Kommunikationstechnik B

Übungen

Ausgabe 0.3, 30.05.2014
Autor: Stephan Rupp

Inhaltsverzeichnis

1. Analoge Modulationsverfahren

1.1. Amplitudenmodulation, numerisch

Das modulierte Signal errechnet sich aus dem Produkt des Trägers $u_T(t) = U_T \cos\Omega t$ mit dem niederfrequenten Signal $u_{NF}(t) = 1 + m \cos\omega t$ zu

$$u_S(t) = U_T\,(1 + m \cos\omega t) \cos\Omega t \tag{1.1}$$

Erstellen Sie mit Hilfe eines Programms zur Tabellenkalkulation ein Arbeitsblatt zur Berechnung und Darstellung des modulierten Signals. Hinweise: (1) Rechnen Sie mit N=128 Stützstellen, die mit Hilfe des Zeitindexes i berechnet werden. Der Index läuft hierbei von 0 bis 127. (2) Verwenden Sie die folgende Formeln für das Trägersignal und das niederfrequente Signal:

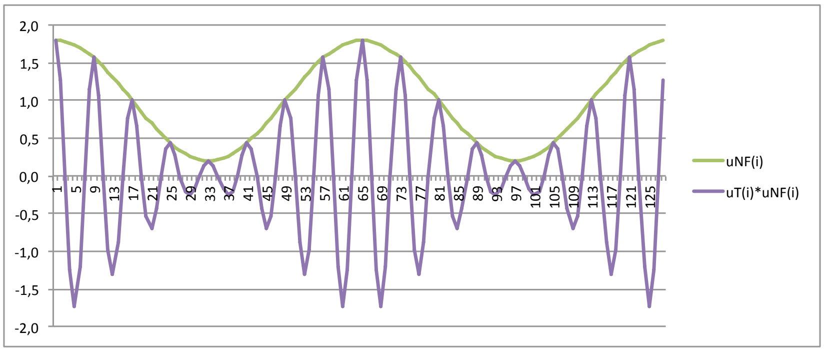
$$u_T(t) = U_T \cos 2{*}Pi{*}f_T{*}i/N, \qquad \text{mit } U_T = 1 \tag{1.2}$$

$$u_{NF}(t) = 1 + m \cos 2{*}Pi{*}f_S{*}i/N \tag{1.3}$$

(3) Geben Sie die Trägerfrequenz f_T, Frequenz des Nutzsignals f_S, sowie den Modulationsindex m als Variable vor, wie in der Abbildung unten gezeigt.

NF-Signal:	1 + m cos(2Pi fS i/N)	Vorgaben:	fT	16	feste Vorgaben:	N=128	Stützstellen
HF-Träger:	UT cos (2 Pi fT i/N)		fS	2			
			m	0,8			

Index i	uT(i)	uNF(i)	uT(i)*uNF(i)
0	1,0	1,8	1,8
1	0,7	1,8	1,3
2	0,0	1,8	0,0
3	-0,7	1,8	-1,2
4	-1,0	1,7	-1,7
5	-0,7	1,7	-1,2
6	0,0	1,7	0,0
7	0,7	1,6	1,1
8	1,0	1,6	1,6
9	0,7	1,5	1,1
10	0,0	1,4	0,0
11	-0,7	1,4	-1,0
12	-1,0	1,3	-1,3
13	-0,7	1,2	-0,9
14	0,0	1,2	0,0
15	0,7	1,1	0,8
16	1,0	1,0	1,0
17	0,7	0,9	0,7
18	0,0	0,8	0,0



Diskutieren Sie das Signal für unterschiedliche Modulationsindizes, Trägerfrequenzen, bzw. Signalfrequenzen.

> Bonusaufgabe: Mit dem eben entwickelten Arbeitsblatt wurde die Senderseite zur Erzeugung des modulierten Signals beschrieben. Realisieren Sie einen Empfänger mit Hilfe eines Hüllkurvendetektors als Tabellenkalkulation. Hinweis: Das Funktionsprinzip beruht auf (1) Gleichrichtung (z.B. Abschneiden der negativen Frequenzanteile), (2) Tiefpassfilterung zur Beseitigung der hochfrequenten Signalanteile (z.B. Mittelung der verbliebenen Stützstellen über ca. 1 Periode des Trägers).

1.2. Amplitudenmodulation, analytisch

Errechnen Sie das modulierte Signal aus Gleichung (1.1) unter Verwendung folgender Hilfestellung:

$$\cos\alpha * \cos\beta = 1/2\,(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)) \tag{1.4}$$

Welche Frequenzen ergeben sich? Betrachten Sie diese Frequenzen als Spektrallinien. Welche Amplituden und Leistungen ergeben sich für die Spektrallinien?

1.3. Spektrum berechnen

Das Spektrum eines Signals s(i) lässt sich aus folgender Beziehung berechnen:

$$S[u] = \sum s[i]\, e^{-j2\pi\, i\, u/N} \qquad \text{mit dem Summenindex } i = 0 \text{ bis } i = N-1 \qquad (1.5)$$

In dieser Schreibweise wurde auf das Abtastintervall normiert, d.h. $\omega = 2\pi\, u\, /N$. Die Datenreihe S[u] beschreibt das Spektrum des reellen Signals f[k]. Das Spektrum S[u] ist hierbei komplex in dem Sinne, dass S[u] einen Realteil und einen Imaginärteil besitzt. Das Spektrum S[u] besteht also aus zwei Reihen: Re{S[u]} und Im{S[u]}.

Die Ausdrücke $e^{-j2\pi\, k\, u/N} = e^{j\phi}$ lassen sich im Sinne $e^{j\phi} = \cos\phi + j \sin\phi$ interpretieren. Diese Ausdrücke lassen sich für jeden Frequenzindex u als Koeffizienten $k_{r,u}(i)$ (Realteil) und $k_{i,u}(i)$ Imaginärteil über den Index i berechnen. Anschliessend werden für jede Spektrallinie S(u) diese Koeffizienten gemäß Gleichung (1.5) mit dem Signal s(i) wie ein Skalarprodukt multipliziert und aufsummiert (für die Tabellenkalkulation: Summenprodukt).

Es ergeben sich:

$Re(S(0)) = \sum s[i]$ $\qquad Im(S(0))=0$ $\qquad$ (Gleichanteil des Signals)

$Re(S(1)) = \sum s[i] * k_{r,1}(i);$ $\qquad Im(S(1)) = \sum s[i] * k_{i,1}(i)$

$Re(S(2)) = \sum s[i] * k_{r,2}(i);$ $\qquad Im(S(2)) = \sum s[i] * k_{i,2}(i)$

... $\qquad$ ...

$Re(S(N/2-1)) = \sum s[i] * k_{r,N/2-1}(i);$ $\qquad Im(S(N/2-1)) = \sum s[i] * k_{i,N/2-1}(i)$

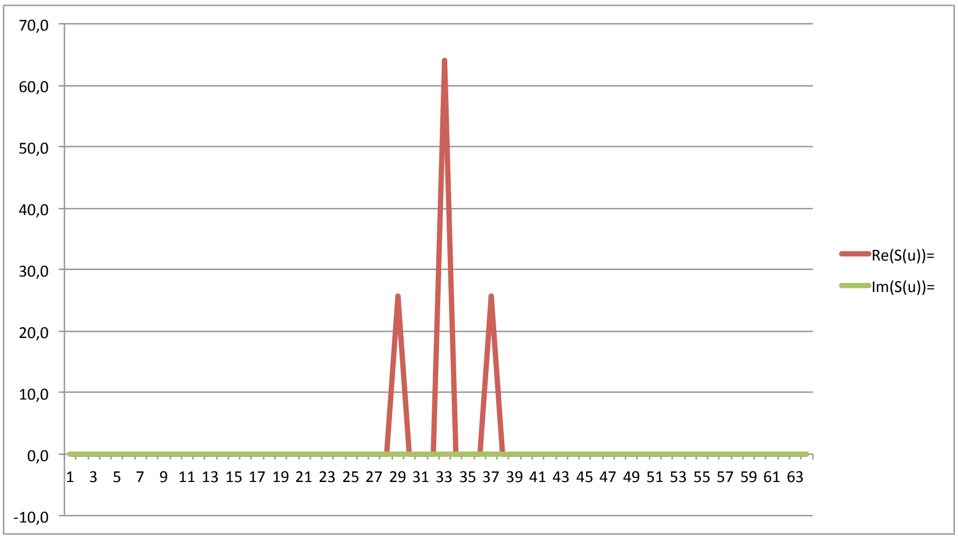
Übernehmen Sie diese Schreibweise in die Tabellenkalkulation und erstellen Sie ein Arbeitsblatt zur Berechnung des Spektrums eines Signals s(i). Berechnen Sie außer dem Realteil und Imaginärteil des Spektrums auch den Betrag und den Phasengang. Testen Sie das Verfahren am amplitudenmodulierten Signal $s(i) = u_S(i)$. Variieren Sie die Signalfrequenz, Trägerfrequenz bzw. den Modulationsindex.

Folgende Abbildung zeigt ein Muster für die Kalkulation. Hinweis: Wegen der Symmetrie der Gleichung (1.5) genügt die Berechnung von u_{max}=(N/2-1) Stützstellen für das Spektrum S(u).

Signal: s(i) Koeffizienten kru(i) = cos ((2π u/N)*i)) Vorgabe: N=128 Stützstellen
Spektrum: S[u] = ∑ s[i] e -j2π i u/N kiu(i) = - sin ((2π u/N)*i))

		S(u):	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
		u=	0		1		2		3		4		5		6		7
Index i	s(i)		kr	ki	kr	ki	kr	ki	kr	ki	kr	ki	kr	ki	kr	ki	kr
0	1,8		1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
1	0,0		1	0	1	-0	1	-0,1	0,99	-0,1	0,98	-0,2	0,97	-0,2	0,96	-0,3	0,94
2	-1,7		1	0	1	-0,1	0,98	-0,2	0,96	-0,3	0,92	-0,4	0,88	-0,5	0,83	-0,6	0,77
3	0,0		1	0	0,99	-0,1	0,96	-0,3	0,9	-0,4	0,83	-0,6	0,74	-0,7	0,63	-0,8	0,51
4	1,6		1	0	0,98	-0,2	0,92	-0,4	0,83	-0,6	0,71	-0,7	0,56	-0,8	0,38	-0,9	0,2
5	0,0		1	0	0,97	-0,2	0,88	-0,5	0,74	-0,7	0,56	-0,8	0,34	-0,9	0,1	-1	-0,1
6	-1,3		1	0	0,96	-0,3	0,83	-0,6	0,63	-0,8	0,38	-0,9	0,1	-1	-0,2	-1	-0,5
7	0,0		1	0	0,94	-0,3	0,77	-0,6	0,51	-0,9	0,2	-1	-0,1	-1	-0,5	-0,9	-0,7
8	1,0		1	0	0,92	-0,4	0,71	-0,7	0,38	-0,9	0	-1	-0,4	-0,9	-0,7	-0,7	-0,9
9	0,0		1	0	0,9	-0,4	0,63	-0,8	0,24	-1	-0,2	-1	-0,6	-0,8	-0,9	-0,5	-1

Muster für die Tabellenkalkulation



Beispiel : Spektrum für f_T= 32, f_S= 4 und m=0,8

Bonusaufgabe: Ändern Sie das niederfrequente Signal $u_{NF}(t) = 1 + m \cos\omega t$ in Gleichung (1.1) in $u_{NF}(t) = 1 + m \sin\omega t$. Welche Änderungen ergeben sich hierdurch im Spektrum? Erklären Sie den Effekt aus der Funktionsweise der Transformation nach Gleichung (1.5).

Beispiel : Spektrum für f_T= 32, f_S= 4 und m=0,8 für $u_{NF}(t) = 1 + m \sin\omega t$

1.4. Synchrone Demodulation

Bei der synchronen Demodulation wird das empfangene Signal (siehe Gleichung (1.1) nochmals mit dem Träger multipliziert. Hierdurch wird das Signalspektrum u.a. wiederum in das Basisband verschoben. Die verbliebenen hochfrequenten Mischprodukte werden durch Tiefpassfilterung beseitigt. Berechnen Sie das Mischprodukt analytisch:

$$u_{dem}(t) = u_s(t) * \cos\Omega t = (U_T (1 + m \cos\omega t) \cos\Omega t) * \cos\Omega t \qquad (1.6)$$

Hinweis: Verwenden Sie hierzu ausser der Hilfestellung nach Gleichung (1.4) außerdem:

$$\cos^2 \alpha = 1/2 (1 + \cos (2\alpha)) \qquad (1.7)$$

Bonusaufgabe: Berechnen Sie das Mischprodukt mit Hilfe der Tabellenkalkulation numerisch. Ergänzen Sie die Berechnung um ein Tiefpassfilter zu einem synchronen Demodulator.

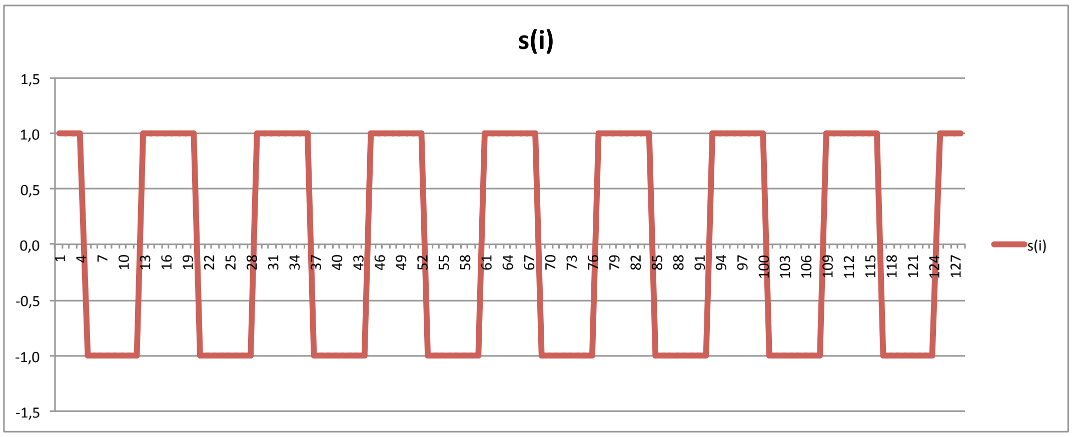
1.5. Bandbreite und Wirkungsgrad

Bandbreite: Die Bandbreite des niederfrequenten Nutzsignal betrage 5 kHz. Welche Bandbreite benötigt das modulierte Signal?

Wirkungsgrad: Der Wirkungsgrad der Modulation sei durch das Verhältnis der Signalleistung in einem der Seitenbänder zur gesamten Leistung definiert (Träger und beide Seitenbänder). Welcher Wirkungsgrad lässt sich in Abhängigkeit des Modulationsindex erzielen? Wie schätzen Sie die Amplitudenmodulation bzgl. des Wirkungsgrades ein?

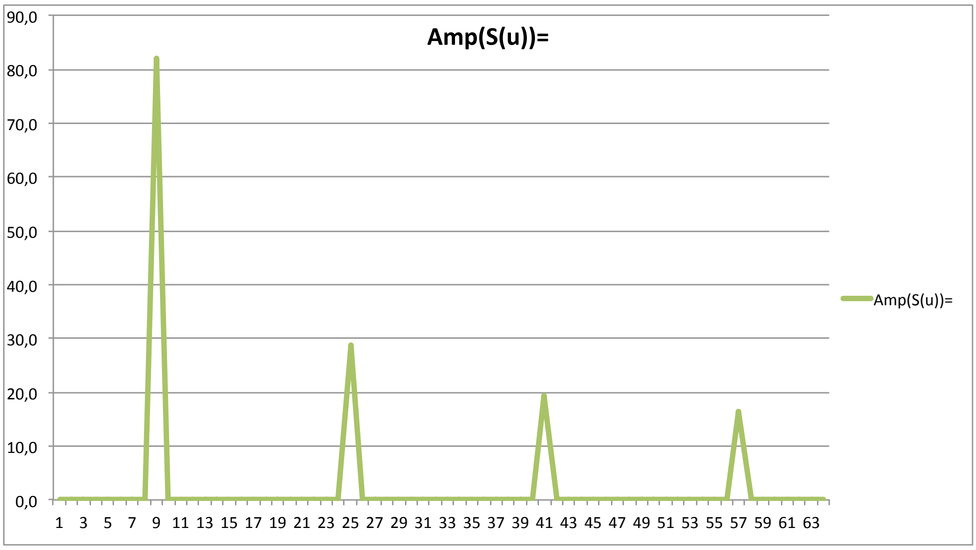
1.6. Signalspektren

Analysieren Sie die Spektren folgender Signale: (1) Rampe, (2) Dreieck, (3) Rechteck. Hinweis: Kopieren Sie hierzu das Arbeitsblatt aus Übung 1.3 und berechnen Sie als s(i) jeweils für die o.g. Signalformen. Analysieren Sie die Spektren.

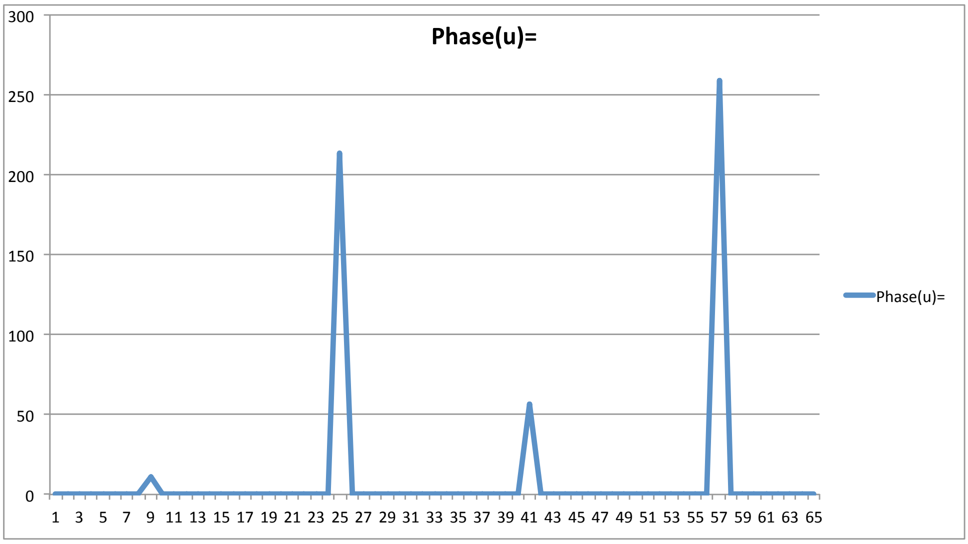


Rechtecksignal (mit 16 Stützstellen pro Periode)

Spektrum des Rechtecksignals



Amplitudenspektrum des Rechtecksignals

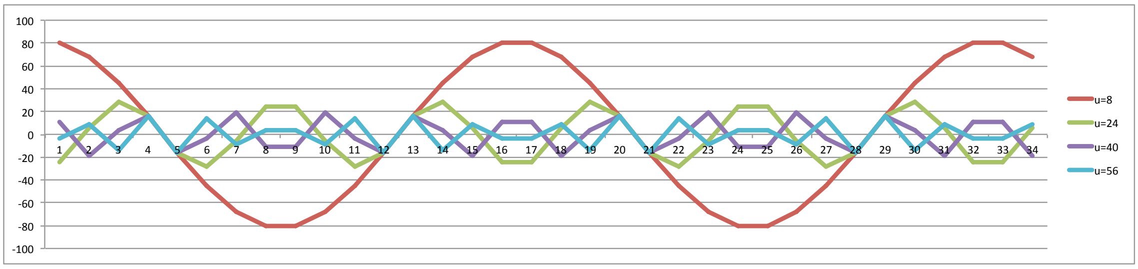


Phasenspektrum des Rechtecksignals

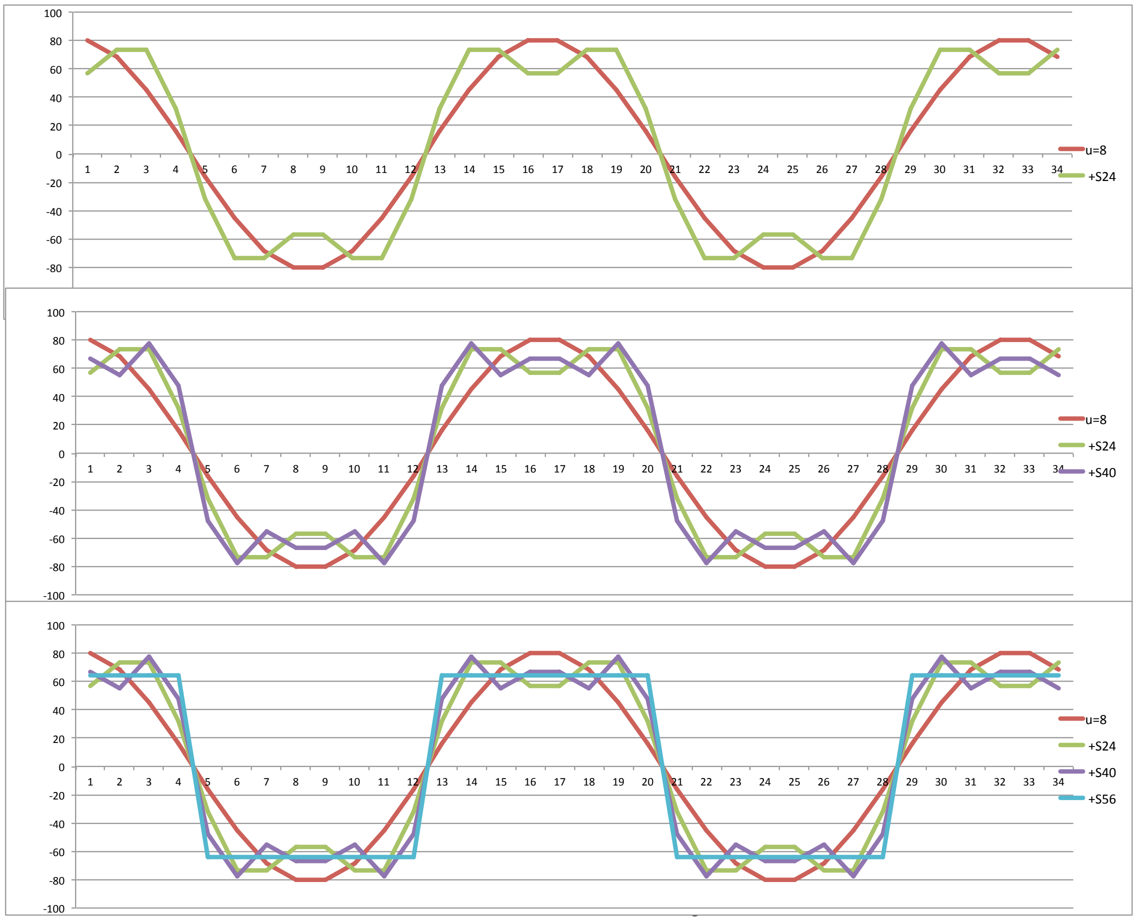
Analyse: Die Spektrallinien treten bei den Frequenzen 8, 24, 40 und 56 auf. Gemessen an der Grundfrequenz 8 (gemäß einer Periode von 16 Stützstellen im Zeitbereich) entsprechen diese Frequenzen den Vielfachen (3x), (5x) und (7x). Es gibt also keine geradzahligen Vielfache der Grundfrequenz unter den Oberwellen. Realteil und Imaginärteil geben die Anteile der kosinus- bzw. sinusförmigen Komponenten an. Betrags- und Phasenspektrum reflektieren diese Betrachtung nach Amplitude und Phasenlage der jeweiligen Spektrallinien (hier Zunahme der Phasenverschiebung bei den höheren Frequenzen).

Demnach setzt sich das Rechtecksignal aus folgenden Komponenten zusammen:

- einer Grundschwingung der Frequenz 8 mit Amplitude 82 und 11,3 Grad Phase
- einer Schwingung der Frequenz 24 mit Amplitude 29 und 214 Grad Phase
- einer Schwingung der Frequenz 40 mit Amplitude 19 und 56 Grad Phase
- einer Schwingung der Frequenz 56 mit Amplitude 16 und 259 Grad Phase.



Spektrale Komponenten des Rechtecksignals



Approximation des Rechtecksignals durch Überlagerung der spektralen Komponenten

Hinweis zur Berechnung der Phase: Die Funktion arctan liefert Werte zwischen -π/2 und +π/2. Es wird nicht unterschieden, ob sich der Zeiger aus Realteil und Imaginärteil im Einheitskreis im ersten bzw. dritten Quadranten befindet (Winkel zwischen 0 und π/2), oder im zweiten bzw. vierten Quadranten (Winkel zwischen -π/2 und 0). Diese Ergebnisse sind im ersten und zweiten Quadranten in Ordnung. Im dritten und vierten Quadranten (Im < 0) fehlt jedoch ein Phasenunterschied von π (bzw. 180 Grad). Durch Abfrage des Imaginärteils (Im < 0) lässt sich das Ergebnis einfach korrigieren.

Dieser Zusammenhang ist durch Betrachtung des Realteils und Imaginärteils der jeweiligen Spektrallinie unmittelbar einleuchtend: Bei der ersten Spektrallinie des Rechtecksignals (1x) sind Realteil und Imaginärteil beide größer als Null. Man befindet sich also im ersten Quadranten (Winkel zwischen 0 und π/2). Bei der zweiten Spektrallinie (3x) sind Realteil und Imaginärteil beide negativ. Man befindet sich also im dritten Quadranten (der Winkel somit zwischen π und 3π/2). Frage: Welche Winkel erwarten Sie bei den Spektrallinien (3x) und (5x)?

1.7. Rücktransformation in den Zeitbereich

Die Rücktransformation des Spektrums in den Zeitbereich lässt sich beschreiben durch:

$$s[i] = 1/N \sum S[u]\, e^{+j2\pi u\, i/N} \qquad \text{mit dem Summenindex } u = 0 \text{ bis } u = N-1 \qquad (1.8)$$

Die Überlagerung der Spektrallinien des Rechtecksignals aus Übung 1.6 entspricht genau dieser Vorschrift zur Transformation. In Gleichung (1.8) ist auch die Normierung auf die Anzahl N der Stützstellen enthalten. Bemerkung: Im Beispiel aus Übung 1.6 wurde das Spektrum nur bis zur 64-ten Stützstelle gerechnet (d.h. nur die Koeffizienten bis u=64 berücksichtigt). Daher skaliert diese Überlagerung der Signale (türkisfarbenes Signal in der Abbildung oben) nur auf den Wertebereich +/- 64.

Im allgemeinen Fall wären alle Spektrallinien S(u) gemäß Gleichung (1.8) zu überlagern, um das Signal s(i) zurück zu gewinnen. Erstellen Sie ein Arbeitsblatt zur Rücktransformation und testen Sie das Verfahren an einem der Spektren aus den vergangenen Übungen. Hinweis: Wenn Sie die Spektren mit N=64 Stützstellen berechnet haben, nutzen Sie die Symmetrie der Transformation nach Gleichung (1.5) zur Rekonstruktion der übrigen 64 Stützstellen.

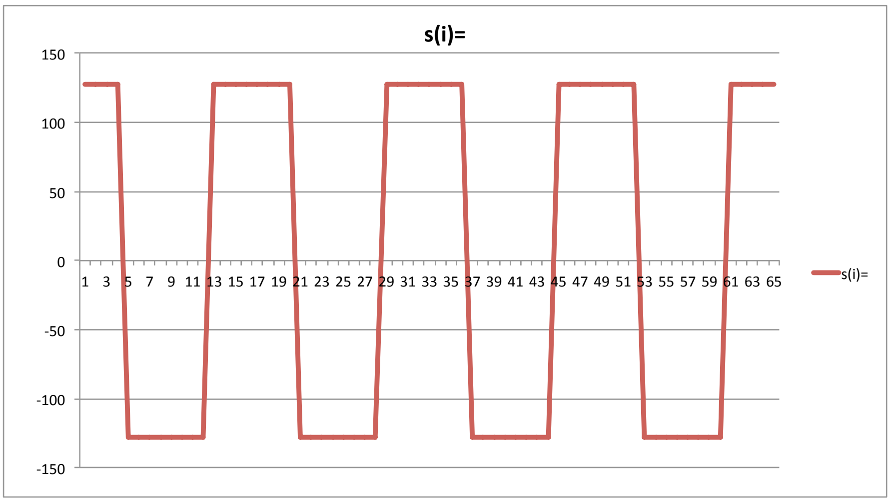
Spektrum: S(u) Koeffizienten kru(i) = cos ((2π u/N)*i)) Vorgabe: N=128 Stützstellen
Signal: s[i] = 1/N ∑ S[u] e +j2π u i/N kiu(i) = sin ((2π u/N)*i))

s(i) = Sr*kr - Si*ki

	Sr*kr	Si*ki																
s(i)	128	0	128	0	128	0	128	0	0	128	-128	0	-128	0	-128	0	-128	0

Index u	Re S(u)	Im S(u)	u= 0		1		2		3		4		5		6		7		8	
			kr	ki	kr	ki	kr	ki	kr	ki	kr	ki	kr	ki	kr	ki	kr	ki	kr	ki
0	0,0	0,0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
1	0,0	0,0	1	0	1	0,05	1	0,1	0,99	0,15	0,98	0,2	0,97	0,24	0,96	0,29	0,94	0,34	0,92	0,38
2	0,0	0,0	1	0	1	0,1	0,98	0,2	0,96	0,29	0,92	0,38	0,88	0,47	0,83	0,56	0,77	0,63	0,71	0,71
3	0,0	0,0	1	0	0,99	0,15	0,96	0,29	0,9	0,43	0,83	0,56	0,74	0,67	0,63	0,77	0,51	0,86	0,38	0,92
4	0,0	0,0	1	0	0,98	0,2	0,92	0,38	0,83	0,56	0,71	0,71	0,56	0,83	0,38	0,92	0,2	0,98	0	1
5	0,0	0,0	1	0	0,97	0,24	0,88	0,47	0,74	0,67	0,56	0,83	0,34	0,94	0,1	1	-0,1	0,99	-0,4	0,92
6	0,0	0,0	1	0	0,96	0,29	0,83	0,56	0,63	0,77	0,38	0,92	0,1	1	-0,2	0,98	-0,5	0,88	-0,7	0,71
7	0,0	0,0	1	0	0,94	0,34	0,77	0,63	0,51	0,86	0,2	0,98	-0,1	0,99	-0,5	0,88	-0,7	0,67	-0,9	0,38
8	80,4	16,0	1	0	0,92	0,38	0,71	0,71	0,38	0,92	0	1	-0,4	0,92	-0,7	0,71	-0,9	0,38	-1	0
9	0,0	0,0	1	0	0,9	0,43	0,63	0,77	0,24	0,97	-0,2	0,98	-0,6	0,8	-0,9	0,47	-1	0,05	-0,9	-0,4

Schema zur Rücktransformation (Modifikation der Transformation in den Zeitbereich)



Beispiel: Rückransformation des Spektrums (Rechtecksignal aus Übung 1.6)

1.8. Frequenzmodulation

Erzeugen Sie numerisch ein frequenzmoduliertes Signal aus folgenden Vorgaben:

$$u_T(t) = U_T \cos \phi(t) \tag{1.9}$$

$$\Omega(t) = \Omega + \alpha_f \, u_{NF}(t) = \Omega + \alpha_f \, a \cos \omega t \tag{1.10}$$

$$\phi(t) = \int \Omega(t) \, dt \tag{1.11}$$

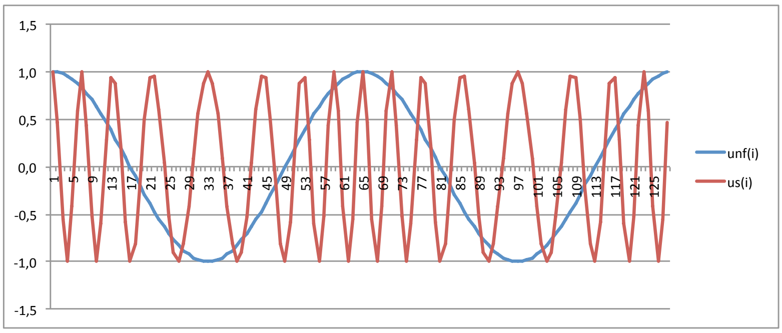
Hinweis: Berechnen Sie zunächst $\phi(t)$ und setzen Sie dann in Gleichung (1.9) ein. Verwenden Sie den Modulationsindex

$$\eta = \Delta\Omega / \omega = \alpha_f \, a / \omega \tag{1.12}$$

Für die numerische Berechnung verwenden Sie bitte N=128 Stützstellen.

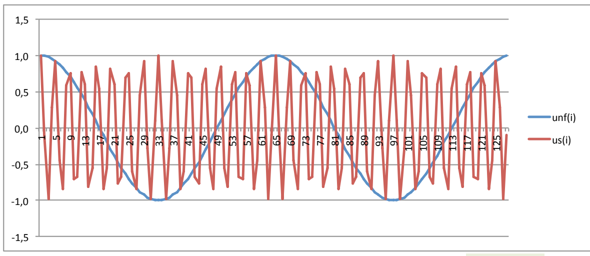
FM-Signal:	UT * cos(2Pi fT i/N + (eta sin 2 Pi fS i/N))	Vorgaben:	fT	16	feste Vorgaben: N=128 Stützstellen
UNF:	a * cos(2 pi fS i/128)		fS	2	
			eta	3	

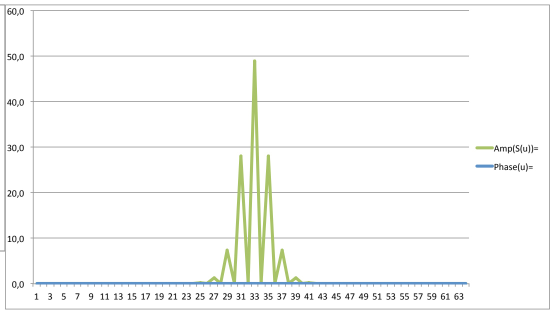
Index i	phi2(i)	unf(i)	us(i)
0	0,0	1,0	1,0
1	0,3	1,0	0,5
2	0,6	1,0	-0,6
3	0,9	1,0	-1,0
4	1,1	0,9	-0,4
5	1,4	0,9	0,6
6	1,7	0,8	1,0
7	1,9	0,8	0,4
8	2,1	0,7	-0,5
9	2,3	0,6	-1,0
10	2,5	0,6	-0,6
11	2,6	0,5	0,3
12	2,8	0,4	0,9
13	2,9	0,3	0,9
14	2,9	0,2	0,2
15	3,0	0,1	-0,6
16	3,0	0,0	-1,0
17	3,0	-0,1	-0,8
18	2,9	-0,2	-0,2



Muster für die Kalkulation

Untersuchen Sie das Spektrum des Signals.





Vorgaben:	fT	32
	fS	2
	eta	1

Beispiel: Signalspektrum

2. Digitale Modulationsverfahren

2.1. Amplitudenumtastung (ASK)

Wenn das Nutzsignal ein digitales Signal ist, also ein Signal mit m vorgegebenen Amplituden A_m, das außerdem seinen Pegel nur innerhalb vorgegebener Zeitintervalle T ändert, so spricht man von Amplitudenumtastung (engl. Amplitude Shift Keying). Die Amplitude wird in Vielfachen des Intervalls T zwischen den Werten A_m umgetastet.

Für das Nutzsignal erhält man also:

$$u_{NF}(t) = A_m\, g(t) \qquad \text{mit } m = 1, ..., M;\ 0 < t < T \qquad (2.1)$$

Das Signal g(t) ist im einfachsten Fall ein Rechteckpuls der Dauer T. Im einfachsten Fall gibt es zwei Amplitudenstufen A_0=0 und A_1=1. In diesem Fall ergibt sich das sogenannte On-Off-Keying (OOK). Wie bei der analogen Amplitudenmodulation ist der Träger ein Signal der Frequenz f_T. Das modulierte Signal erhält man aus dem Produkt des Trägers mit u_{NF}(t).

Frage 2.1.1: Erstellen Sie ein ASK-Signal mit Hilfe Ihres Programms zur Tabellenkalkulation. Verwenden Sie hierzu ein rechteckförmiges Nutzsignal mit den Amplituden A0 und A1. Als Träger verwenden Sie das gleiche Signal wie bei der analogen Amplitudenmodulation (siehe Gleichung 2.1 unten).

$$u_T(t) = U_T \cos 2{*}Pi{*}f_T{*}i/N, \qquad \text{mit } U_T = 1 \qquad (2.2)$$

Frage 2.1.2: Analysieren Sie das Spektrum des ASK-Signals. Welches Spektrum würden Sie erwarten, Kenntnis des Spektrums des rechteckförmigen Nutzsignals vorausgesetzt? Stimmen die Spektrallinien aus der numerischen Analyse mit Ihren Erwartungen überein?

2.2. Beispiel: DCF77

Analysieren Sie das Signal von DCF77. Wie viele Perioden des Trägersignals bringen Sie innerhalb eines Intervalls von 100 ms (Kodierung für „0“) bzw. 200 ms (Kodierung für „1“) unter? Welche Spektrallinien hätte ein Rechtecksignal der Länge 100 ms (Periodenlänge 200 ms)? Welche Spektrallinien hätte ein Rechtecksignal der Länge 200 ms (Periodenlänge 400 ms)? Geben Sie jeweils die ersten 4 Spektrallinien an. Skizzieren Sie das Spektrum des modulierten Signals. Würden Sie das Spektrum als eher schmalbandig oder breitbandig bezeichnen?

2.3. Frequenzumtastung (FSK)

Bei der Frequenzumtastung (FSK) wird im Unterschied zur analogen Frequenzmodulation zwischen festen Trägerfrequenzen umgeschaltet. Das modulierte Signal ergibt sich gemäß:

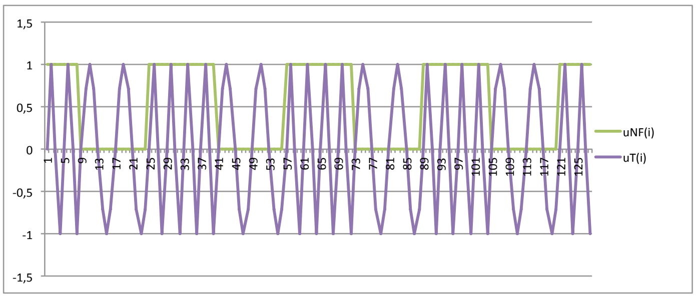
$$u_T(t) = U_T \sin(\omega_{Tm}\, t + \phi) \qquad \text{mit } m = 1,..., M;\ 0 < t < T \qquad (2.2)$$

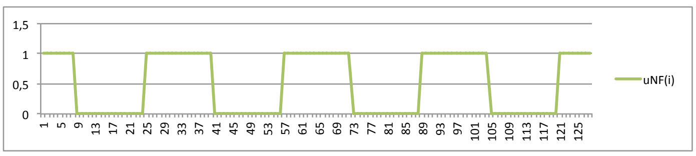
Hierbei sind $\omega_{Tm} = 2\pi\, f_{Tm}$ die diskreten Kreisfrequenzen des Trägers.

NF-Signal: uNF(i) = Am * g(i) A0 = 0 A1 = 1
HF-Träger: uT1= sin (2 Pi fT1 i/N) uT2= sin (2 Pi fT2 i/N)

Vorgaben: fT1 32 feste Vorgaben: N=128 Stützstellen
fT2 16

Index i	FSK uNF(i)	uT1(i)	uT2(i)	uT(i)
0	1	0,0	0,0	0,0
1	1	1,0	0,7	1,0
2	1	0,0	1,0	0,0
3	1	-1,0	0,7	-1,0
4	1	0,0	0,0	0,0
5	1	1,0	-0,7	1,0
6	1	0,0	-1,0	0,0
7	1	-1,0	-0,7	-1,0
8	0	0,0	0,0	0,0
9	0	1,0	0,7	0,7
10	0	0,0	1,0	1,0
11	0	-1,0	0,7	0,7
12	0	0,0	0,0	0,0
13	0	1,0	-0,7	-0,7
14	0	0,0	-1,0	-1,0
15	0	-1,0	-0,7	-0,7
16	0	0,0	0,0	0,0
17	0	1,0	0,7	0,7
18	0	0,0	1,0	1,0
19	0	-1,0	0,7	0,7
20	0	0,0	0,0	0,0
21	0	1,0	-0,7	-0,7
22	0	0,0	-1,0	-1,0
23	0	-1,0	-0,7	-0,7





Frage 2.3.1: Erstellen Sie mit Hilfe Ihrer Tabellenkalkulation ein FSK-Signal. Zu den Zuständen $u_{NF}(m) = 0$ oder $u_{NF}(m) = 1$ soll hierbei zwischen den Frequenten f_{T1} und F_{T2} umgeschaltet werden. Eine Möglichkeit hierbei besteht in der Wahl $f_{T1} = 2\ f_{T2}$.

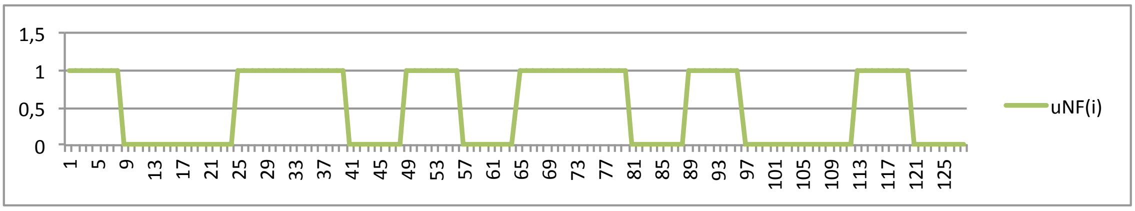
Frage 2.3.2: Untersuchen Sie das Spektrum des modulierten Signals. Welche Rolle spielen kontinuierliche Übergänge zwischen den umgetasteten Frequenzen (ohne Phasensprünge)? Welche Rolle spielt die Bitrate des Nutzsignals $u_{NF}(m)$ im Verhältnis zur Trägerfrequenz (bzw. zum Hub der Trägerfrequenzen)?

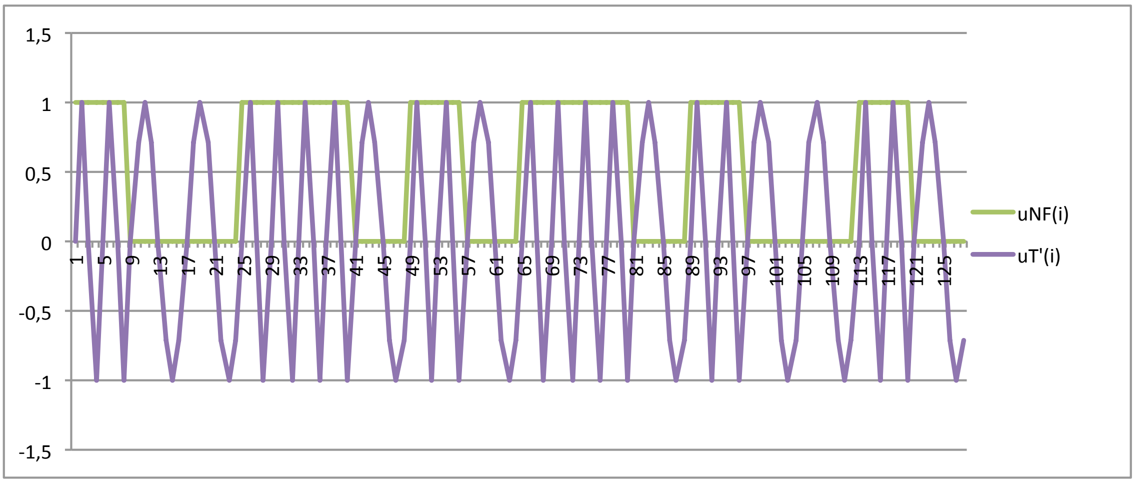
2.4. Minimum Shift Keying (MSK)

Unter dem minimalen Versatz (minimum shift) bei der Frequenzumtastung wird ein minimaler Versatz der Phase verstanden, d.h. ein kontinuierlicher Phasenübergang. Solche Übergänge sind beispielsweise dann erreichbar, wenn f_{T1} ein Vielfaches von f_{T2} ist, z.B. $f_{T1} = 2\ f_{T2}$., und wenn an den Nulldurchgängen umgetastet wird. Im einfachsten Fall werden hierbei dem Nutzsignal folgende Zustand zugeordnet:

- $u_{NF}(m) = 0$: $f_T = f_{T1}$
- $u_{NF}(m) = 1$: $f_T = f_{T2}$

Folgende Abbildung zeigt einen Verlauf des Nutzsignals und das zugehörige MSK-Signal.





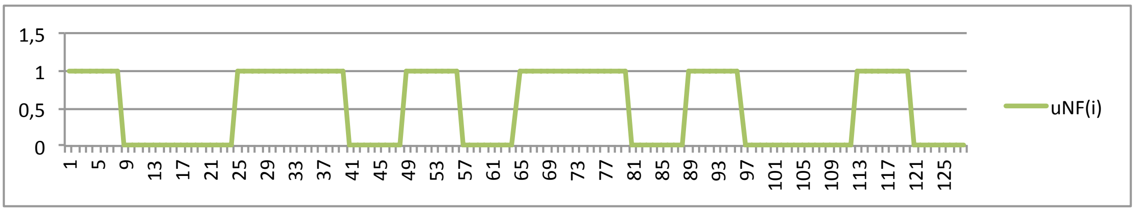
Die Umschaltungen finden hier jeweils in den Nulldurchgängen der Träger statt. Beide Träger sind synchron (was sich in diesem Fall z.B. durch einen Teiler leicht bewerkstelligen lässt). Ein anderes Schema zur Kodierung verwendet insgesamt 4 Zustände der Trägersignale an den Übergabestellen: $+f_{T1}$, $-f_{T1}$, $+f_{T2}$, $-f_{T2}$.

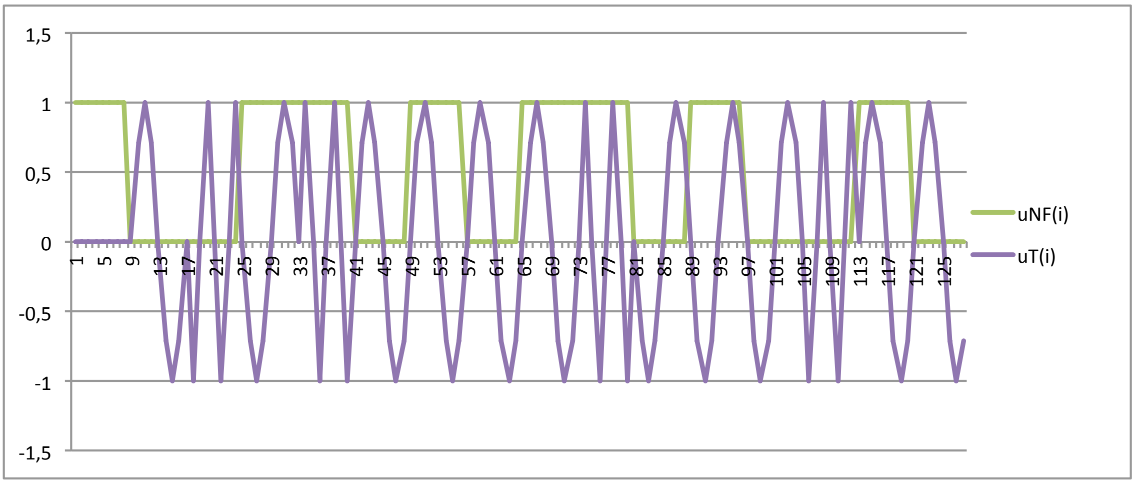
Um diesen Zuständen passende Zustände des Nutzsignals zuzuordnen, werden die Bits von $u_{NF}(m)$ alternierend auf zwei Bitströme $s_1(m)$ und $s_2(m)$ mit halber Datenrate verteilt. Die Verteilung geschieht z.B. nach folgendem Schema:

m	s(m)	s1(m)	s2(m)	fT(m)	Kodierung
0	0	0			_0_?
1	1		1	-fT2	_0_1
2	1	1		+fT1	_1_1
3	0		0	+fT2	_1_0
4	0	0		-fT1	_0_0
5	1		1	-fT2	_0_1
6	0	0		-fT2	_0_1

Kodierung	fT(m)
_0_0	-fT1
_0_1	-fT2
_1_0	+fT2
_1_1	+fT1

Das Nutzsignal s(m) wird abwechselnd auf die Signale $s_1(m)$ und $s_2(m)$ verteilt, so dass im gezeigten Schema $s_1(m)$ jeweils die geraden Indizes erhält, $s_2(m)$ die ungeraden. Den entstandenen Kombinationen ($s_1(m)$; $s_2(m+1)$) lassen sich nun nach dem in der Abbildung oben rechts gezeigten kodierungsschema die Frequenzen $+f_{T1}$, $-f_{T1}$, $+f_{T2}$ und $-f_{T2}$ zuordnen. Man erhält das in folgender Abbildung gezeigte MSK-Signal.





Erstellen Sie mit Hilfe der Tabellenkalkulation ein Schema zur Berechnung eines MSK-Signals. Bonusaufgabe: Untersuchen Sie die Signalspektren. Welchen Effekt würden angeschnittene Phasen haben? Welchen Effekt hat die Kodierung mit 4 Zuständen?

2.5. Phasenumtastung (PSK)

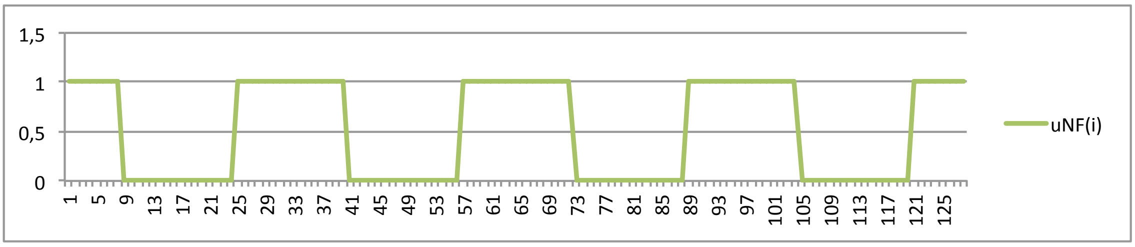
Bei der Phasenumtastung wird die Phase des Trägers entsprechen einer vorgegebenen Anzahl diskreter Phasen m in Abhängigkeit vom Nutzsignal geändert. Das Modulierte Signal errechnet sich gemäß:

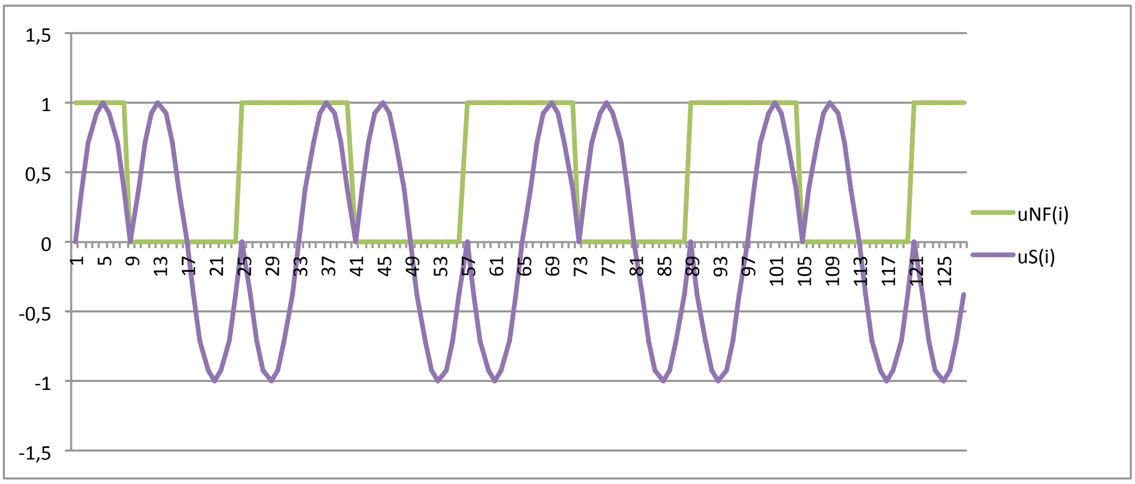
$$u_S(t) = U_T \sin(\omega_T t + \phi_m) \qquad \text{mit } m = 1,\ldots, M;\ 0 < t < T \qquad (2.3)$$

Hierbei sind $\omega_T = 2\pi\, f_T$ die feste Kreisfrequenz des Trägers, und ϕ_m die diskreten Phasen des Trägers. Die Phasen erhält ϕ_m man aus der Vorschrift

$$\phi_m = (2\,\pi\, m) / M \qquad (2.4)$$

Folgende Abbildung zeigt ein Beispiel des Verfahrens für zwei diskrete Phasen ϕ_1=0 und ϕ_2=π.



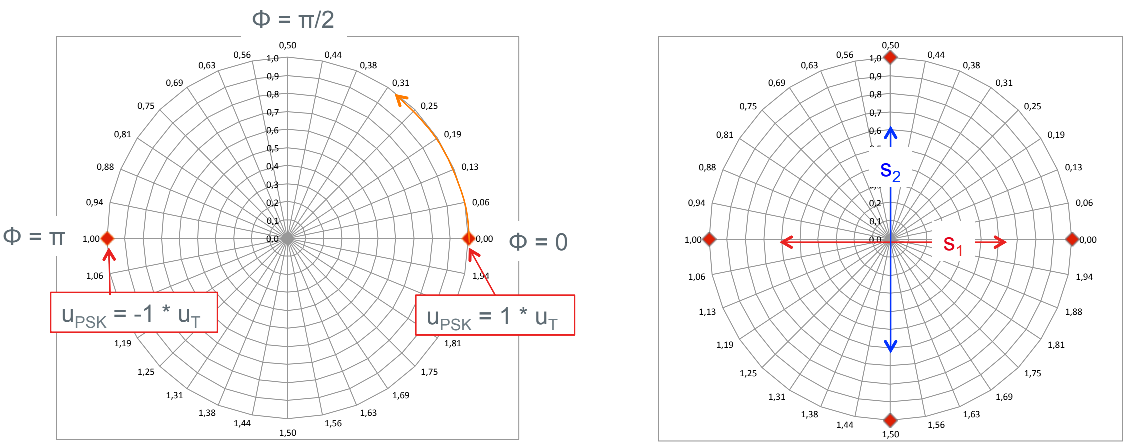


Frage 2.5.1: Erstellen Sie mit Hilfe Ihrer Tabellenkalkulation ein Beispiel für die Phasenumtastung.

Frage 2.5.2: Untersuchen Sie das Spektrum des modulierten Signals.

2.6. Quadratur-PSK (QPSK)

Stellt man die Phasen des modulierten Signals in Polarkoordinaten (also auf einem Kreisdiagramm dar), so ergibt sich eine Darstellung wie in der folgenden Abbildung gezeigt.



Bei der PSK-Modulation sind die diskreten Phasen des Trägers $\phi_0=0$ und $\phi_1=\pi$. Das Vorzeichen des Trägers wird also im Falle $\phi_2=\pi$ invertiert. Der Träger schwankt zwischen den Werten $u_T=1$ und $u_T = -1$. Betrachtet man die x-Achse des Diagramms als reelle Achse, so schwingt das Signal s_1 also in dieser Richtung, wobei die Phase zwischen 0 und π getaktet wird. Dieser Zusammenhang ist auf der linken Seite der Abbildung dargestellt.

Bei der Quadratur-Phasenumtastung arbeitet man mit einem zweiten Trägersignal, das zum ersten Träger orthogonal ist. Im Kreisdiagramm ist dieser Zusammenhang unmittelbar dadurch verdeutlicht, dass man diesen Träger in Richtung der y-Achse bzw. (imaginären Achse) anordnet. Einziger Unterschied zwischen s_2 und s_1 ist die Anordnung im Diagramm. Auch das Signal s_2 wird in der Phase zwischen den Zuständen $\phi_0=0$ und $\phi_1=\pi$ getaktet, wodurch sich jeweils das Vorzeichen invertiert.

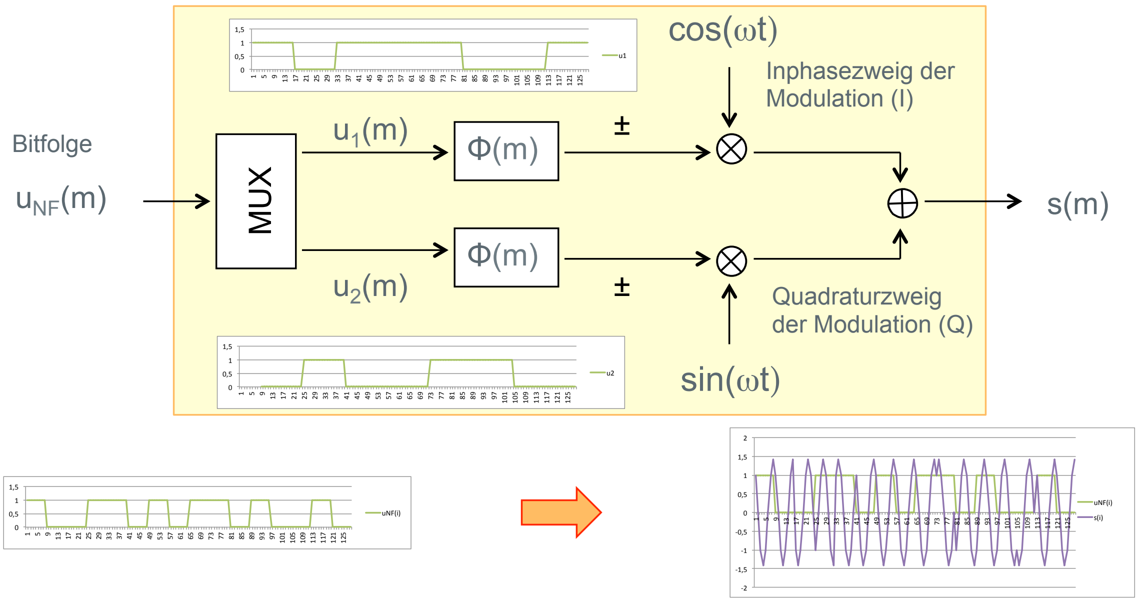
Aus der Überlagerung beider Signale ergeben sich die 4 Phasen $\phi_{10} = 0$, $\phi_{10} = \pi$, $\phi_{01} = -\pi/2$ und $\phi_{11} = \pi/2$. In der Praxis verwendet man als zueinander orthogonale Signale z.B. $s_1(t) = \cos(\omega_T\, t + \phi_m)$ und $s_2(t) = \sin(\omega_T\, t + \phi_m) = \cos(\omega_T\, t + \phi_m - \pi/2)$.

Frage 2.6.1: Erstellen Sie mit Hilfe Ihrer Tabellenkalkulation ein QPSK-Signal. Hinweis: Teilen Sie hierzu das Eingangssignal u_{NF} in zwei Signalströme mit halber Bitrate auf, wie im Vorlesungsteil auf Folie 16 dargestellt.

Frage 2.6.2: Untersuchen Sie das Spektrum des modulierten Signals.

2.7. QPSK-Sender

Ein QPSK Sender hat den in folgender Abbildung gezeigten Aufbau.



Frage 2.7.1: Lokalisieren Sie den Multiplexer (bzw. Demultiplexer) in Ihrer Tabellenkalkulation aus Aufgabe 2.6. Erstellen Sie Diagramme von $u_{NF}(i)$, $u_1(i)$, und $u_2(i)$.

Frage 2.7.2: Erstellen Sie ein Diagramm der beiden Trägersignale $s_1(i) = \cos(\omega_T\, i/N + \phi_m) = VZ1(i) * \cos(\omega_T\, i/N)$ und $s_2(i) = \sin(\omega_T\, i/N + \phi_m) = VZ2(i) * \sin(\omega_T\, i/N)$ zusammen mit dem Verlauf der Vorzeichenbits VZ1(i) und VZ2(i). Lokalisieren Sie diese beiden Signale im Blockschaltbild.

Frage 2.7.3: Erstellen Sie ein Diagramm des modulierten Signals s(i) am Ausgang des Blockschaltbilds. Vergleichen Sie das modulierte Signal mit dem Eingangssignal. Lassen sich die Phasenübergänge erkennen?

Frage 2.7.4: Modifizieren Sie Ihren Sender so, dass nur ein Signalzweig $u_1(i)$ moduliert wird. Wie sieht das Ausgangssignal s(i) aus?

2.8. QPSK-Empfänger

Frage 2.8.1: Wie ist ein QPSK Empfänger aufgebaut?

Frage 2.8.2: Könnte man auf die Multiplexer verzichten und stattdessen zwei unabhängige Signale u_1 und u_2 senden bzw. empfangen (z.B. ein Audio Stereo-Signal)?

Frage 2.8.3: Wieso kommen sich diese Signale u_1 und u_2 bei der Modulation bzw. Demodulation nicht in die Quere?

Frage 2.8.4: Was bedeutet orthogonal? Wann sind zwei Vektoren orthogonal? Was sind orthogonale Funktionen bzw. Signale?

Frage 2.8.5: Könnte man auf ein Signal verzichten und den Sender nur mit dem Signal u_1 betreiben?

Frage 2.8.6: Wenn der Sender nur mit dem Signal u_1 betrieben wird, kann ein normaler QPSK-Empfänger dieses Signal korrekt empfangen?

2.9. Einsatz orthogonaler Signale

Bei QPSK kamen als Träger $s_1(t)$ und $s_2(t)$ orthogonale Signale zum Einsatz. Konkret wurden für $s_1(t) = \cos(\omega_T t + \phi_m)$ und für $s_2(t) = \sin(\omega_T t + \phi_m)$ verwendet, d.h. ein Kosinus-Signal und ein Sinus-Signal. Sinus und Kosinus sind orthogonal zueinander in dem Sinne, dass das Integral über dem Produkt $\cos(\phi) * \sin(\phi)$ über alle Werte Null ϕ ergibt.

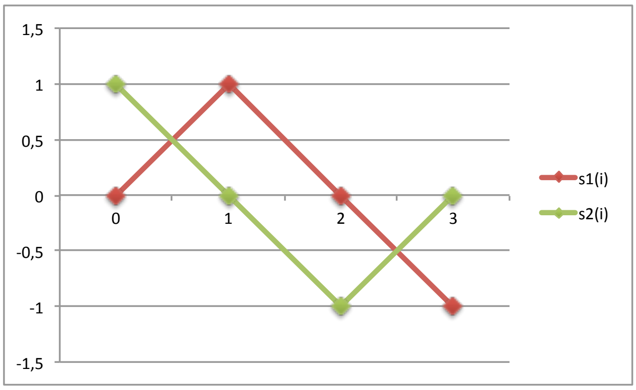
Für den praktischen Gebrauch lässt sich diese Definition der Orthogonalität auch auf zeitdiskrete Signale übertragen: Zwei Signale bzw. Funktionen $s_1(i) = \cos(i\ 2\pi/N)$ und $s_2(i) = \sin(i\ 2\pi/N)$ sind orthogonal zueinander, wenn die Summe

$$\sum s_1(i) * s_2(i) = 0 \qquad \text{für alle } i = 0, ..., N \qquad (2.5)$$

Diese Definition erinnert an das Skalarprodukt zweier Vektoren: Zwei Vektoren v_1 und v_2 sind orthogonal zueinander, wenn ihr Skalarprodukt Null ergibt. Beispiel: zwei dreidimensionale Vektoren $v_1 = (0, 2, 0)$ und $v_2 = (17, 0,0)$ sind orthogonal zueinander. Gleichung (2.5) gilt demnach vermutlich ganz unabhängig von der Verwendung von Sinus und Kosinus.

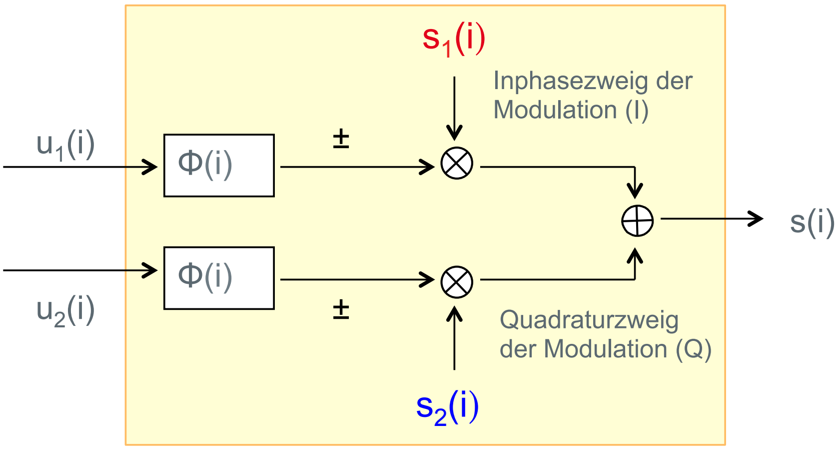
Als orthogonale Signale für QPSK sollen daher folgende Signale verwendet werden:

Index i	s1(i)	s2(i)	s1(i) * s2(i)
0	0	1	0
1	1	0	0
2	0	-1	0
3	-1	0	0
		Summe:	0



Die Signale $s_1(i)$ und $s_2(i)$ sind über 4 Stützstellen definiert, d.h. als Träger haben Sie eine Periodenlänge von 4 Stützstellen. Die Gültigkeit der Gleichung (2.5) lässt sich durch eine einfache Rechnung nachprüfen, wie in der Abbildung gezeigt. Die Wahl der Signale mit dem Wertebereich 0, 1 und -1 vereinfacht die Berechnungen für einen QPSK Modulator bzw. Demodulator erheblich. Wie man an der Darstellung erkennen kann, entsprechen die Werte von $s_1(i)$ und $s_2(i)$ den Werten eines Sinus-Signals bzw. Kosinus-Signals mit 4 Stützstellen pro Periode.

Mit diesen Trägersignalen soll folgende Schaltung zur Modulation realisiert werden:



Als Eingangsignale werden willkürliche Bitfolgen $u_1(m)$ und $u_2(m)$ angenommen. Hierbei ist jeder Wert $u_1(m)$ und $u_2(m)$ auf eine Periodenlänge von jeweils 4 Stützstellen zu erweitern, so dass eine Verarbeitung mit den Trägern $s_1(i)$ und $s_2(i)$ möglich ist.

Der jeweils den Signalen $u_1(i)$ und $u_2(i)$ nachgeschaltete Block mit der Bezeichnung $\phi(i)$ dient nur zur Kodierung des Vorzeichens, z.B. $u_1(i) = 1$ ergibt Vorzeichen 1, $u_1(i) = 0$ ergibt Vorzeichen -1. Dieses Vorzeichen wird dann mit dem jeweiligen Träger s1(i) (bzw. s2(i)) multipliziert. Dieses Vorgehen entspricht dem Kreisdiagramm aus Aufgabe 2.6.

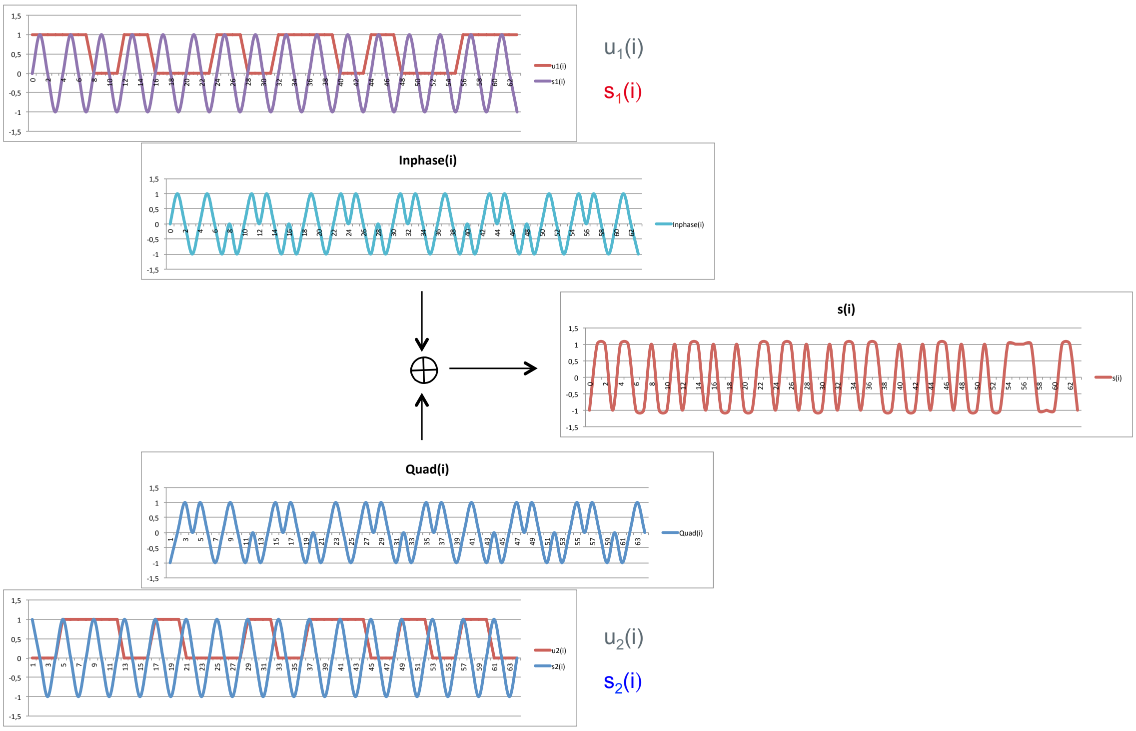
Frage 2.9.1: Erzeugen Sie zufällige Bitfolgen $u_1(m)$ und $u_2(m)$ über M = 16 Stützstellen. Erzeugen Sie hieraus für einen Index i = 0 bis 63 (über 64 Stützstellen) die Signale $u_1(i)$ und $u_2(i)$. Diese Signale entsprechen dann 16 Perioden des Trägers.

Frage 2.9.2: Erzeugen Sie die Signale im Zweig I (Inphase-Zweig) des Modulators (inkl. Diagramm). Erzeugen Sie die Signale im Zweig Q (Quadratur-Zweig) des Modulators (inkl. Diagramm).

Frage 2.9.3: Berechnen Sie das modulierte Signal s(i) (inkl. Diagramm). Erscheint es Ihnen offensichtlich, dass sich hieraus die beiden Eingangssignale $u_1(m)$ und $u_2(m)$ am anderen Ende der Übertragungsstrecke wieder zurück gewinnen lassen?

Frage 2.9.4: Als Signale sollen $s_1(i) = \{0,1,1,0\}$ und $s_2(i) = \{1,0,0,1\}$ verwendet werden. Würde die Modulation mit diesen Trägern funktionieren? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Muster für die Ergebnisse der Berechnung:



2.10. QPSK Übertragungsstrecke

Wenn die Signale $s_1(i)$ und $s_2(i)$ zueinander orthogonal sind, so sollte das Schalten der Phasen bzw. der Vorzeichen über einer Periode bzw. Vielfache einer Periode hieran nichts ändern. Für das modulierte Signal s(i) erhält man aus der Superposition der Signale aus den Zweigen Inphase und Quadratur:

$$s(i) = Vz_1(i) * s_1(i) + Vz_2(i) * s_2(i) \qquad (2.6)$$

Hierbei bezeichnen $Vz_1(i)$ und $Vz_2(i)$ die Vorzeichen, bzw. Multiplikanden (+1) oder (-1). Bei einer idealen Übertragungsstrecke erhält man ein zu s(i) proportionales Signal am Eingang des Empfängers. Der Empfänger (vgl. Aufgabe 2.8) rekonstruiert die Signale in den Zweigen Inphase und Quadratur durch Multiplikation mit dem zugehörigen Trägersignal $s_1(i)$ bzw. $s_2(i)$.

Wegen der Orthogonalität der Signale $s_1(i)$ und $s_2(i)$ verschwinden bei der Mittelung (Tiefpassfilterung) die gemischten Anteile $s_1(i) * s_2(i)$. Dieser Zusammenhang geht unmittelbar aus der Definition der Orthogonalität hervor (siehe Gleichung 2.5).

Frage 2.10.1: Skizzieren Sie die Struktur eines passenden Empfängers zu Aufgabe 2.9. Starten Sie mit dem empfangenen Signal s(i). Bezeichnen Sie jeweiligen Stationen mit den zu erwartenden Signalen. Verwenden Sie Gleichungen an passenden Stellen.

Frage 2.10.2: Simulieren Sie den Empfänger in Ihrer Tabellenkalkulation. Zeichnen Sie Diagramme zu den in Frage 2.19.1 gekennzeichneten Signalen auf.

Frage 2.10.3: Ergänzen Sie die Beschriftung in folgender Abbildung 2.10.3. Erläutern Sie den Ablauf.

Frage 2.10.4: Abbildung 2.10.4 zeigt den gleichen Ablauf wie Ablauf 2.10.3. Was ist mit den Signalen geschehen? Erläutern Sie die Unterschiede und das Verhalten des Empfängers.

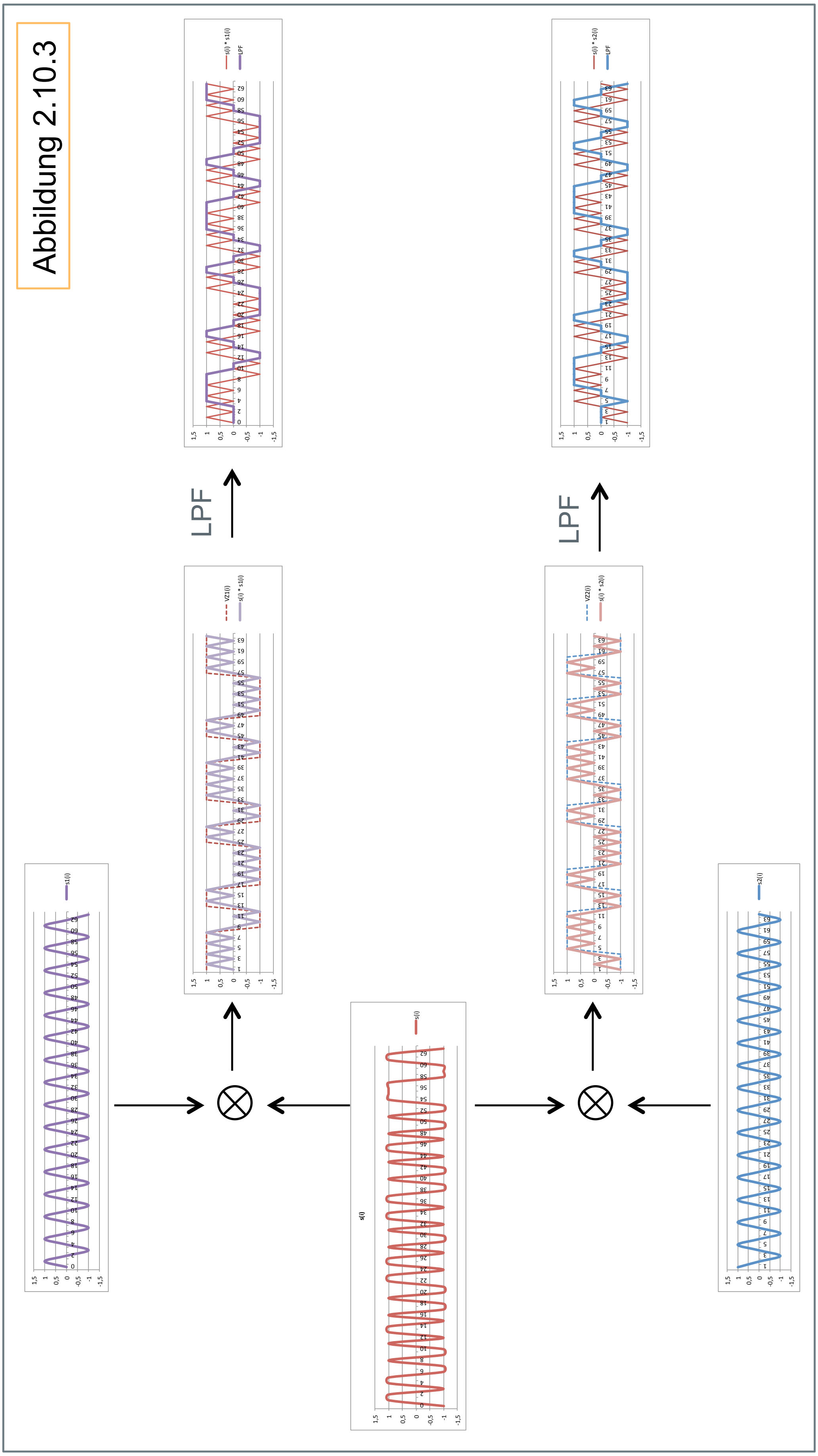


Abbildung 2.10.3

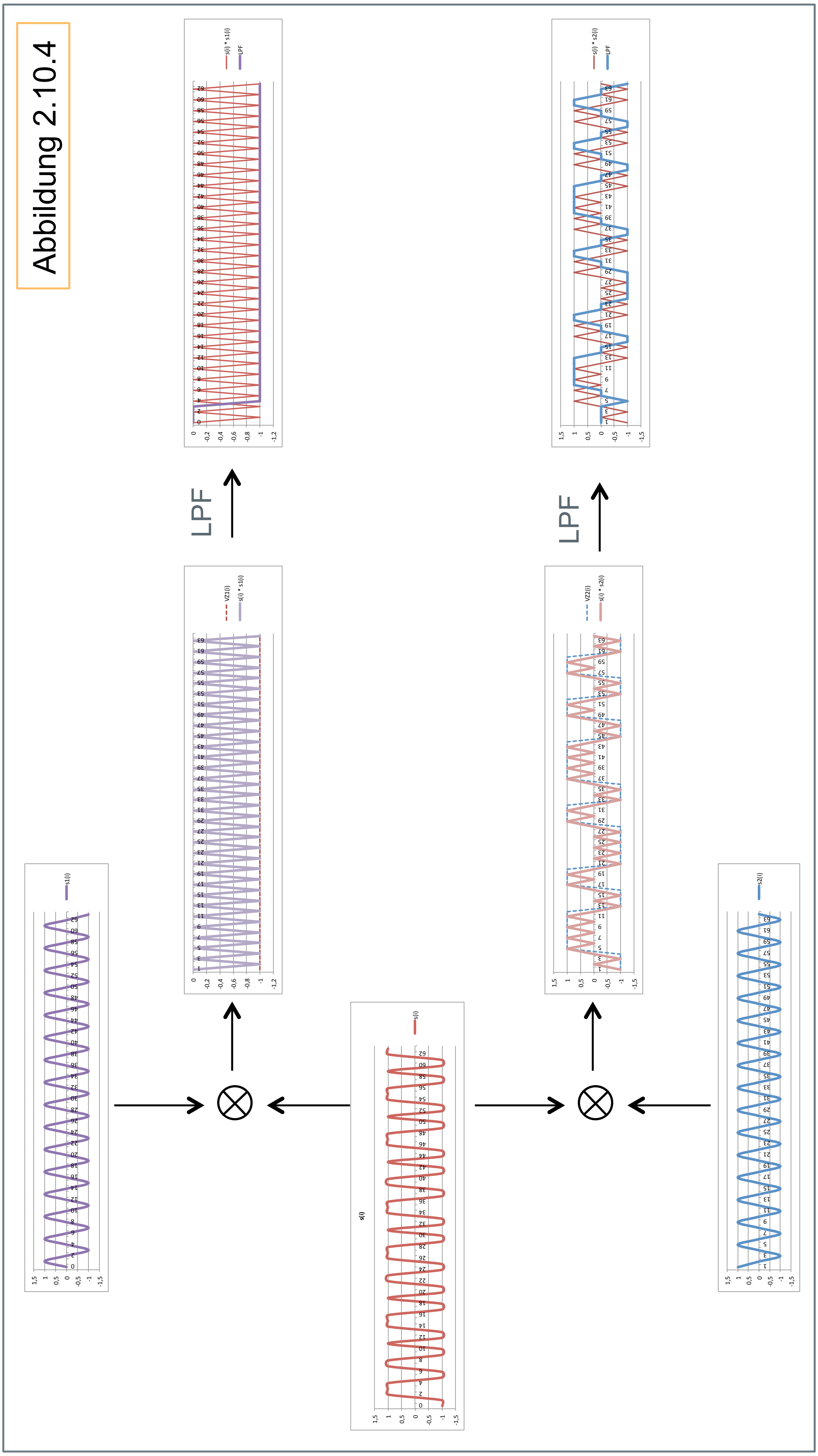


Abbildung 2.10.4

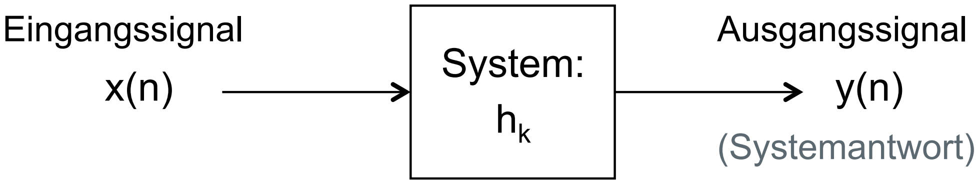
3. Signalverarbeitung

3.1. Faltung

Die Faltung einer zeitdiskreter Funktionen x(n) mit den K Stützstellen der Funktion h_k wird durch die Faltungssumme

$$y[n] = \sum h_k \cdot x[n-k] \tag{3.1}$$

beschrieben, wobei der Index k über alle vorhandenen Stützstellen h_k verläuft. Die Koeffizienten h_k beschreiben das Verhalten des Systems: auf die Eingangsfunktion x(n) reagiert das System am Ausgang mit dem Signal y(n). Folgende Abbildung zeigt das System mit Eingangssignal und Ausgangssignal.



Rechnerisch ermittelt man die Antwort des Systems y(n) auf ein Eingangssignal x(n) nach der Vorschrift gemäß Gleichung (3.1). Liegt die Systembeschreibung h_k beispielsweise mit insgesamt 5 Stützstellen vor, so ergibt sich aus Gleichung (3.1):

$$y[n] = h_0 \cdot x[n] + h_1 \cdot x[n-1] + h_2 \cdot x[n-2] + h_3 \cdot x[n-3] + h_4 \cdot x[n-4] \tag{3.2}$$

Frage 3.1.1: Analytische Berechnung. Geben Sie als Eingangssignal einen Impuls vor, d.h. x(0) = 1 und x(n) = 0 für $n \neq 0$. Berechnen Sie mit Hilfe von Gleichung (3.2) die Systemantwort y(n). Hinweis: Gehen Sie schrittweise vor: (1) n=0, (2) n=1, (3), n=2, ... Schreiben Sie die Ergebnisse zeilenweise untereinander.

Frage 3.1.2: Analytische Berechnung. Geben Sie als Eingangssignal eine Sprungfunktion vor, d.h. x(n) = 1 für $n \geq 0$ und x(n) = 0 für $n < 0$. Berechnen Sie mit Hilfe von Gleichung (3.2) die Systemantwort y(n). Hinweis: Gehen Sie schrittweise vor: (1) n=0, (2) n=1, (3), n=2, ... Schreiben Sie die Ergebnisse zeilenweise untereinander.

Frage 3.1.3: Die Antwort des Systems auf einen Impuls als Eingangssignal wird auch als Impulsantwort bezeichnet. Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Impulsantwort und den Koeffizienten h_k?

Frage 3.1.4: Die Antwort des Systems auf einen Sprung als Eingangssignal wird auch als Sprungantwort bezeichnet. Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Impulsantwort und der Sprungantwort? Hinweis: Stellen Sie die Ergebnisse der schrittweisen Berechnung aus den Aufgaben 3.1.1 und 3.1.2 zeilenweise (n=0, n=1, ...) gegenüber.

Frage 3.1.5: Numerische Berechnung. Geben Sie für die Systemkoeffizienten h_k 5 Werte vor, z.B. h_k = {0,2; 0,2; 0,2; 0,2; 0,2}. Erstellen Sie mit Hilfe Ihrer Tabellenkalkulation ein Schema zur Berechnung der Faltungssumme. Berechnen Sie hiermit (1) die Impulsantwort, (2) die Sprungantwort, (3) die Reaktion auf ein harmonisches Signal (sin $(\omega_T t + \phi)$) mit der Frequenz f_T. Analysieren Sie die Ergebnisse.

Frage 3.1.6: Numerische Berechnung. Schalten Sie zwei der Systeme hintereinander (Ausgang $y_1(n)$ von System 1 ist Eingang $x_2(n)$ des identischen Systems 2). Wiederholen Sie die Berechnungen von Aufgabe 3.1.5 für die kaskadierten Systeme. Interpretieren Sie die Ergebnisse.

Muster für die Berechnung von Systemantworten:

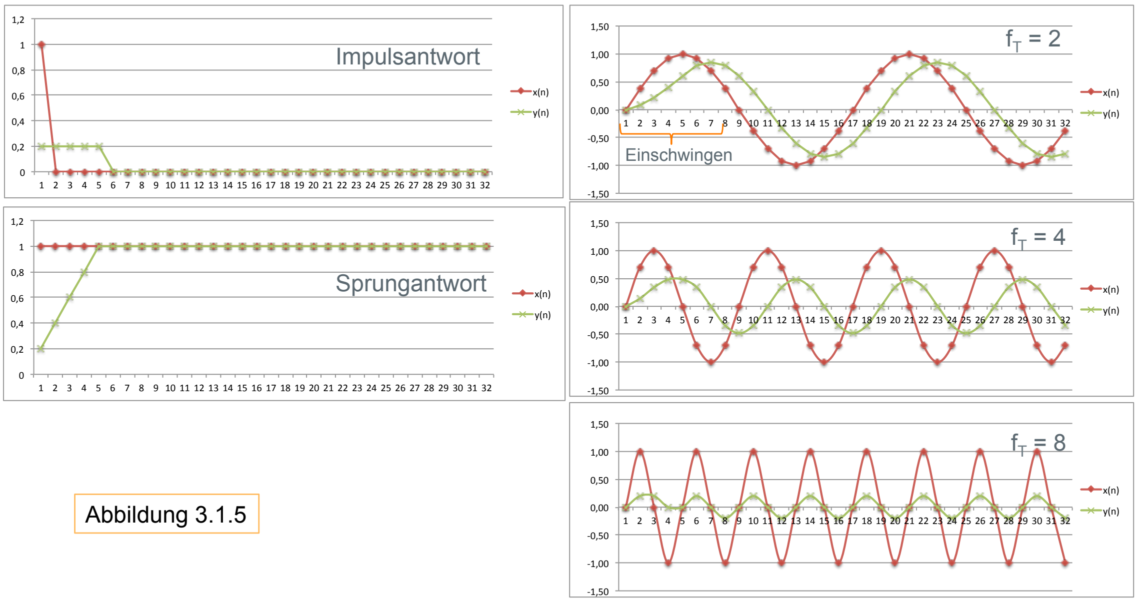


Abbildung 3.1.5

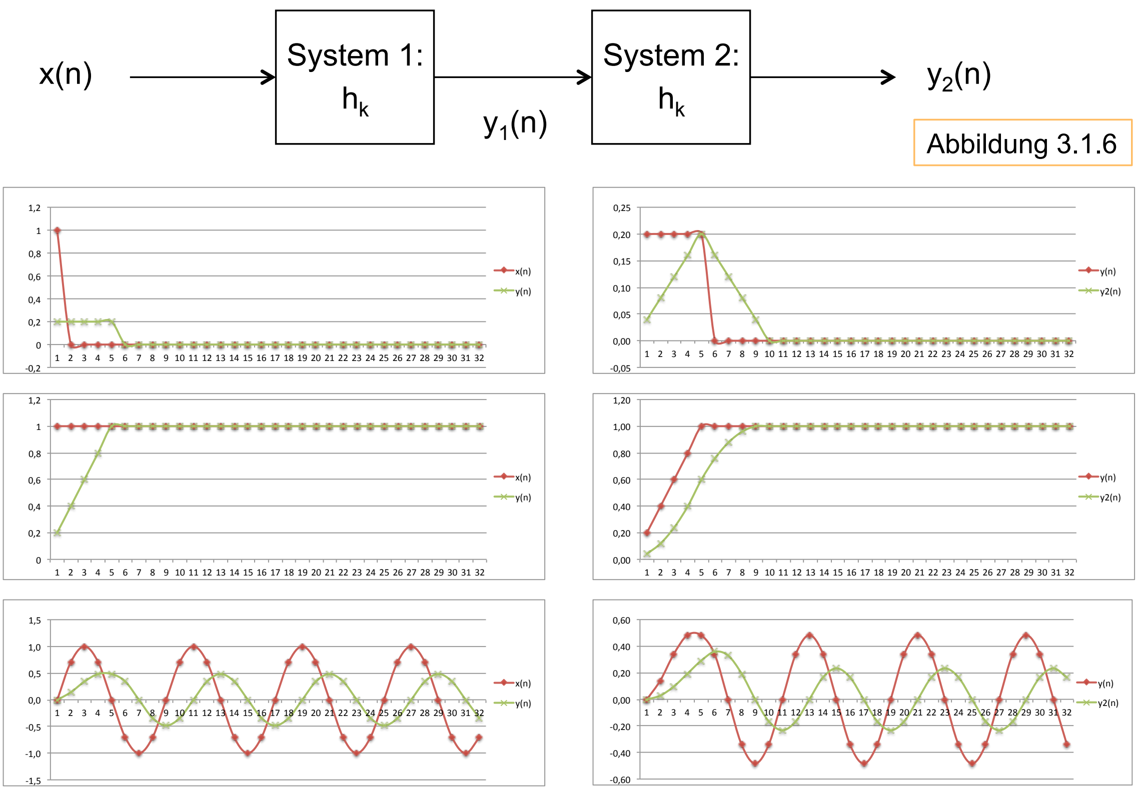
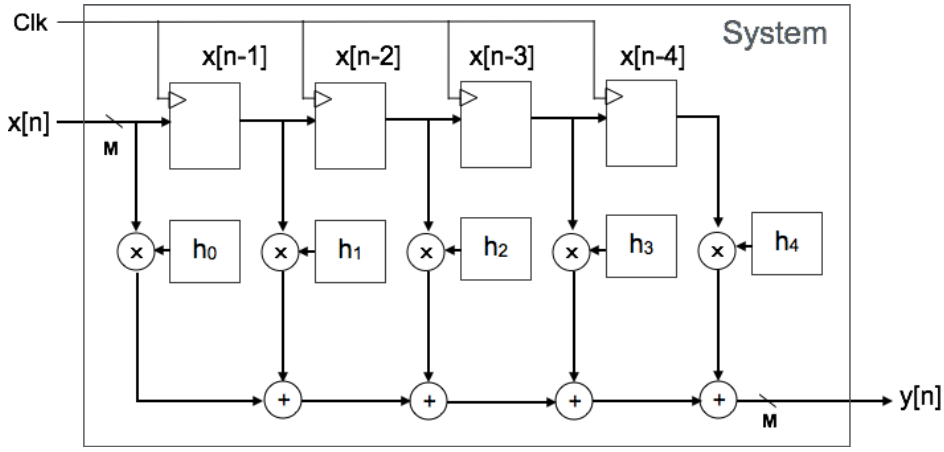


Abbildung 3.1.6

3.2. FIR Filter

Den Faltungsalgorithmus nach Gleichung (3.1), bzw. speziell mit 5 Koeffizienten h_k gemäß Gleichung (3.2), kann man als digitale Schaltung realisieren. Folgende Abbildung zeigt das Blockschaltbild.



Man erkennt links das Eingangssignal x(n), rechts das Ausgangssignal y(n), sowie die Systemkoeffizienten h_0 bis h_4, die in Registern für die Multiplikation vorgehalten werden. Die Schaltung ist getaktet (siehe Signal Clk oben). Die Register oben funktionieren als Schieberegister und dienen zur Speicherung der vergangenen Werte x(n-i), die für die Berechnung benötigt werden.

Frage 3.2.1: Erläutern Sie die Funktion der Schaltung. Ergibt sich hieraus ein Algorithmus gemäß Gleichung (3.2)? Hinweis: Geben Sie hierzu z.B. einen Impuls auf den Eingang der Schaltung und ermitteln Sie das Ergebnis schrittweise (ein Takt pro Schritt). Stimmt das Ergebnis mit Ihrer Berechnung zu Frage 3.1.1 überein?

Frage 3.2.2: Die Impulsantwort eines Systems wurde gemessen. Die Impulsantwort ist nach 8 Stützstellen abgeklungen. Wie können Sie hieraus die Filterkoeffizienten h_0 bis h_7 bestimmen? Hinweis: Das Filter soll das Systemverhalten nachbilden, d.h. die Impulsantwort.

Frage 3.2.3: Die Sprungantwort eines Systems wurde gemessen. Wie können Sie hieraus die Impulsantwort des Systems (bzw. die Filterkoeffizienten) bestimmen. Hinweis: Verwenden Sie als Hilfestellung eine Ihrer Berechnungen mit Hilfe der Tabellenkalkulation aus Aufgabe 3.1.

Frage 3.2.4: Ermitteln Sie durch Probieren Koeffizienten für ein FIR Filter mit 5 Koeffizienten mit (1) Tiefpassverhalten, (2) Hochpassverhalten. Testen Sie Ihren Entwurf. Hinweis: Verwenden Sie Ihre Tabellenkalkulation.

3.3. IIR Filter

FIR bilden das Verhalten eines Systems durch Reproduktion der Impulsantwort nach. Im Vergleich zum realen physikalischen System erschient die Nachbildung jedoch wenig effizient. Für die Beschreibung des realen Systems genügen sehr wenige Parameter: Für ein physikalisch realisiertes RLC-Filter beispielsweise die Werte von R, L und C. Im Vergleich hierzu benötigt das FIR-Filter selbst für eine recht grobe Näherung bereits recht viele Systemparameter (Filterkoeffizienten).

Die Ursache hierfür liegt darin, dass mit Hilfe einer Differentialgleichung beschriebene reale System Rückkopplungen verwendet. Der FIR-Algorithmus gemäß Gleichung (3.1) bzw. Gleichung (3.2) berechnet die Stützstellen des Ausgangssignals jedoch ausschließlich aus den Stützstellen des Eingangssignals mit Hilfe der Filterkoeffizienten. Somit ist für jede Stützstelle der Impulsantwort ein

Filterkoeffizient erforderlich. Mit einem Filteralgorithmus folgender Form ließe sich die Zahl der erforderlichen Parameter zur Nachbildung des Systems deutlich reduzieren:

$$y[n] = \sum a_k \cdot x[n-k] \ - \ \sum b_l \cdot y[n-l] \quad (3.3)$$

Während der erste Teil mit den Koeffizienten a_k der Struktur des FIR-Filters, koppelt der zweite Teil des Algorithmus vergangene Werte des Ausgangssignals $y[n-l]$ mit Hilfe der Koeffizienten b_l zurück. Die Wirkungsweise der Gleichung verdeutlicht die folgende vereinfachte Form.

$$y[n] = a_0 \cdot x[n] \ - \ b_1 \cdot y[n-1] \quad (3.4)$$

Wählt man beispielsweise $a_0 = 1{,}8$ und $b_1 = 0{,}8$, so klingt die Impulsantwort des Filters ohne Beschränkung sehr lange aus, unabhängig von der Anzahl der Filterkoeffizienten. Wegen der im Vergleich zum FIR-Filter unbegrenzten Dauer der Impulsantwort werden solche Algorithmen auch als IIR Filter bezeichnet (wobei IIR für Infinite Impulse Response steht).

Frage 3.3.1: Skizzieren Sie ein Blockschaltbild für ein System, das Gleichung (3.4) realisiert. Hinweis: Verwenden Sie die Elemente aus der Abbildung in Abschnitt 3.2. Verwenden Sie ausserdem eine Rückkopplung des Ausgangssignals.

Frage 3.3.2: Realisieren Sie das IIR-Filter gemäß Gleichung 3.3 mit Hilfe Ihrer Tabellenkalkulation. Testen Sie Ihren Entwurf für typische Eingangssignale (Impuls, Sprung, harmonisches Signal) für unterschiedliche Filterkoeffizienten.

Frage 3.3.3: Stabilität. Im Unterschied zu FIR-Filtern können IIR-Filter wegen der verwendeten Rück-kopplung aufschwingen. Dieses Phänomen ist aus der Musik bekannt, wenn sich ein Mikrofon einem Lautsprecher nähert und das bereits verstärkte signal nochmals aufgenommen und verstärkt wird. Unter welchen Bedingungen schwingt ein Filter gemäß Gleichung (3.4) aus? Ein solches System bezeichnet man auch als instabil. Erläutern Sie eine mögliche Definition der Stabilität.

Frage 3.3.4: Beschreiben Sie den Algorithmus und skizzieren Sie Blockdiagramme für folgende Filter: (1) Koeffizienten a0, a1, b1, (2) Koeffizienten a0, a1, a2, b1, b2.

3.4. Übertragungsfunktion

Unter der Übertragungsfunktion eines Systems versteht man das Verhältnis zwischen Aus-gangssignal und Eingangssignal im Frequenzbereich.

$$H(u) = Y(u) / X(u) \quad (3.5)$$

Wie die Spektren der zugehörigen Signale ist die Übertragungsfunktion eine komplexe Zahl (siehe auch Abschnitt 1 über Modulationsverfahren). Sie besitzt also einen Realteil und einen Imaginärteil. Die Übertragungsfunktion entspricht dem Frequenzgang des Systems, wenn man sie nach Betrag und Phase darstellt.

Gemäß Gleichung (3.5) könnte man die Übertragungsfunktion aus den Spektren des Eingangssignals X(u) und des Ausgangssignal Y(u) ermitteln. Hierbei spielt die Impulsantwort als Eingangssignal eine besondere Rolle.

1. Frage 3.4.1: Ermitteln Sie das Spektrum eines Impulses. Analysieren Sie das Ergebnis. Welche besondere Rolle spielt die Impulsantwort eines Systems bei der Ermittlung der Übertragungsfunktion? Hinweis: Verwenden Sie Ihre Spektralanalyse aus Abschnitt 1 und rechnen Sie das Signal über 128 Stützstellen.

Frage 3.4.2: Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion des Systems aus Frage 3.1.5. Stellen Sie das Ergebnis als Diagramm dar (Realteil und Imaginärteil, bzw. nach Betrag und Phase). Interpretieren Sie das Ergebnis: Welches Verhalten hat das System? Hinweis: Berechnen Sie das Signal über 128 Stützstellen.

Frage 3.4.3: Ermitteln Sie den Frequenzgang des Systems durch Messung im Zeitbereich, indem Sie als Eingangssignal eine harmonische Funktion mit fester Frequenz f anlegen. Das Verhältnis der Ausgangsamplitude (im eingeschwungenen Zustand) zur Eingangsamplitude entspricht hierbei einem Messpunkt des Spektrums bei der Frequenz f. Erhöhen Sie die Frequenz des Eingangssignals zur Aufnahme weiterer errechneter Messpunkte. Zusatzfrage: Wie können Sie mit dieser Methode den Phasengang messen?

Frage 3.4.4: Verwenden Sie zur Messung des Amplitudengangs der Übertragungsfunktion des Systems Rauschen. Erzeugen Sie hierzu aus Zufallszahlen ein Pseudo-Rauschen. Transformieren Sie das Ausgangssignal in den Spektralbereich und vergleichen Sie mit dem ermittelten Spektrum aus Frage 3.4.2 und Frage 3.4.2. Wieso kann diese Methode funktionieren? Hinweis: Transformieren Sie das Eingangssignal (Rauschen) ebenfalls in den Spektralbereich und berechnen Sie den Amplitudengang. Erläutern Sie das Ergebnis und den Einfluss auf die Definition gemäß Gleichung (3.5).

Muster für die Berechnungen:

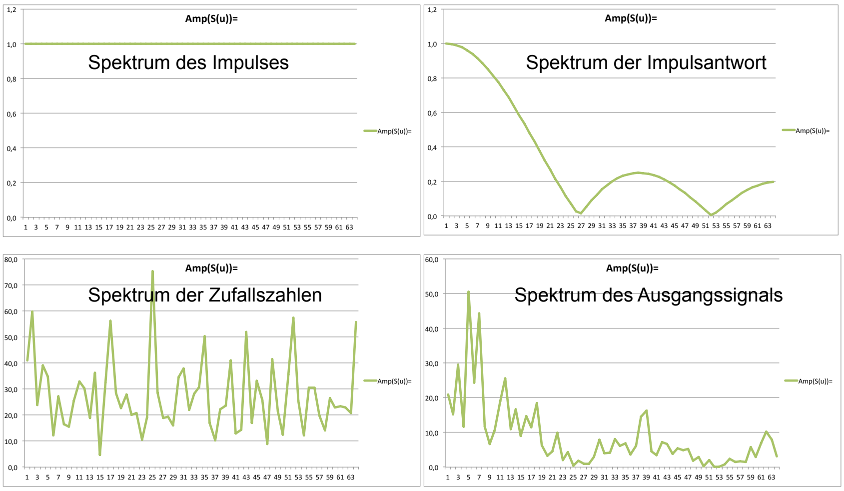
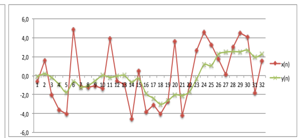


Abbildung 3.4



x(n) = Zufallszahlen
y(n) = Systemausgang

4. Informationstheorie

Frage 4.1: Quellenkodierung. Bei der verlustfreien Kodierung einer Nachricht bzw. Datei (Quelle) wird angestrebt, ggf. vorhandene Redundanz zu beseitigen. Wieso?

Frage 4.2: Kanalkodierung. Bei der Kodierung einer Nachricht zur Übertragung über einen übertragungstechnischen Kanal fügt man der Nachricht gezielt Redundanz zu. Wieso?

4.1. Information und Wahrscheinlichkeit

In der Informationstheorie wird der Begriff der Information im Zusammenhang mit der Kodierung von Zeichen, dem Informationsgehalt einer Quelle, bzw. der Redundanz näher definiert. Als Nachrichtenquelle sei ein Zufallsexperiment betrachtet, beispielsweise das Würfeln von Zahlen. Die Nachrichtenquelle hat in diesem Fall bei Verwendung herkömmlicher Würfel einen Vorrat von 6 Zeichen (die Augenzahlen 1 bis 6). Die Information besteht mit jedem Wurf darin, dass das Ergebnis das Zufallsexperiment auflöst.

Der Informationsgehalt eines Zeichens ist hierbei umso höher, je unwahrscheinlicher das Zeichen ist: Ein seltenes Zeichen hat einen höheren Neuigkeitswert. Ein seltenes Ereignis schafft es eher in die Nachrichtenreportage. Bei einem fairen Würfel sind alle Zeichen gleich wahrscheinlich.

Aus dieser Betrachtung lässt sich ein Maß für den Informationsgehalt wie folgt ableiten. Die Wahrscheinlichkeit zweier unabhängiger Würfe für zwei Zeichen x_1 und x_2 entspricht der Verbundwahrscheinlichkeit $p_2 = p_{x1} * p_{x2}$, wobei die p_{x1} Wahrscheinlichkeit ist, dass Zeichen 1 gewürfelt wird, und p_{x2} die Wahrscheinlichkeit, dass Zeichen 2 gewürfelt wird. Bei einem fairen Würfel sind $p_{x1} = p_{x2} = 1/6$ und $p_2 = 1/36$.

Auf der anderen Seite ist der Informationsgehalt I_2 beider Zeichen gleich der Summe des Informationsgehaltes I_{x1} von Zeichen 1 und des Informationsgehaltes I_{x2} von Zeichen 2, d.h. $I_2 = I_{x1} + I_{x2}$. Um den Informationsgehalt aus der Wahrscheinlichkeit heraus zu definieren, liegt also die Verwendung eines logarithmischen Masstabs nahe:

$$I_x = ld(1/p_x) = - ld(p_x) \qquad (4.1)$$

Der Informationsgehalt I_x eines Zeichens ist umgekehrt proportional zum dualen Logarithmus (Zweierlogarithmus) der Wahrscheinlichkeit des Zeichens p_x. Der Informationsgehalt wird in der Pseudo-Einheit Bit gemessen.

Frage 4.3: Skizzieren Sie den Verlauf des Informationsgehalts I_x über der Wahrscheinlichkeit p_x für folgende Annahmen: p_x = 0,5, p_x -> 1 (sicheres Ereignis), p_x -> 0 (unmögliches Ereignis). Interpretieren Sie die Ergebnisse.

Frage 4.4: Berechnen Sie den Informationsgehalt

- eines Bits
- einer hexadezimalen Zahl
- einer Dezimalzahl
- einer Zahl auf dem Würfel
- einer Zahl im BCD-Format.

Hinweis: Machen Sie hierbei plausible Angaben über die Wahrscheinlichkeit des jeweiligen Zeichens. Hinweis: Der Zweierlogarithmus lässt sich aus dem Zehnerlogarithmus mit Hilfe einer Konstanten berechnen (abzuleiten aus $2^y = x \Rightarrow \log(2^y) = y \log(2) = \log(x)$, wobei $y = ld(x)$; $\log(2) \approx 0{,}301$).

Frage 4.5: Mit wie vielen Bits sind die Zeichen in Frage 4.3 kodiert? Welche der Kodierungen würden Sie als kompakt bzw. optimal bezeichnen?

4.2. Entropie

Als Quelle soll nochmals das Würfelexperiment dienen. Die Quelle ist diskret, liefert also einzelne Ereignisse in Form der Würfe, sowie gedächtnislos, d.h. die Wahrscheinlichkeit eines Wurfes (bzw. eines Zeichens) ist unabhängig von der Vorgeschichte. Die Quelle hat einen Zeichenvorrat (ein Alphabet) von insgesamt 6 Zeichen $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$.

Unter der Entropie H(X) der Quelle wird der gesamte Informationsgehalt verstanden, wobei jedes Zeichen mit seiner Wahrscheinlichkeit gewichtet wird:

$$H(X) = \sum p_i I_i = - \sum p_i \, ld(p_i) \qquad \text{mit Index } i = 1, ..., N \qquad (4.2)$$

Frage 4.6: Berechnen Sie die Entropie des Würfelexperiments als Quelle.

Frage 4.7: Berechnen Sie die Entropie H_b einer binären Quelle mit dem Zeichenvorrat $X=\{0,1\}$ und den Wahrscheinlichkeiten $p_0 = p_1 = 0{,}5$.

Frage 4.8: Berechnen Sie die Entropie $H_b(p)$ der binären Quelle mit den Wahrscheinlichkeiten $p_0 = p$ und $p_1 = 1-p$. Stellen Sie $H_b(p)$ grafisch über p dar. Bei welcher Wahrscheinlichkeit wird die Entropie maximal?

Frage 4.9: Gibt die Entropie eine Antwort auf folgende Frage: Wie viele Entscheidungen (raten, ob ja oder nein) sind erforderlich, um das aktuelle Zeichen zu erfragen? Erläutern Sie Ihre Antwort an einem Beispiel.

Frage 4.10: Gibt die Entropie eine Antwort auf folgende Frage: Wie viele Bits benötigt man mindestens, um die Zeichen der Quelle zu kodieren? Erläutern Sie Ihre Antwort an einem Beispiel.

Frage 4.11: Berechnen Sie die Entropie folgender Quellen: (1) Würfelexperiment mit fairem Würfel (siehe Frage 4.6), (2) Würfelexperiment mit den Wahrscheinlichkeiten $p_6=0{,}1$, $p_4=p_5=0{,}16$, $p_1=p_2=p_3=0{,}2$. Hinweis: Erstellen Sie eine Tabelle mit den Wahrscheinlichkeiten und dem jeweiligen Informationsgehalt jedes Zeichens. Ermitteln Sie hieraus H(X) gemäß Gleichung (4.2).

Frage 4.12: Gemäß Definition ist die Entropie anhängig von der Wahrscheinlichkeit der einzelnen Zeichen. Wann wird die Entropie einer Quelle maximal?

4.3. Entscheidungsgehalt

Der Entscheidungsgehalt einer Quelle mit N Zeichen gibt an, wie groß die Entropie der Quelle maximal werden kann. Beim Würfelexperiment mit N=6 Zeichen wurde dieser Wert in Frage 4.11 bzw. 4.6 berechnet. Die Entropie ist dann maximal, wenn alle Zeichen der Quelle gleich wahrscheinlich sind. In diesem Fall liegt eine maximale Unsicherheit vor.

Bei N gleich verteilten Zeichen ist die Wahrscheinlichkeit jedes Zeichens 1/N. Durch Einsetzen in die Definition gemäß Gleichung (4.2) erhält man für den Entscheidungsgehalt einer Quelle mit N Zeichen:

$$H_0(N) = ld(N) \qquad (4.3)$$

Frage 4.13: Berechnen Sie den Entscheidungsgehalt einer Quelle mit 6 Zeichen.

Frage 4.14: Berechnen Sie den Entscheidungsgehalt einer Quelle für BCD Zahlen.

4.4. Redundanz

Nicht jede Quelle besitzt eine maximale Entropie. Die Zeichen (Buchstaben) eines Textes in einer Textnachricht bzw. in einer Datei sind beispielsweise überhaupt nicht gleichverteilt. Der Abstand der Entropie H(X) einer Quelle von der maximal möglichen Entropie H_0 (dem Entscheidungsgehalt einer Quelle) wird als Redundanz bezeichnet:

$$R = H_0 - H(X) \tag{4.4}$$

Frage 4.15: Stellen Sie den Entscheidungsgehalt einer Quelle mit 6 Zeichen die Entropie des manipulierten Würfels aus Frage 4.11 (2) gegenüber. Wie groß ist die Redundanz?

Frage 4.16: Stellen Sie die Redundanz einer binären Quelle mit den Wahrscheinlichkeiten $p_0 = p$ und $p_1 = 1\text{-}p$ in einer Grafik dar ($H_b(p)$ über p, siehe Aufgabe 4.8)

Frage 4.17: Wie berücksichtigt das Morse-Alphabet als Kodierung für Textnachrichten die Redundanz der Quelle (bedingt durch die unterschiedliche Wahrscheinlichkeit der Buchstaben)?

Frage 4.18: Welche Nachteile bringt die Kodierung nach dem Morse-Alphabet über eine gestörte Leitung? Wie könnte man den Einfluss der Störungen verringern?

5. Allgemeine Übungen

5.1. Amplitudenmodulation

Ein Signal mit 5 kHz Bandbreite wird mit einem Träger von 800 kHz moduliert, der Modulationsindex beträgt m = 0,8.

Frage 1.1 (4 Punkte): Skizzieren Sie das Spektrum des modulierten Signals.

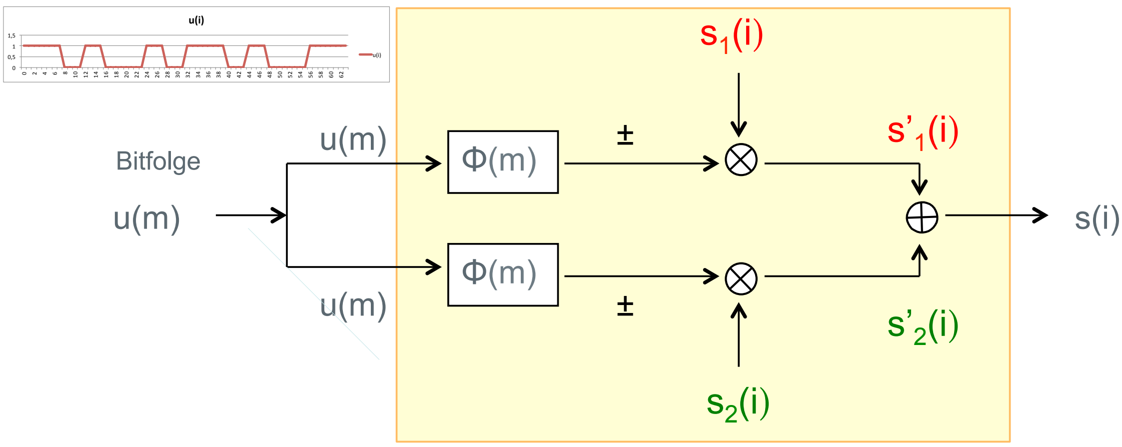
Frage 1.2 (4 Punkte): Als Testsignal wird ein einzelner Ton ausgestrahlt. Vergleichen Sie die Amplitude der Spektrallinie des Tons aus einem Seitenband mit der Amplitude des Trägers. Wie verhält sich die Leistung des Nutzsignals zur Leistung des Trägers?

Frage 1.3 (4 Punkte): Im Empfänger wird das Signal erneut mit der Trägerfrequenz multipliziert. Skizzieren Sie das resultierende Spektrum. Hinweis: Verwenden Sie das Testsignal der Frequenz 1 kHz. Hinweis: Es gilt cos α * cos β = 1/2 (cos (α - β) + cos (α + β).

Frage 1.4 (4 Punkte): Überlagerungsempfänger. Das Signal wird nicht mit der Trägerfrequenz multipliziert, sondern mit einer Frequenz von 1200 kHz. Ein Bandpass im weiteren Signalweg dient zur Auswahl des gewünschten Spektrums. Skizzieren Sie das Spektrum des empfangenen Signals an dieser Stelle. Bonusfrage: Welchen Zweck verfolgt dieses Empfangsprinzip im Vergleich zum direkt mischenden Empfänger aus Frage 1.3?

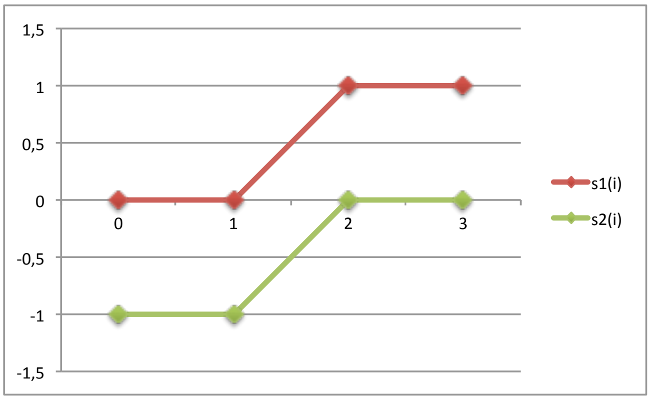
5.2. Quadratur-PSK (QPKS)

Ein QPSK-Sender ist wie in der folgenden Abbildung gezeigt aufgebaut. Das Eingangssignal u(m) wird hierbei auf beide Signalzweige gegeben. In den Blöcken Φ(m) bewirkt der Signalwert u(m) = 0 ein Kippen der Phase um jeweils 180 Grad, d.h. einen Vorzeichenwechsel der Signale s_1 bzw. s_2.

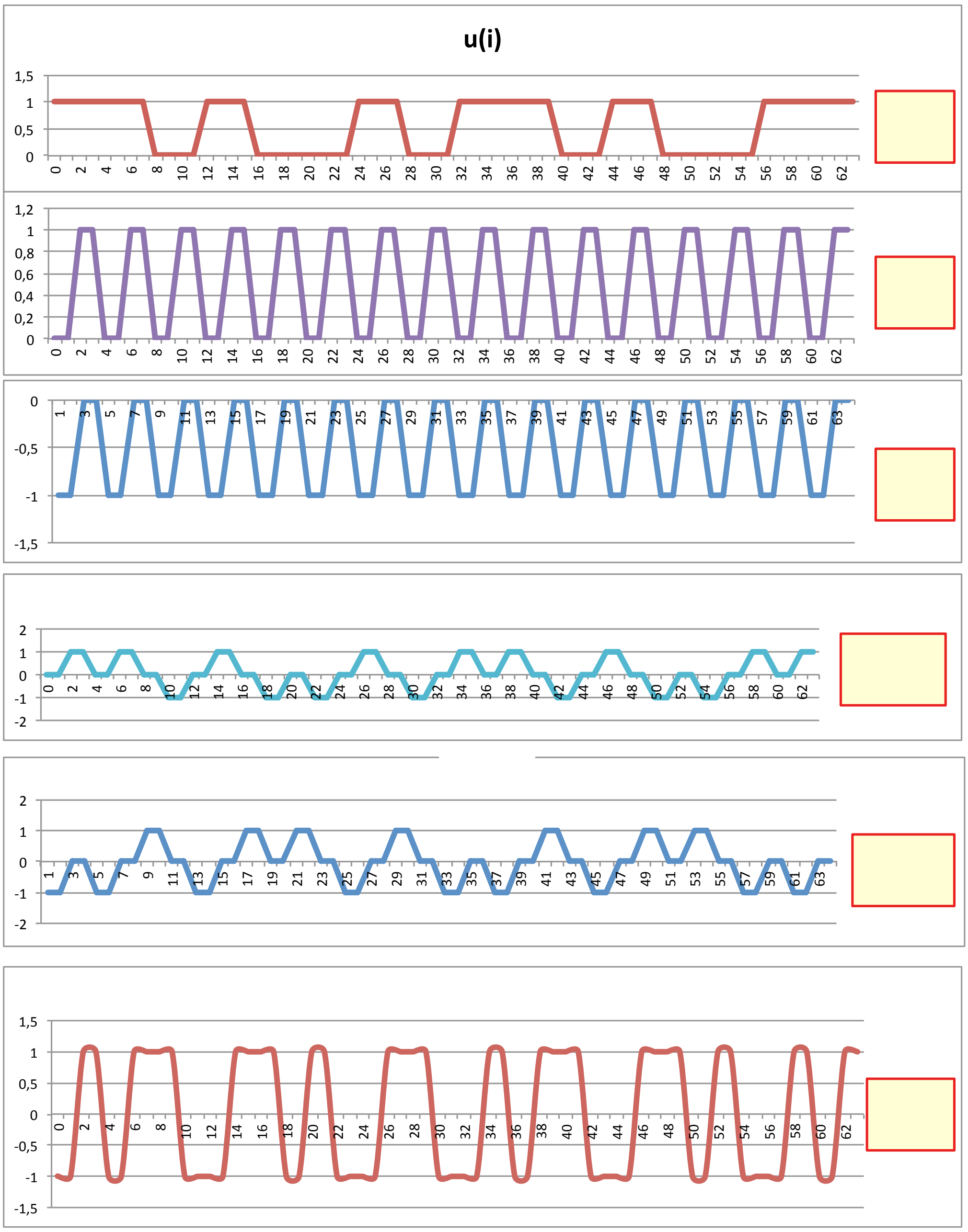


Frage 2.1 (4 Punkte): Für s_1 und s_2 sollen folgende Signale verwendet werden. Die Signale werden hierbei mit einer Periode von 4 Stützstellen zyklisch wiederholt. Sind die beiden Signale orthogonal? Wird das Verfahren hiermit funktionieren? Begründen Sie Ihre Antwort.

Träger		
Index i	s1(i)	s2(i)
0	0	-1
1	0	-1
2	1	0
3	1	0

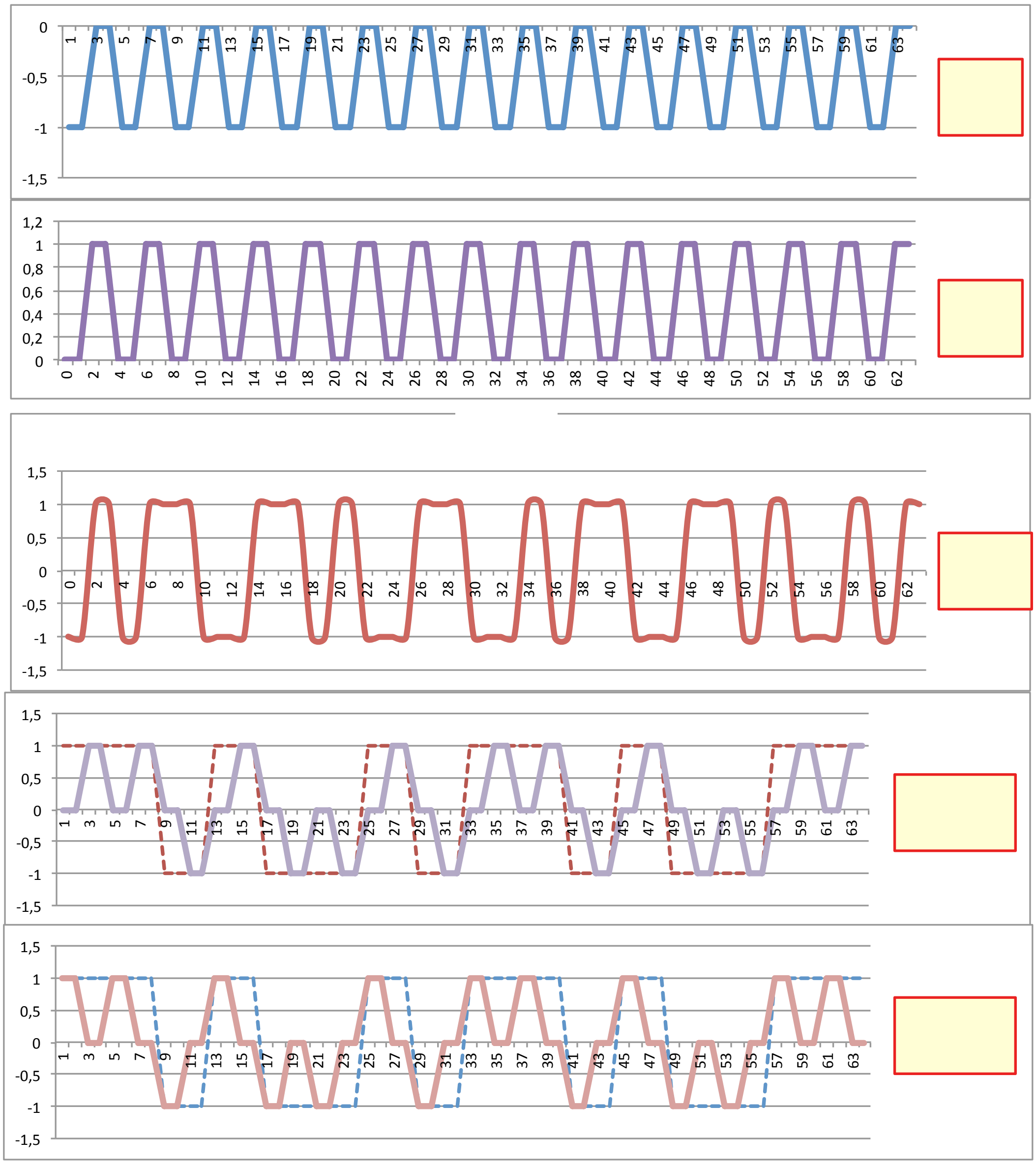


Frage 2.2 (6 Punkte): Ordnen Sie folgende Signale dem Blockschaltbild des Senders zu. Hinweis: Beschriften Sie hierzu am einfachsten die Felder in der Abbildung.



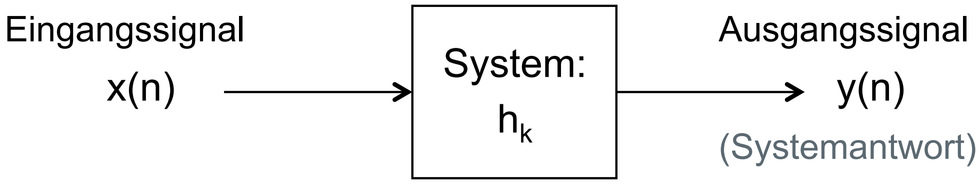
Frage 2.3 (6 Punkte): Skizzieren Sie ein Blockschaltbild des Empfängers. Beschreiben Sie den Aufbau und das Empfangsprinzip. Macht es in diesem speziellen Fall Sinn, die Signale im Inphase-Zweig und im Quadratur-Zweig zu addieren? Hinweis: Verwenden Sie bitte ein separates Blatt hierzu.

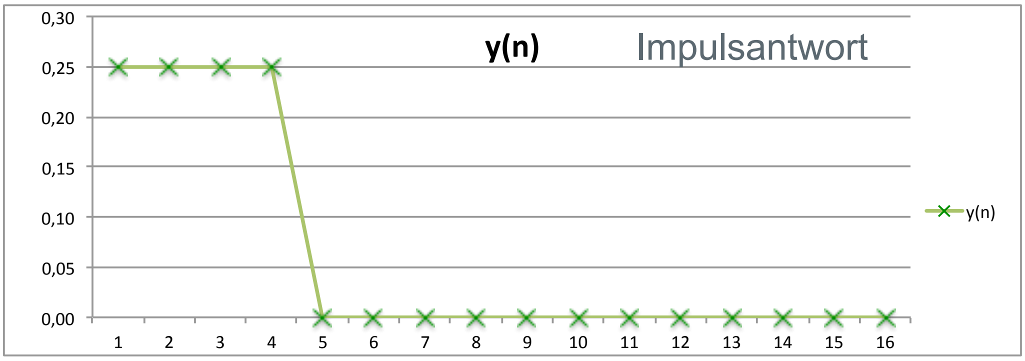
Frage 2.4 (4 Punkte): Ordnen Sie folgende Signale dem Blockschaltbild Ihres Empfängers zu. Hinweis: Beschriften Sie hierzu am einfachsten die Felder in der Abbildung passend zu Ihrem Blockschaltbild.



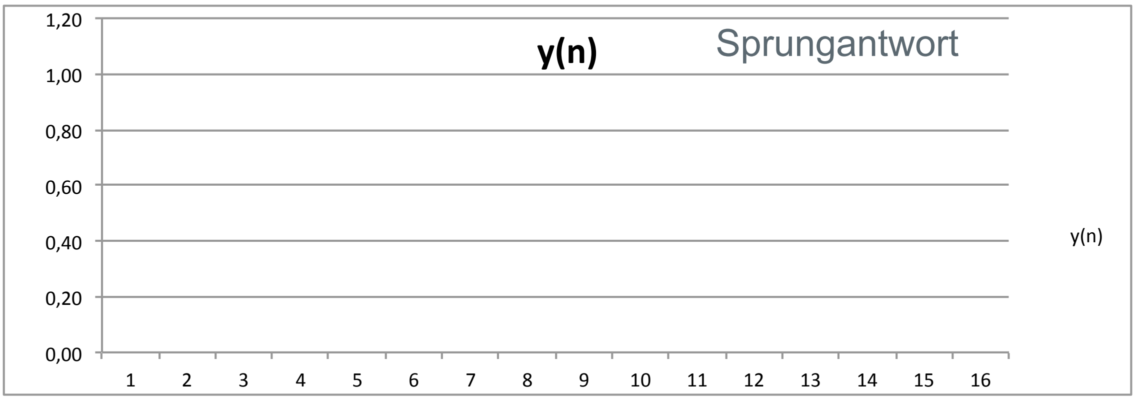
5.3. Signalverarbeitung

Das in der Abbildung gezeigte System hat folgende Impulsantwort.

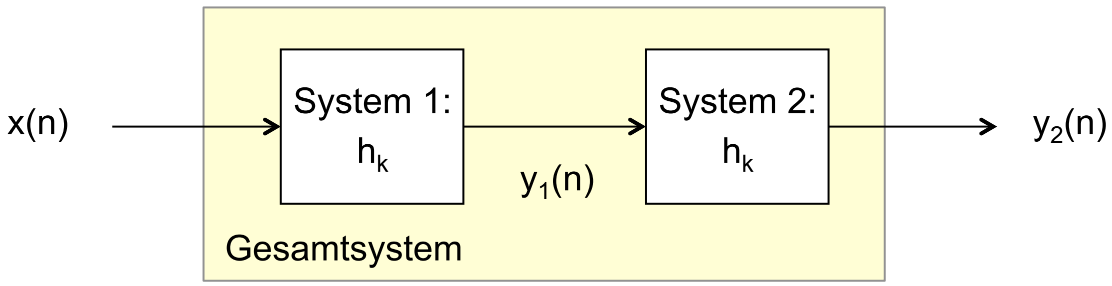


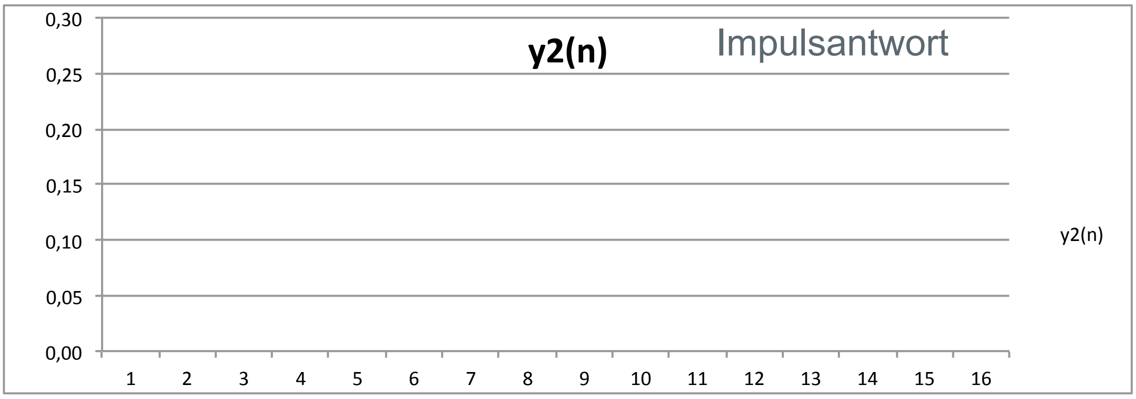


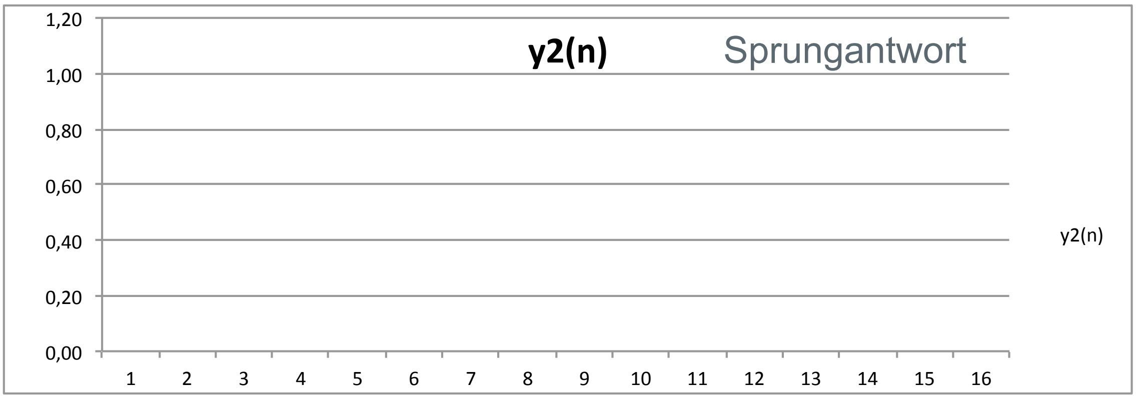
Frage 3.1 (4 Punkte): Skizzieren Sie den Verlauf der Sprungantwort. Begründen Sie Ihre Antwort mit Hilfe der Faltungssumme. Hinweis: Die Impulsantwort hat 4 Stützstellen, siehe Markierungen.



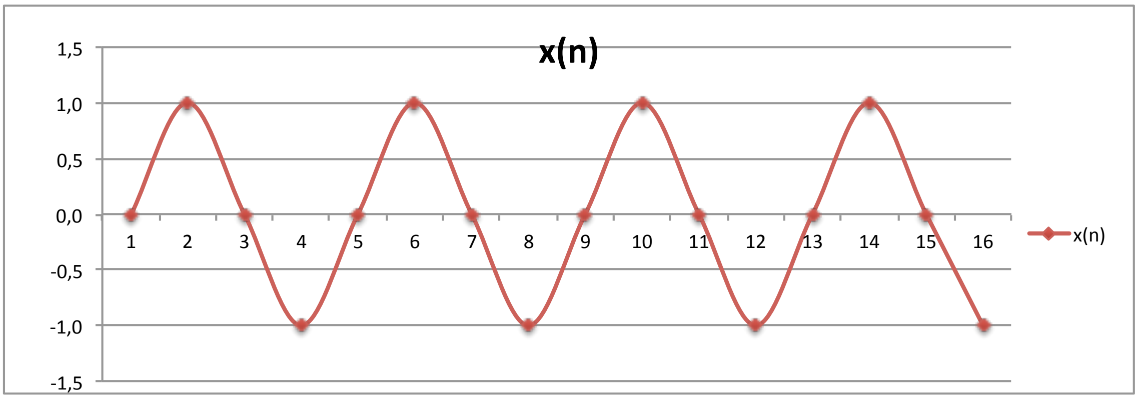
Frage 3.2 (6 Punkte): Zwei der genannten Systeme werden hintereinander geschaltet. Skizzieren Sie (1) die Impulsantwort am Ausgang des gesamten Systems, (2) die Sprungantwort am Ausgang des gesamten Systems.







Frage 3.3 (4 Punkte): An den Eingang des Systems wird folgende Signal gegeben. Welches Signal erscheint am Ausgang des Gesamtsystems im eingeschwungenen Zustand? Welches Signal ergibt sich bei Vielfachen der Frequenz des Eingangssignal im eingeschwungenen Zustand? Wie erscheinen diese Frequenzen in der Übertragungsfunktion (im Amplitudenspektrum)? Begründen Sie Ihre Entscheidung.



Englisch - Deutsch

Amplitude Shift Keying	Amplitudenumtastung
Frequency Shift Keying	Frequenzumtastung
Phase Shift Keying	Phasenenumtastung

...

Abkürzungen

AM	Amplitudenmodulation
ASK	Amplitude Shift Keying
FM	Frequenzmodulation
FSK	Frequency Shift Keying
MW	Mittelwelle
PSK	Phase Shift Keying
QAM	Quadrature Amplitude Shift Keying
QPSK	Quadrature Phase Shift Keying
UKW	Ultrakurzwelle

...

Literatur

(1) M. Werner, Signale und Systeme: Lehr- und Arbeitsbuch mit MATLAB®-Übungen und Lösungen, Vieweg+Teubner Verlag, 3. Auflage, 2008, ISBN: 978-3834802330

(2) M. Bossert, Einführung in die Nachrichtentechnik, Oldenbourg Wissenschaftsverlag, 2012, ISBN: 978-3486708806

(3) M. Werner, Nachrichtentechnik: Eine Einführung für Alle Studiengänge, Vieweg+Teubner Verlag, 7. Auflage, 2010, ISBN: 978-3834809056

(4) B. Klotz, Übertragungstechnik, Teil 1, Foliensammlung und Manuskript zur Vorlesung an der DHBW (siehe Moodle, Skriptenserver der NT, 5. Semester)