 35 \text{ dBi} \\ &= -95,15 \text{ dBm} \\ &= 0,3 \text{ pW}. \end{aligned}$$

Aufgabe 2

- a) Das 3D-Richtdiagramm des Halbwellen-Dipols ist in Abbildung 4.5.24 gezeigt. Der simulierte Gewinn der Antenne ist 2,18 dBi (nach Theorie 2,15 dBi).

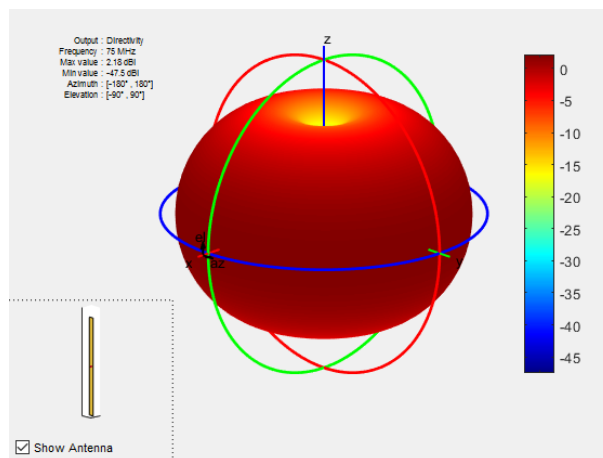


Abbildung 4.5.24: 3D-Richtcharakteristik eines Halbwellen-Dipols

- b) Die 3D-Richtdiagramme sind in den Abbildungen 4.5.25 und 4.5.26 dargestellt. Die simulierten Gewinne sind in gleicher Reihenfolge $G_\lambda = 3,99 \text{ dBi}$, $G_{\frac{3}{2}\lambda} = 3,65 \text{ dBi}$, $G_{2\lambda} = 4,02 \text{ dBi}$ und $G_{4\lambda} = 5,14 \text{ dBi}$.

Der Gewinn steigt für längere Antennen als $l = \lambda$ nicht mehr stark an. Das Richtdiagramm bildet jedoch immer mehr Nebenkeulen aus. Grund hierfür ist, dass sich für Antennen größer Lambda Stöme in beiden Richtungen auf der Antenne befinden. Diese führen zu Wellen, die sich in senkrechter Richtung zur Antennenachse teilweise auslöschen, in anderen Richtungen jedoch konstruktiv überlagern können.

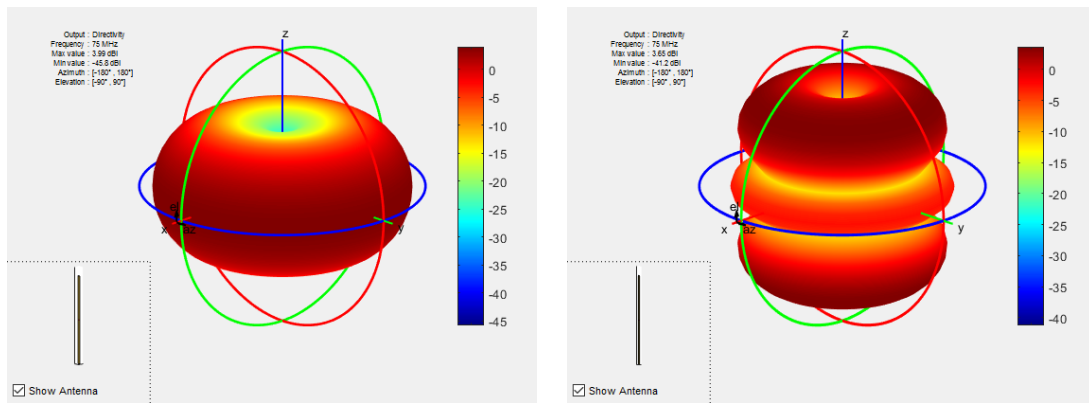


Abbildung 4.5.25: 3D-Richtdiagramm der Dipole mit den Längen $l = \lambda$ und $l = \frac{3}{2} \lambda$

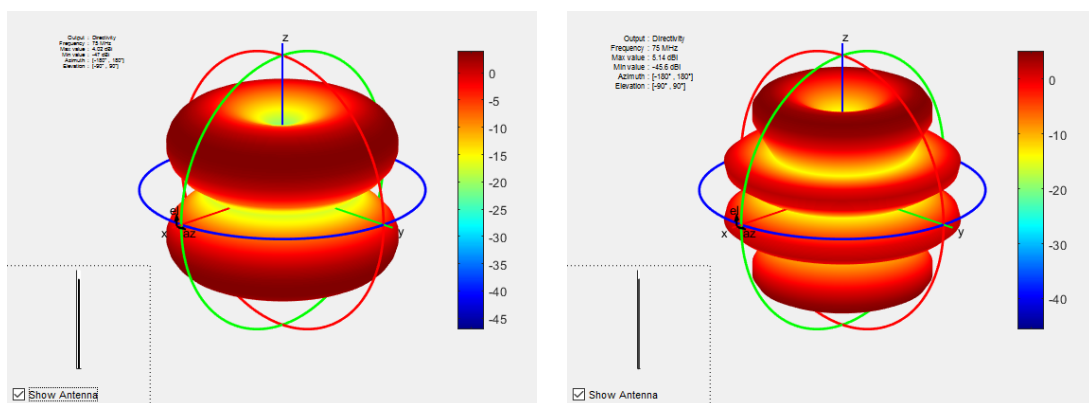


Abbildung 4.5.26: 3D-Richtdiagramm der Dipole mit den Längen $l = 2\lambda$ und $l = 4\lambda$

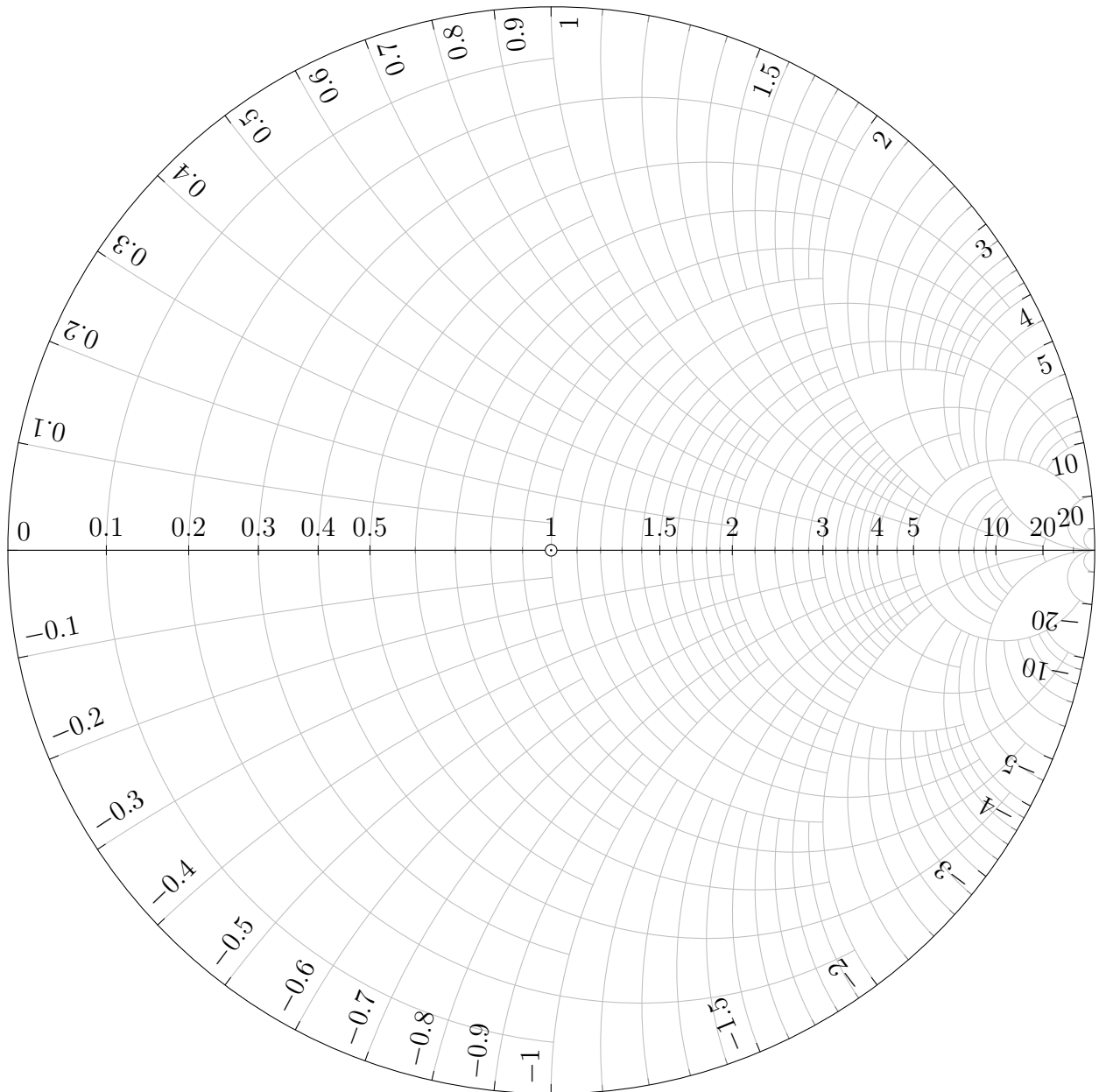
Lösung zu Übungsblatt 10

Aufgabe 1

a) Lösung noch nicht erstellt.

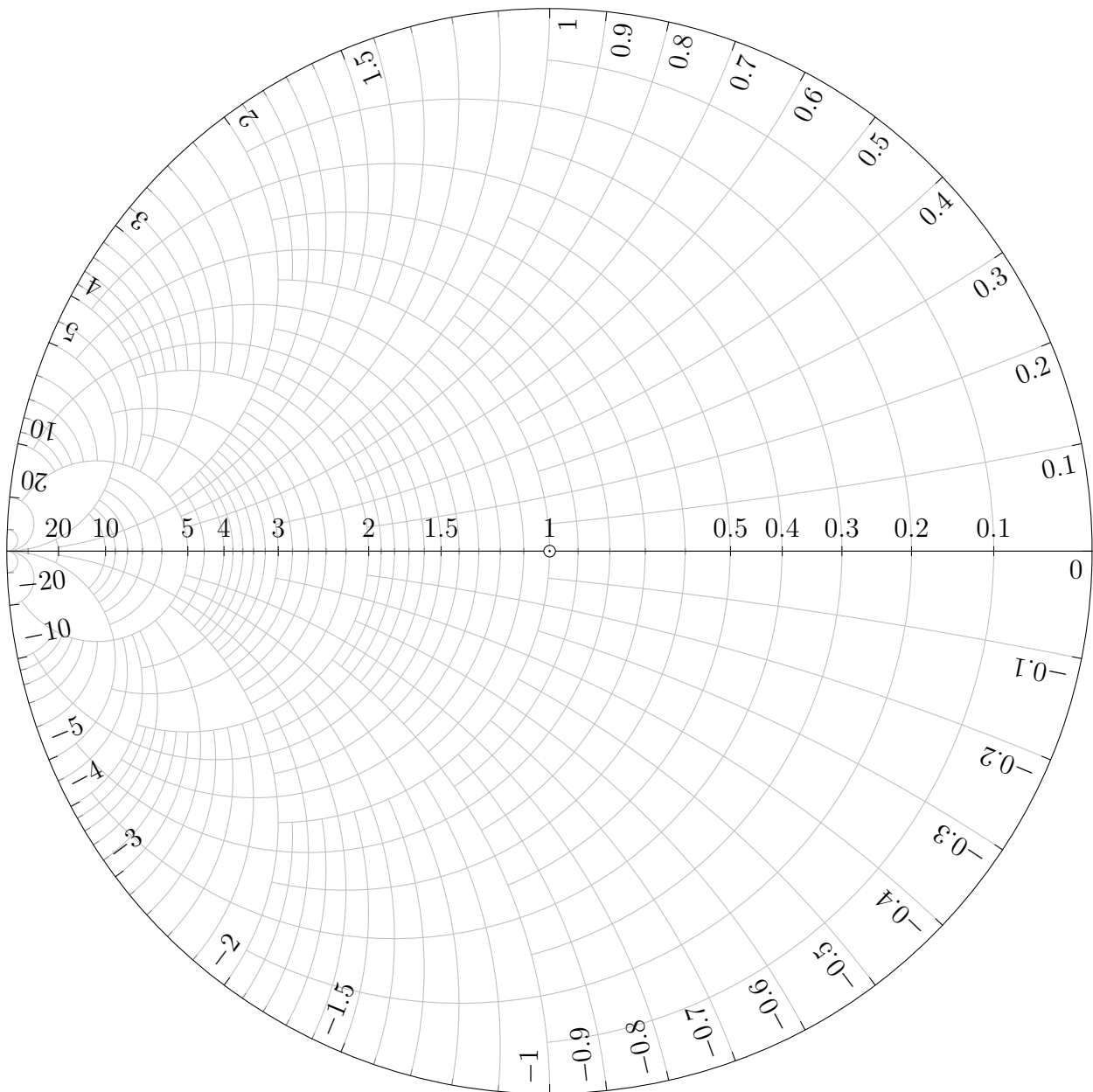
A. Smith-Diagramm in Widerstandsform

Smith-Diagramm



B. Smith-Diagramm in Leitwertform

Smith-Diagramm



Literatur

- [1] Bronstein, Semendjajew, Musiol, and Mühling. *Taschenbuch der Mathematik*. Harri Deutsch Verlag, 2008.
- [2] Frank Gustrau. *Hochfrequenztechnik: Grundlagen der mobilen Kommunikationstechnik*. Carl Hanser Verlag, 2011.
- [3] Holger Heuermann. *Hochfrequenztechnik: Komponenten für High-Speed- und Hochfrequenzschaltungen*. Vieweg Teubner, 2009.
- [4] Horst Kuchling. *Taschenbuch der Physik*, volume 20. Hanser Verlag GmbH und Co KG, 2010.
- [5] Ernst Müller. *Hochfrequenztechnik, Manuskript mit Übungen zur Vorlesung an der DHBW Stuttgart*. DHBW Stuttgart, Elektrotechnik, Nachrichtentechnik, 2014.