1. Systembeschreibung durch Polvorgabe

Ein System besitzt die in der Abbildung gezeigten Polstellen s1,2 = -1 ± j.



Frage 1.1 (6 Punkte): Übertragungsfunktion. Wie lautet das Nennerpolynom N(s) der Übertra-gungsfunktion? Wie lautet die Übertragungsfunktion G(s), wenn das Zählerpolynom Z(s) = 2 beträgt?

Lösung: N(s) = (s - (-1 + j )) (s - (-1 - j )) = s2 + 2s + 2

Mit Z(s) = 2 folgt hieraus G(s) = Z(s) / N(s) = 2 / (s2 + 2s + 2)

Frage 1.2 (4 Punkte): Verhalten im eingeschwungenen Zustand. Auf welchen Wert schwingt die Sprungantwort des Systems ein? Skizzieren Sie den Verlauf der Sprungantwort. Begrün-den Sie Ihre Aussage.

Lösung: h(t→∞) = G(s→0), es gilt also im eingeschwungenen Zustand h(t→∞) = 1. Die Impulsantwort des Systems ist eine gedämpfte Schwingung. Die Sprungantwort schwingt also beim Einschwingen über.

Frage 1.3 (4 Punkte): Differenzialgleichung. Wie lautet die Differenzialgleichung des Systems für das Eingangssignal u(t) und das Ausgangssignal y(t)?

Lösung: Aus der Übertragungsfunktion erhält man

Y(s) (s2 + 2s + 2) = 2 U(s)

Transformation in den Zeitbereich ergibt

ÿ(t) + 2 ẏ(t) + 2 y(t) = 2 u(t)

Frage 1.4 (6 Punkte): Zustandsmodell. Wie lauten die Zustandsgleichungen des Systems? Welche Werte besitzt die Zustandsmatrix A, der Eingangsvektor b und der Ausgangs-vektor cT?

Lösung: Wählt man x1(t) = y(t) und x2(t) = ẏ(t), so erhält man aus der DGL

ẋ1(t) = x2(t)

ẋ2(t) = -2 x2(t) - 2 x1(t) + 2 u(t)

y(t) = x1(t)

Es lauten also: A = [0, 1; -2, -2], b = [0; 1], cT = [1, 0].

1. Zustandsregler

Ein System wird durch folgenden Signalfluss beschrieben.



Frage 2.1 (4 Punkte): Wie lautet die Differenzialgleichung des Systems? Welche Polstellen hat das System?

Lösung: Wenn man dem Signalfluss rückwärts von y(t) aus folg erhält man



als Differenzialgleichung (DGL): ÿ(t) = - 2 ẏ(t) - 2 y(t) + 2 u(t), und somit

ÿ(t) + 2 ẏ(t) + 2 y(t) = 2 u(t)

Dieses System besitzt Polstellen bei s1,2 = -1 ± j.

Frage 2.2 (4 Punkte): Zustandsmodell. Leiten Sie die Zustandsgleichungen des Systems aus der Differenzialgleichung bzw. direkt aus dem Signalfluss her. Welche Werte besitzt die Zustandsmatrix A, der Eingangsvektor b und der Ausgangsvektor cT?

Lösung: Ausgehend vom der DGL: siehe Frage 1.4

Ausgehend vom Signalfluss: von y(t)=x1(t) aus erhält man rückwärts dem Signalfluss fol-gend (1) ẋ1(t) = x2(t), (2) ẋ2(t) = -2 x2(t) - 2 x1(t) + 2 u(t).

Für das Zustandsmodell erhält man also: A = [0, 1; -2, -2], b = [0; 2], cT = [1, 0].

Frage 2.3 (6 Punkte): Zustandsmodell des geregelten Systems. Folgende Abbildung zeigt die Regelstrecke zusammen mit einem Regler.



Wie lauten die Zustandsgleichungen des geregelten Systems? Welche Werte besitzt die Zustandsmatrix AR des geregelten Systems, der Eingangsvektor bR und der Ausgangs-vektor cRT. Hinweis: Mit dem Regler errechnet man u(t) = u0(t) - uR(t).

Lösung: Ausgangspunkt sind die Zustandsgleichungen

ẋ1(t) = x2(t) (1)

ẋ2(t) = -2 x2(t) - 2 x1(t) + 2 u(t) (2)

Durch Einsetzen von

u(t) = u0(t) - uR(t) = u0(t) - k1 x1(t) - k1 x1(t)

in (2) ergibt sich:

ẋ1(t) = x2(t) (1)

ẋ2(t) = -2 (1 + k2) x2(t) - 2 (1 + k1) x1(t) + 2 u0(t) (2)

Frage 2.4 (6 Punkte): Wie lautet die Differenzialgleichung des geregelten Systems? Welche Polstellen hat das geregelte System für folgende Reglerparameter: k1=0, k2=0,5? Welchen Einfluss hat der Regler?

Lösung: Die Struktur der Zustandsgleichungen hat sich nicht geändert, bis auf u0(t) als neue Eingangsgröße, und andere Koeffizienten vor den Zustandsvariablen. Durch Einsetzen von (1) in (2) und Verwendung der Ausgangsgleichung (3) y(t)=x1(t) erhält man also:

ÿ(t) + 2 (1+ k2) ẏ(t) + 2 (1+ k1) y(t) = 2 u0(t)

Für k1 = 0 und k2 = 0,5 erhalt man:

ÿ(t) + 3 ẏ(t) + 2 y(t) = 2 u0(t)

Die Polstellen des Systems ergeben sich aus den Nullstellen des Polynoms

s2 + 3 s + 2 = 0 = (s + 2) (s + 1)

Die Polstellen haben sich durch Einfluss des Reglers verschoben nach s1=-2 und s2 = -1.

1. Füllstandsregelung mit 2 Behältern

Zwei Behälter sind wie in der folgenden Abbildung gezeigt miteinander verbunden.



Der Füllstand h2(t) des zweiten Behälters soll geregelt werden. Als Stellgröße soll der Zulauf qe(t) verwendet werden. Der Ablauf qa(t) am 2. Behälter ist als Störgröße zu betrachten.

Frage 3.1 (6 Punkte): Physikalisches Modell. Beschreiben Sie das Verhalten des Systems. Hinweis: Nehmen Sie an, dass der zwischen den Behältern ausgetauschte Flüssigkeits-strom proportional ist zur Differenz der Füllstände h1(t) - h2(t).

Lösung: Die Volumenänderung A ḣ(t) ist jeweils proportional zum Zustrom bzw. Ablauf:

ḣ1(t) = -k/A1 h1(t) + k/A1 h2(t) + 1/A1 qe(t) (1)

ḣ2(t) = k/A2 h1(t) - k/A2 h2(t) - 1/A2 qa(t) (2)

Frage 3.2 (4 Punkte): Systemdefinition. Definieren Sie das System nach der Vorgabe in der Aufgabenstellung. Hinweis: Nur h2(t) soll geregelt werden. Eine Skizze mit Eingängen und Ausgängen genügt.

Lösung:



Frage 3.3 (6 Punkte): Systembeschreibung. Erstellen Sie die Zustandsgleichungen der Regel-strecke. Wie lauten die Zustandsmatrix A, der Eingangsvektor b und der Ausgangsvektor cT? Hinweis: Die Störgröße ist nicht Teil des Zustandsmodells.

Lösung: Man wählt x1(t) = h1(t) und x2(t)= h2(t). Eingangsgröße ist u(t) = qe(t).

ẋ1(t) = -k/A1 x1(t) + k/A1 x2(t) + 1/A1 u(t) (1)

ẋ2(t) = k/A2 x1(t) - k/A2 x2(t) (2)

y(t) = x2(t) (3)

Somit erhält man: A = [ -k/A1, k/A1; k/A2, -k/A2], b = [ 1/A1; 0], cT = [0, 1].

Frage 3.4 (4 Punkte): Skizzieren Sie den Signalfluss des Systems.

Lösung: Die Behälter beströmen sich gegenseitig abhängig von den Füllständen.



Frage 3.5 (4 Punkte): Qualitative Fragen zur Regelstrecke. Wie beurteilen Sie die Steuerbarkeit des Systems? Halten Sie das System für beobachtbar? Begründen Sie Ihre Aussagen.

Lösung: Steuerbarkeit: Obwohl die Eingangsgröße nur direkt auf x1(t) einwirkt, wirkt sie mittelbar auch auf x2(t) = h2(t), da die Gefäße ja miteinander verbunden sind. Der Signalfluss zeigt x1(t) als mittelbare Größe. Das System sollte also steuerbar sein. Beobachtbarkeit: Umgekehrt kann man von dem beobachteten Füllstand y(t) = h2(t) = x2(t) auch auf den Füllstand h1(t) = x1(t) schliessen. Das System sollte also auch beobachtbar sein.

Frage 3.6 (6 Punkte): Entwurf Zustandsregler. Skizzieren Sie einen Zustandsregler für das System. Wie lauten die Zustandsgleichungen des geregelten Systems?

Lösung:



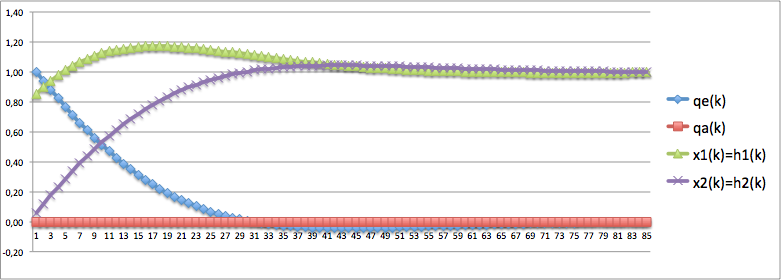
Zustandsgleichungen: u(t) = u0(t) - k1 x1(t) - k2 x2(t) einsetzen:

ẋ1(t) = (k/A1 - k1) x1(t) + (k/A1 - k2) x2(t) + u0(t) (1)

ẋ2(t) = k/A2 x1(t) - k/A2 x2(t) (2)

y(t) = x2(t) (3)

Frage 3.7 (6 Punkte): Führungsverhalten. Folgendes Diagramm zeigt eine Simulation der gere-gelten Strecke. Interpretieren Sie den Verlauf von qe(t), h1(t) und h2(t). Welche Wirkung haben die Reglerkonstanten k1 und k2?



Lösung: Initialzustände: h1(0) = 0,8, h2(0) = 0. Der Regler stellt den Zulauf qe(t) so ein, dass sich Behälter 2 auf einen konstanten Wert h2(t) füllt. Hierfür genügt k2. Der Füllstand h1(t) kann sich hierbei über den gewünschten Wert erhöhen. Die Konstante k1 erlaubt es, den Füllstand h1(t) bei der Regelung zu berücksichtigen.

Frage 3.8 (4 Punkte): Störverhalten. Zum Zeitpunkt t1 wird eine konstante Menge qa(t) abge-pumpt, wie folgende Simulation zeigt. Die Reglereineinstellungen und Startbedingungen sind identisch mit Frage 3.7. Wie schätzen Sie den weiteren Verlauf der Füllstände h1(t) und h2(t) ab t1 ein (bitte einzeichnen)? Begründen Sie Ihre Einschätzung.



Lösung: Der Regler kann die Störung nicht ausregeln, es bleibt eine Regeldifferenz.



Grund hierfür ist, dass der Regler zwar ein Gleichgewicht zwischen Zulauf qe(t) (Stellgröße) und Abfluss qa(t) (Störgröße) herstellt (siehe Signalfluss bzw. Simulationslauf). Bis zu diesem Zeitpunkt ist aber eine Menge Flüssigkeit abgeflossen, der Füllstand h2(t) also ge-sunken. Der Zulauf fliesst mittelbar über Behälter 1 zu, was eine Differenz der Füllstände verur-sacht, die für den Zustrom von Behälter 1 nach Behälter 2 erforderlich ist..