1. Systembeschreibung durch Polvorgabe (20 Punkte)

Ein System (Regelstrecke) besitzt die in der Abbildung gezeigten Polstellen s1,2 = -1 ± j.



Frage 1.1 (4 Punkte): Übertragungsfunktion. Wie lautet das Nennerpolynom N(s) der Übertra-gungsfunktion? Wie lautet die Übertragungsfunktion G(s), wenn das Zählerpolynom Z(s) = 2 beträgt?

Lösung: N(s) = (s - (-1 + j )) (s - (-1 - j )) = s2 + 2s + 2

Mit Z(s) = 2 folgt hieraus G(s) = Z(s) / N(s) = 2 / (s2 + 2s + 2)

Frage 1.2 (6 Punkte): Stabilität und Verhalten im eingeschwungenen Zustand. Ist das System stabil? Wenn ja, auf welchen Wert schwingt die Sprungantwort des Systems ein? Skizzieren Sie den Verlauf der Sprungantwort. Begründen Sie Ihre Aussagen.

Lösung: h(t→∞) = G(s→0), es gilt also im eingeschwungenen Zustand h(t→∞) = 1. Die Impulsantwort des Systems ist eine gedämpfte Schwingung. Die Sprungantwort schwingt beim Einschwingen über.

Frage 1.3 (4 Punkte): Differenzialgleichung. Wie lautet die Differenzialgleichung des Systems für das Eingangssignal u(t) und das Ausgangssignal y(t)?

Lösung: Aus der Übertragungsfunktion erhält man

Y(s) (s2 + 2s + 2) = 2 U(s)

Transformation in den Zeitbereich ergibt

ÿ(t) + 2 ẏ(t) + 2 y(t) = 2 u(t)

Frage 1.4 (6 Punkte): Signalfluss. Skizzieren Sie ein Signalflussdiagramm (Blockdiagramm), das die Differenzialgleichung beschreibt. Verwenden Sie folgendes Schema. Welche Rolle spielen die Rückkopplungen im System?



Lösung:



Die Rückkopplungen sind für das Einschwingverhalten verantwortlich. Setzt man beide Koeffizienten in den Rückkopplungszweigen gleich Null, so verbleibt nur ÿ(t) = 2 u(t).

1. Regelkreis (20 Punkte)

Folgende Abbildung zeigt eine Regelstrecke mit der Übertragungsfunktion GS(s) ohne Regelung (links), sowie die gleiche Regelstrecke im Regelkreis mit Regler. Der Regler hat die Übertragungsfunktion GR(s).4



Frage 2.1 (4 Punkte): (1) Wie lautet die Übertragungsfunktion der geregelten Strecke im allge-meinen Fall (mit GS(s) und GR(s))? (2) Wie lautet die Übertragungsfunktion im speziellen Fall, wenn für GR(s) ein P-Regler eingesetzt wird, d.h. GR(s) = KP?

Lösung: aus (1) Y(s) = GR(s) GS(s) E(s) und (2) E(s) = W(s) - Y(s) erhält man

Gges(s) = GR(s) GS(s) / (1 + GR(s) GS(s)).

Mit GR(s) = KP ergibt sich hieraus

Gges(s) = KP GS(s) / (1 + KP GS(s)).

Frage 2.2 (4 Punkte): Für die Strecke sei Gs(s) = b0 / (s2 + a1 s + a0). Welche Übertragungs-funktion ergibt sich für die geregelte Strecke mit dem P-Regler? Welchen Wert nimmt die Sprungantwort h(t) der geregelte Strecke im eingeschwungenen Zustand an (h(t→∞))?

Lösung: Mit dem Zählerpolynom Z(s) und dem Nennerpolynom N(s) von GS(s) = Z(s) / N(s) erhält man allgemein für die geregelte Strecke:

Gges(s) = KP Z(s) / (N(s) + KP Z(s)). Hieraus ergibt sich im speziellen Fall:

Gges(s) = KP b0 / (s2 + a1 s + a0 + KP b0)

Eingeschwungener Zustand mit Regler: h(t→∞) = KP b0 / (a0 + KP b0)

Frage 2.3 (6 Punkte): Für die Regelstrecke gelten folgende Werte: b0 = 2, a1 = 2, a0 = 2. Fragen: (1) Wie lautet die Übertragungsfunktion der geregelten Strecke? (2) Auf welchen Wert schwingt sich die Sprungantwort h(t) für große Reglerkonstanten ein (z.B. Für KP > 10)? (3) Berechnen Sie die Polstellen der Übertragungsfunktion für KP = 10.

Lösung: (1) Gges(s) = 2 KP / (s2 + 2s + 2 + KP); (2) Für große Reglerkonstanten nähert sich der eingeschwungene Zustand der Sprungantwort der 1 (von kleineren Werten im einge-schwungenen Zustand aus). (3) Polstellen für KP = 10: Gges(s) = 200 / (s2 + 2s + 202); Quadratische Gleichung: Die Diskriminante ist kleiner 0, es ergibt sich also ein konjugiert komplexes Polpaar. Durch Einsetzen in die Lösungsformel x1,2 = -p/2 ± j √((q - (p/2)2) erhält man die Pole s1,2= -1 ± j 4,583.

Frage 2.4 (6 Punkte): Qualitativer Einfluss der Reglereinstellung. Welchen Einfluss hat die Reglerkonstante KP auf die Strecke im Regelkreis? Beschreiben Sie (1) den Einfluss auf die Stellgröße, (2) den Verlauf der Sprungantwort der geregelten Strecke in Abhängigkeit der Reglerkonstanten KP, (3) die Lage der Pole der Übertragungsfunktion der geregelten Strecke.

Lösung: (1) Der Regler zerrt in Abhängigkeit der Regelabweichung e(t) umso kräftiger an der Stellgröße u(t), je größer die Reglerkonstante KP gewählt wird. Hierdurch verstärkt sich dann auch die Rückkopplung des durch die Regelstrecke gefilterten Signals. (2) Durch die stärkere Rückkopplung verringert sich einerseits der Fehler im eingeschwungenen Zustand (siehe Sprungantwort in Frage 2.3). Andererseits wird das System hierdurch potenziell de-stabilisiert. Dieser Effekt tritt auf durch höherfrequente Anteile des rückgekoppelten Signals, die bedingt durch die Verzögerung phasenverschoben sind. Im ungünstigsten Fall der Phasen-umkehr (Phasenverschiebung = 180 Grad) findet eine Mitkopplung dieser Anteile statt. (3) Der Imaginärteil des konjugiert komplexe Polpaars vergrößert sich. Zusammen mit der zunehmen-den Verstärkung im Zähler der Übertragungsfunktion tritt ein Resonanzpunkt bei höheren Frequenzen deutlicher hervor (siehe Bode Diagramm unten).

Nur zur Erläuterung der Musterlösung:



1. Drehzahlregelung für einen Motor (40 Punkte)

Ein Gleichstrommotor wird als System mit folgender Differenzialgleichung beschrieben. Hierbei ist ω(t) = 2 π f(t) die Kreisfrequenz zur Drehzahl f(t). Mit ώ(t) = dω / dt ist die Ableitung der Kreisfrequenz bezeichnet. Das Lastmoment ML(t) stellt die Störgröße des Systems dar.



Frage 3.1 (4 Punkte): Berechnen Sie die Übertragungsfunktion des Systems aus der oben angegebenen Differenzialgleichung. Hinweis: Die Störgröße wird nicht berücksichtigt.

Lösung: Transformation in den Bildbereich ergibt

Ω(s) = k1 U1(s) - s k2 J Ω(s)

Durch Umformen erhält man Ω(s) (1 + s k2 J) = k1 U1(s) und hieraus

G(s) = F(s) / U1(s) = Ω(s) / 2π U1(s) = k1 / 2π (1 + s k2 J)

Frage 3.2 (4 Punkte): Berechnen Sie die Lage der Polstelle der Übertragungsfunktion. Welchen Einfluss hat das Trägheitsmoment J des Rotors auf die Lage der Polstelle? Welchen Einfluss hat das Trägheitsmoment des Rotors auf die Zeitkonstante des Systems?

Lösung: Polstelle = Nullstelle des Nenners, zu berechnen aus (1 + s k2 J) = 0.

Ergebnis: s1 = -1/ (k2 J) = 1/τ

Einfluss des Trägheitsmoments J: Je träger der Rotor, desto näher rückt die Polstelle in der komplexen Ebene auf der negativen reellen Achse in Richtung des Koordinatenursprungs (der Null). Der Kehrwert der Polstelle entspricht die Zeitkonstante τ des Systems. Die Zeit-konstante wächst mit zunehmender Trägheit J des Rotors, d.h. Das System reagiert träger.

Frage 3.3 (6 Punkte): Ein Motor mit Nennspannung UN = 24 V und sonst unbekannten Parame-tern wurde wie folgt vermessen: Einschalten der Klemmenspannung u1(t) = UN im Leer-lauf zum Zeitpunkt Null. Man erhält folgenden Verlauf der Drehzahl f(t). Ermitteln Sie hieraus die Übertragungsfunktion des Motors in der Form G(s) = F(s)/U1(s) = b / (1 + τs).



Lösung: (1) Die Zeitkonstante liest man ab zu τ = 25 \* 4 ms = 100 ms = 0,1 s. (2) Der Faktor b in der Übertragungsfunktion ergibt sich aus dem Grenzwert der Sprungantwort im eingeschwungenen Zustand: h(t→∞) = G(s→ 0) = b = 80 Hz / 24V = 3,33 Hz/V. Die Skalierung auf die Höhe der Sprungfunktion von 24V ist erforderlich, da für den Grenzwertsatz ein Einheits-sprung verwendet wurde.

Hieraus ergibt sich die Übertragungsfunktion zu G(s) = 3,33 / (1 + 0,1 s) Hz/V.

Frage 3.4 (4 Punkte): Lastmoment. Nehmen Sie an, der Motor hat sich beim Nennmoment auf die Nenndrehzahl eingeschwungen. Welchen Einfluss haben Lastwechsel um diesen Arbeitspunkt auf die Drehzahl des Motors? Welcher mathematische Zusammenhang ergibt sich? Begründen Sie Ihre Aussage mit Hilfe der Differenzialgleichung des Motors.

Lösung: Differenzialgleichung: ω(t) = k1 u1(t) - k2 (ML(t) + J ώ(t))

Mit ML(t) = MN + ΔM(t) und u(t) = uN erhält man den Zusammenhang

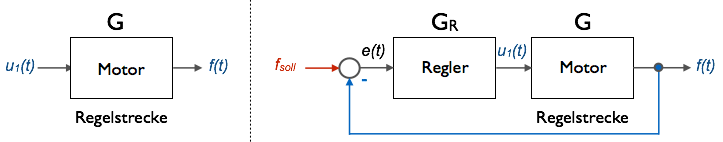
ω(t) = ωN  - k2 ΔM(t) + k2 J ώ(t)

wobei ωN = k1 uN - k2 MN = const.

Lastwechsel ΔM(t) um den gewählten Arbeitspunkt wirken sich also linear auf die Dreh-zahl aus, wobei das Trägheitsmoment J des Rotors Lastsprünge puffert.

Frage 3.5 (4 Punkte): Regelkreis im allgemeinen Fall. Skizzieren Sie einen Regelkreis für den Motor. Der Regler hat die Übertragungsfunktion GR(s), der Motor (als Regelstrecke) die Übertragungsfunktion G(s). Welche Übertragungsfunktion hat der Regelkreis? Welche Übertragungs-funktion erhält man, wenn als Regler wird ein P-Regler verwendet wird (GR(s) = KP)?

Lösung:



Lösung: aus (1) F(s) = GR(s) G(s) E(s) und (2) E(s) = Fsoll(s) - Y(s) erhält man

Gges(s) = GR(s) G(s) / (1 + GR(s) G(s)).

Mit GR(s) = KP ergibt sich für den Regelkreis

Gges(s) = KP G(s) / (1 + KP G(s)).

Frage 3.6 (6 Punkte): P-Regler. Als Regler wird ein P-Regler verwendet (GR(s) = KP). Als Übertragungsfunktion des Motors wird G(s) = b / (1 + τs) verwendet. Welchen Einfluss hat der Regler auf die Zeitkonstante des geregelten Systems? Wie muss die Regler-konstante gewählt werden, damit die Zeitkonstante des geregelten Motors sich im Vergleich zur Zeitkonstante des ungeregelten Motors halbiert?

Lösung: Einsetzen von G(s) = b / (1 + τs) in Gges(s) = KP G(s) / (1 + KP G(s)) ergibt

Gges(s) = b KP / (1 + τs + b KP)

Polstelle des ungeregelten Systems: Aus (1 + τs) = 0 folgt s1 = -1/τ.

Polstelle des geregelten Systems: Aus (1 + τs + b KP) = 0 folgt s‘1 = - (1 + b KP) / τ

Interpretation: Die Polstelle verlagert sich mit wachsender Reglerkonstante KP weiter nach links in der komplexen Ebene, bzw. Die Zeitkonstante des Regelkreises τ‘ = -1/s‘1 = τ /(1 + b KP) verringert sich. Die Zeitkonstante halbiert sich (τ‘ = τ/2), wenn KP = 1/b gewählt wird.

Frage 3.7 (6 Punkte): Ungeregelter Motor. Folgende Abbildung zeigt einen Simulationslauf des ungeregelten Systems.



Das Diagramm zeigt eine normierte Darstellung des Verlaufs der Störgröße (Last-moment) und der Ausgangsgröße (Drehzahl). Aus welchem Zustand startet das System? Erläutern Sie das Verhalten des Systems zu den in der Abbildung gezeigten Zeitpunkten und zwischen diesen Zeitpunkten.

Lösung: Das System startet aus einem eingeschwungenen Zustand auf einem Arbeitspunkt bei Nennlast und Nenndrehzahl. Zum Zeitpunkt t1 steigt das Lastmoment kontinuierlich an bis zum 4-fachen Nennmoment. Der Motor reagiert hierauf durch Verringerung seiner Drehzahl. Zum Zeitpunkt t2 kehrt sich die Drehrichtung des Motors um: Durch die konstante Klemmenspannung u1 im Arbeitspunkt (= Nennspannung) ist der Motor nicht in der Lage, das geforderte Moment zu erbringen. Bei stabilem 4-fachen Lastmoment stabilisiert sich die Drehzahl in Rückwärtsrichtung bei ca -0,8 der Nenndrehzahl zwischen t2 und t3. Zum Zeitpunkt t3 fällt die Last komplett ab (ML=0) und der Motor beginnt auf seine Leerlaufdrehzahl hochzulaufen, die er zum Zeitpunkt t4 fast erreicht.

Frage 3.8 (6 Punkte): Geregelter Motor. Folgende Abbildung zeigt einen Simulationslauf des geregelten Systems. Es wurde ein P-Regler verwendet. Das Diagramm zeigt eine normierte Darstellung des Verlaufs der Störgröße (Lastmoment) und der Ausgangsgröße (Drehzahl). Aus welchem Zustand startet das System? Erläutern Sie das Verhalten des Systems zu den in der Abbildung gezeigten Zeitpunkten und zwischen diesen Zeitpunkten. Skizzieren Sie den Verlauf der Klemmenspannung u1(t) des Motors (der Stellgröße). Hinweis: Verwenden Sie für die Skizze bitte in der Kopie des Diagramms unten auf dem Arbeitsblatt in der normierten Form u1(t)/uN.



Lösung: Verlauf der Drehzahl in Abhängigkeit der Störgröße (Lastmoment): Der geregelte Motor lässt sich nun nicht mehr durch das 4-fache Nennmoment in die umgekehrte Drehrichtung zwingen. Grund hierfür ist die durch den Regler veränderte Klemmenspannung u1(t) des Motors (d.h. die Stellgröße). Während im ungeregelten Fall (Steuerung) u1(t) unverändert blieb, legt der Regler nun bei Abweichungen der Drehzahl nach, d.h. er erhöht die in Abhängigkeit der Regelabweichung. Die Klemmenspannung folgt der Abweichung e(t) = fsoll - f(t) = fN - f(t) direkt proportional (wegen u1(t) = KP e(t). Somit ergibt sich der unten gezeigte Verlauf.

