1. P-Regler

Folgende Abbildung zeigt eine Regelstrecke mit der Übertragungsfunktion GS(s) ohne Regelung (links), sowie die gleiche Regelstrecke im Regelkreis mit Regler. Der Regler hat die Übertragungsfunktion GR(s). Es soll ein P-Regler eingesetzt werden.



Frage 1.1 (4 Punkte): Wie lautet die Übertragungsfunktion der geregelten Strecke im allge-meinen Fall (mit GS(s) und GR(s))? Wie lautet die Übertragungsfunktion im speziellen Fall, wenn für GR(s) ein P-Regler eingesetzt wird?

Lösung: aus (1) Y(s) = GR(s) GS(s) E(s) und (2) E(s) = W(s) - Y(s) erhält man

Gges(s) = GR(s) GS(s) / (1 + GR(s) GS(s)).

Mit GR(s) = KP ergibt sich hieraus

Gges(s) = KP GS(s) / (1 + KP GS(s)).

Frage 1.2 (6 Punkte): Für die Strecke sei Gs(s) = b0 / (s2 + a1 s + a0). Welche Übertragungs-funktion ergibt sich für die geregelte Strecke mit dem P-Regler? Welchen Wert nimmt die Sprungantwort h(t) für die ungeregelte Strecke bzw. die geregelte Strecke im einge-schwungenen Zustand an (h(t→∞))?

Lösung: Mit dem Zählerpolynom Z(s) und dem Nennerpolynom N(s) von GS(s) = Z(s) / N(s) erhält man allgemein für die geregelte Strecke:

Gges(s) = KP Z(s) / (N(s) + KP Z(s)). Hieraus ergibt sich im speziellen Fall:

Gges(s) = KP b0 / (s2 + a1 s + a0 + KP b0)

Eingeschwungener Zustand:

Ohne Regler: h(t→∞) = b0 / a0. Mit Regler: h(t→∞) = KP b0 / (a0 + KP b0)

Frage 1.3 (6 Punkte): Für die Regelstrecke gelten folgende Werte: b0 = 3, a1 = 4, a0 = 3. Berechnen Sie für den ungeregelten Fall: (1) die Pole der Übertragungsfunktion, (2) die Partialbruchzerlegung, (3) die Impulsantwort. Beschreiben Sie das Zeitverhalten der ungeregelten Strecke mit Hilfe ihrer Zeitkonstanten.

Lösung: Pole: p1 = -1, p2 = -3 erhält man durch Lösen der quadratischen Gleichung.

Durch Koeffizientenvergleich an den beiden Polen erhält man aus G(s) = 3 / (s+1) (s+3) = K1 / (s+1) + K2 / (s+3) die Koeffizienten K1 = 1,5 und K2 = - 1,5.

Die Impulsantwort erhält man hieraus aus der Rücktransformation in den Zeitbereich: g(t) = 1,5 e -t - 1,5 e -3t. Die ungeregelte Strecke hat die beiden Zeitkonstanten τ1 = 1 und τ2 = 1/3.

Frage 1.4 (8 Punkte): Legen Sie den Reglerparameter so fest, dass sich das Zeitverhalten der Strecke verbessert. Welchen Einfluss hat der Regler? Beschreiben Sie die Lage der Pole der Übertragungsfunktion der geregelten Strecke. Welche Impulsantwort hat die gere-gelte Strecke? Beschreiben Sie das Zeitverhalten der geregelten Strecke mit Hilfe ihrer Zeitkonstanten. Welche Werte für die Reglerkonstante sollten Sie vermeiden?

Lösung: Verschiebung der ersten Polstelle zu kleineren Werten. Aus der Lösung der quadratischen Gleichung wählt man z.B. den Wert der Diskriminante D = 0, was sich mit Hilfe von KP = 1/3 erreichen lässt. In diesem Fall sind p1 = p2 = - 2. Im Vergleich zur ungeregelten Strecke ist hierdurch zwar der zweite Pol näher an die positive reelle Ebene gewandert, der dominierende Pol p1 besitzt jedoch nun eine kleiner Zeitkonstante. Man erhält τ1 = τ2 = 1/2.

Mit KP = 1/3 erhält man für die Übertragungsfunktion der geregelten Strecke:

Gges(s) = 1 / (s2 + 4 s + 4) = 1/ (s + 2)2

Aus der Korrespondenztabelle der Laplace Transformation ermittelt man die zugehörige Zeitfunktion zu g(t) = t e -2t.

Reglerkonstanten, die die Pole in Richtung der positiven reellen Ebene verschieben, sind zu vermeiden, da das System hierdurch instabil wird. Mit Blick in die Lösung der quadratischen Gleichung wären das alle Werte von KP, die den ursprünglichen Pol bei p1 = -1 weiter nach links verschieben, d.h. KP < 1/4.

1. Zustandsregler

Ein Zustandsregler hat die in folgender Abbildung gezeigte Struktur. Die Regelstrecke ist ein System 2. Ordnung mit der Systemmatrix A = (a11, 0; 0, a22), b = (1; 1); und cT = (0, 1).



Frage 2.1 (4 Punkte): Regelstrecke. Wie lauten die Zustandsgleichungen der Regelstrecke?

Lösung: ẋ1(t) = a11 x1(t) + u(t)

ẋ2(t) = a22 x2(t) + u(t)

y(t) = x2(t)

Frage 2.2 (6 Punkte): Regelstrecke. Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion GS(s) der Regel-strecke aus dem Zustandsmodell (A, b, cT) bzw. direkt aus den Zustandsgleichungen. Welche Polstellen hat die Übertragungsfunktion?

Lösung: Weg 1: Gemäß Gleichung (3.28) aus dem Vorlesungsmanuskript erhält man:

GS(s) = cT (sE-A)-1 b

Wegen der Diagonalmatrix besitzt M = (sE-A)-1 ebenfalls Diagonalform, d.h. M = (m11, 0; 0, m22). Multiplikation von cT M ergibt cT M = (0, 1) = (m11, 0; 0, m2) = (0; m22). Hieraus ergibt sich durch Multiplikation mit b das Skalarprodukt: cT M b = (0; m22) (1, 1) = m22. Das Element erhält man aus M = (sE-A)-1 = ((s-a22), 0; 0, (s - a11) ) / det (sE-A) zu (s - a11) / ((s - a22) (s - a11)) = 1/(s - a2). Somit ist

GS(s) = 1/(s - a22)

Weg 2 ist in diesem Fall viel einfacher: Aus

ẋ2(t) = a22 x2(t) + u(t)

y(t) = x2(t)

ergibt sich unmittelbar

ẏ(t) = a22 y(t) + u(t)

Durch Transformation in den Bildbereich erhält man hieraus:

s Y(s) = a22 Y(s) + U(s)

Nach Umformung zu s Y(s) - a22 Y(s) = (s - a22) Y(s) = U(s) erhält man die Übertragungs-funktion

GS(s) = 1 / (s - a22)

Somit ergibt sich eine Polstelle bei s = a22.

Frage 2.3 (6 Punkte): Regler. Für den Regler wird der Zeilenvektor kT wie folgt gewählt: kT= (0, KP). Erstellen Sie die Zustandsgleichungen der geregelten Strecke. Welche Verände-rungen ergeben sich in der Systemmatrix A‘ der geregelten Strecke gegenüber der Systemmatrix A der ungeregelten Strecke?

Lösung: Für das geregelte System gilt:

u(t) = u1(t) - uR(t) = u1(t) - kT x(t) = u1(t) - KP x2(t)

Durch Einsetzen in die Zustandsgleichungen erhält man hieraus:

ẋ1(t) = a11 x1(t) + u1(t) - KP x2(t) = a11 x1(t) - KP x2(t) + u1(t)

ẋ2(t) = a22 x2(t) + u1(t) - KP x2(t) = (a22 - KP) x2(t) + u1(t)

y(t) = x2(t)

Die Systemmatrix der geregelten Strecke ergibt sich zu A‘ = (a11, - KP; 0, (a22 - KP)).

Frage 2.4 (6 Punkte): Geregelte Strecke. Berechnen Sie die Übertragungsfunktion der geregelten Strecke. Welcher Einfluss hat die Regelung sich auf die Lage der Polstellen?

Lösung: Am einfachsten direkt aus den Zustandsgleichungen:

ẋ2(t) = (a22 - KP) x2(t) + u1(t)

y(t) = x2(t)

Somit erhält man:

ẏ(t) = (a22 - KP) y(t) + u1(t)

Durch Transformation in den Bildbereich erhält man hieraus:

s Y(s) = (a22 - KP) Y(s) + U1(s)

Nach Umformung erhält man die Übertragungsfunktion

Gges(s) = 1 / (s - a22 + KP)

Somit ergibt sich eine Polstelle bei s = a22 - KP. Die Regelung verschiebt unmittelbar die Lage der Polstelle der Übertragungsfunktion.

Frage 2.5 (8 Punkte): Skizzieren Sie das Blockdiagramm für spezielle Wahl des Vektor kT = KP cT = (0, KP) aus Frage 2.3 so, dass das Diagramm dem eines konventionellen Regel-kreises näher kommt. Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion des Regelkreises aus dem Blockdiagramm, in dem Sie für die Strecke die Übertragungsfunktion GS(s) einfüh-ren, sowie für den Regler GR(s) = KP. Welche Unterschiede ergeben sich zu einem konventionellen Regelkreis mit P-Regler in der Struktur und in der Übertragungsfunktion?

Lösung: Da der Vektor kT die gleiche Struktur hat wie cT (und somit kT = KP cT = (0, KP) gilt), könnte man den P-Regler mit der Konstanten KP auch direkt mit dem Ausgang y(t) verbinden. Somit erhält man einen konventionellen P-Regler, der sich allerdings im Rückfüh-rungszweig befindet (siehe Abbildung).



Für die Übertragungsfunktion erhält man aus dem Blockdiagramm: (1) Y(s) = GS(s) U(s) und (2) U(s) = U1(s) - GR(s) Y(s). Hieraus ergibt sich nach Umformung:

Gges(s) = GS(s) / (1 + GR(s) GS(s)).

Der Nenner der Übertragungsfunktion (und somit die Lage der Pole) entspricht der des konventionellen Regelkreises.

Im konventionellen Regelkreis befindet sich der Regler im Vorwärtszweig vor der Strecke. Somit findet sich im konventionellen Regelkreis die Übertragungsfunktion des Reglers auch im Zähler der Übertragungsfunktion.

Frage 2.6 (6 Punkte): Zeitverhalten der geregelten Strecke. Für die Strecke sei Gs(s) = b0 / (s2 + a1 s + a0). Welche Übertragungsfunktion ergibt sich für die geregelte Strecke mit dem Zustandsregler? Welchen Wert nimmt die Sprungantwort h(t) für die ungeregelte Strecke bzw. die geregelte Strecke im eingeschwungenen Zustand an (h(t→∞))? Vergleichen Sie das Verhalten mit den konventionellen P-Regler.

Lösung: Mit dem Zählerpolynom Z(s) und dem Nennerpolynom N(s) von GS(s) = Z(s) / N(s) erhält man allgemein für die geregelte Strecke:

Gges(s) = Z(s) / (N(s) + KP Z(s)). Hieraus ergibt sich im speziellen Fall:

Gges(s) = b0 / (s2 + a1 s + a0 + KP b0)

Eingeschwungener Zustand:

Ohne Regler: h(t→∞) = b0 / a0. Mit Regler: h(t→∞) = b0 / (a0 + KP b0)

Vergleich mit konventionellem P-Regler: siehe Aufgabe 1.2. Bei Zugriff auf alle Zustands-größen durch kT lassen sich alle Polstellen der Strecke beeinflussen.

1. Einfluss von Störgrößen

Folgende Abbildung zeigt einen Simulationslauf des Gleichspannungsmotors. Der Motor ist in diesem Fall die Regelstrecke. Die Zustandsgröße x1(t) entspricht dem Motorstrom, x2(t) der Drehzahl. Als Eingangsgröße dient die Ankerspannung des Motors u(t). In der abgebildeten Simulation sind diese Größen auf die jeweiligen Nennwerte normiert. Als Störgröße wirkt ein Lastmoment ML auf die Strecke ein.



Frage 3.1 (6 Punkte): Ergänzen Sie den Verlauf des Lastmomentes im Diagramm. Begründen Sie Ihren Verlauf stichwortartig aus dem Verhalten des Motors.

Lösung: Das Lastmoment MN wird zu t1 zugeschaltet, mit t3 weggeschaltet.



Begründung: Motor läuft vor t1 auf Leerlaufdrehzahl hoch (Strom geht gegen 0). Bei Last läuft die Drehzahl auf Nenndrehzahl, der Strom steigt auf den Nennwert. Ab Zeitpunkt t3 geht das System in Richtung Ruhezustand, d.h. hier ist die Last entfernt worden.

Frage 3.2 (6 Punkte): Welches ist die Startbedingung der Regelstrecke? Erklären Sie das Verhalten der Regelstrecke zu den Zeitpunkten t1, t2 und t3. Erklären Sie das Verhalten der Strecke zwischen den Zeitpunkten t2 und t3 (zunächst negativer, dann positiver Motor-strom, negative Drehzahl).

Lösung: Zeitpunkte t1 und t3 siehe oben (Frage 3.1).

Zum Zeitpunkt t2 wird die Versorgungsspannung abgeschaltet (u(t2) = 0 mit Kurzschluss des Ankerkreises). Zu diesem Zeitpunkt liegt noch Nennlast an, d.h. es wirkt ein Nennmoment auf den Motor. Der Motor geht in den Generatorbetrieb (Umkehr des Stromes) und wird langsamer. Da weiter ein Lastmoment anliegt, ändert sich nach dem Stillstand die Drehrichtung (negative Drehzahlen, Stromumkehr). Zum Zeitpunkt t3 erfolgt die Abschaltung des Last-moments, der Generator kehrt in den Ruhezustand zurück.