Regelungstechnik

Vorlesung und Übungen

Ausgabe 0.2, 14.09.2015
Autor: Stephan Rupp

Inhaltsverzeichnis

1. PID Regler 5

1.1. Steuerung 5

1.2. Regelung 9

1.3. P-Regler 10

1.4. I-Regler 12

1.5. PI-Regler 13

1.6. PID-Regler 15

1.7. Übertragungsfunktion 16

1.8. Einfluss des Reglers auf die Übertragungsfunktion 17

2. Drehzahlregelung mit PID Regler 18

2.1. Regelstrecke mit Regler 18

2.2. Regelalgorithmus 19

2.3. Einstellung der Reglerparameter 19

2.4. Stabilität 20

3. Übungen 21

3.1. Mechanisches System 21

3.2. Energiespeicher im mechanischen System 21

3.3. RC-Glied 22

3.4. Numerische Lösung für das RC-Glied 23

3.5. Energiespeicher im RC-Glied 25

3.6. RL-Glied 25

3.7. Numerische Lösung für das RL-Glied 25

3.8. Energiespeicher im RL-Glied 25

3.9. Numerische Lösung für das mechanische System 26

3.10. RLC-Glied 27

3.11. Systemmodell 28

3.12. Ermittlung der Impulsantwort aus der Übertragungsfunktion 29

3.13. Faltung 29

3.14. Polstellen der Übertragungsfunktionen 30

3.15. Quadratische Gleichung 30

3.16. Partialbruchzerlegung 31

3.17. Verhalten im eingeschwungenen Zustand 32

3.18. Zweipunktregler 32

3.19. RLC-Filter 33

3.20. Fahrwerk 34

3.21. Schaukel 34

3.22. Verladebrücke 35

3.23. Füllstand 37

3.24. Lageregelung 38

3.25. Temperaturregelung mit P- und I-Regler 39

3.26. Wurzelortskurven 39

3.27. Übertragungsfunktion und Frequenzgang 41

3.28. Stabilität und Frequenzgang 41

4. Klausuraufgaben 44

4.1. P-Regler 44

4.2. Systembeschreibung durch Polvorgabe 45

4.3. Regelkreis 46

4.4. Drehzahlregelung für einen Motor 48

1. PID Regler

1.1. Steuerung

Eine einfache Möglichkeit, die Drehzahl eines Gleichstrommotors einzustellen, zeigt folgende Abbildung. Hierbei wird die Spannung an den Anschlussklemmen durch ein Stellglied variiert.

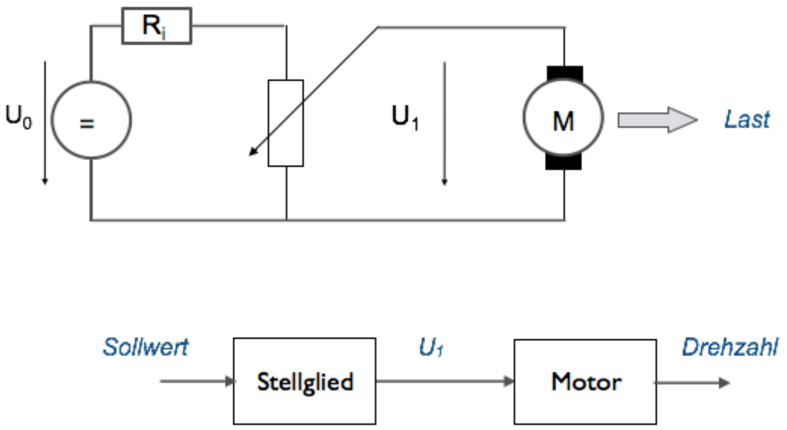


Bild 1.1 Steuerung

Im Gleichstrommotor wird ein Gleichgewicht zur Ankerspannung U_1 hergestellt durch eine drehzahlabhängige, im Erregerfeld induzierte Spannung. Die Drehzahl ω des Motors ist somit im eingeschwungenen Zustand proportional zur Ankerspannung: $\omega = k\, U_1$.

Für einen Motor mit konstanter Erregung (z.B. Permanentmagnet im Stator) ist das Drehmoment des Motors proportional zum Ankerstrom. Das Drehmoment stellt sich also bis zur magnetischen Sättigung (bei Nennspannung) auf die Last ein (d.h. auf das geforderte Drehmoment). Die Drehzahl bleibt somit auch bei Laständerungen gut bei dem über U_1 eingestellten Wert.

Somit genügt in vielen Fällen bei Gleichstrommotoren eine Steuerung: die Drehzahl wird durch Vorgabe eines Sollwertes über ein Stellglied eingestellt. Die Anpassung an Lastschwankungen übernimmt in diesem Fall der Motor selber.

Lastabhängige Drehzahl

Folgende Abbildung zeigt ein Ersatzschaltbild des Ankerkreises.

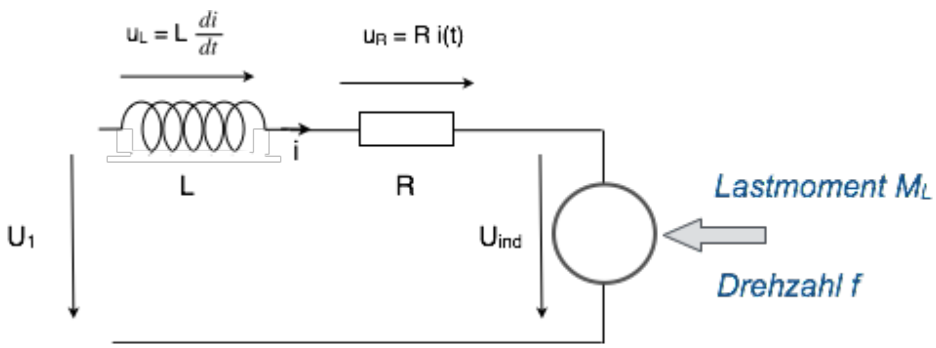


Bild 1.2 Elektrisches Ersatzschaltbild des Motors (Ankerkreis)

Die Induktivität L des Ankerkreises ist nur beim Einschalten relevant und kann daher hier zunächst vernachlässigt werden. Im eingeschwungenen Zustand verbleiben jedoch die ohmschen Verluste. Drehzahlabhängig ist die induzierte Spannung U_{ind}. Es gilt:

$$\omega = k\, U_{ind} \qquad (1.1)$$

Unter Berücksichtigung des ohmschen Spannungsabfalls erhält man:

$$U_1 = I * R + U_{ind} \qquad (1.2)$$

Mit wachsender Last verringert sich die Drehzahl durch den ohmschen Spannungsabfall, der durch den größeren Laststrom verursacht wird. Hierdurch reduziert sich bei konstanter Ankerspannung U_1 die induzierte Spannung U_{ind}. Die eingangs verwendete Beziehung $\omega = k\, U_1$ gilt im Leerlauf ($I = 0$).

Für den Ankerstrom erhält man aus der Maschengleichung oben: $I = U_1 / R - U_{ind}/R = U_1 /R - \omega /kR$. Der Ankerstrom ist proportional zum Lastmoment. Als Kennlinie des Drehmoments über der Drehzahl erhält man den in der folgenden Abbildung gezeigten Verlauf.

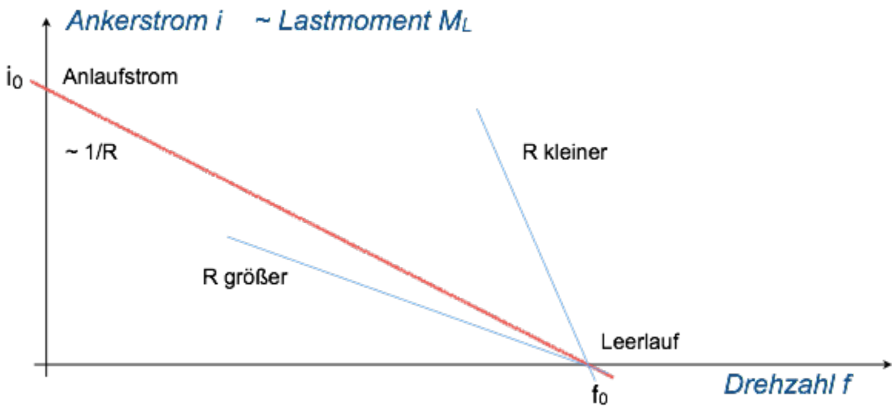


Bild 1.3 Drehmoment-Drehzahl Kennlinie

Die Drehzahl des Motors in Abhängigkeit der Stellgröße U_1 lässt sich durch Umformen der Stromgleichung wie folgt beschreiben: $\omega = k\, U_1 - i\, k\, R$, wobei die Konstante k aus der Leerlauf-drehzahl ω_0 und der Nennspannung U_{10} folgt: $k = \omega_0/U_{10}$. Da das Drehmoment proportional zum Ankerstrom ist, gilt:

$$\omega = k\, U_1 - k_2\, M = k\, U_1 - k_2\, (M_L + J\omega') \qquad (1.3)$$

Das Drehmoment des Motors entspricht dem Drehmoment der Last M_L plus der Änderung des Drehimpulses des Ankers (Rotors) bedingt durch dessen Trägheitsmoment.

Übung 1.1: Für einen Motor sind folgende Kenngrößen gegeben: Nenndrehzahl 3000 pro Minute, Nennstrom 3A, Nennleistung 45 W, Nennspannung 24 V, Trägheitsmoment des Rotors 600 gcm². Berechnen Sie: (1) die induzierte Spannung U_{ind} im Nennbetrieb, (2) den Ankerwiderstand R, (3) das Nennmoment, (4) die Leerlaufdrehzahl, (5) den Anlaufstrom, (6) das Anlaufmoment. Hinweis: Vernachlässigen Sie das Trägheitsmoment des Rotors.

Übung 1.2: Einstellung der Drehzahl unter Last. Für den Motor mit den Kennzahlen aus Übung 1.1 soll die Drehzahl mit Hilfe der Ankerspannung für ein gegebenes Drehmoment eingestellt werden. Wie berechnen Sie die Ankerspannung U_1 für eine gegebene Drehzahl und ein gegebenes Drehmoment?

Übung 1.3. Laständerungen. Spielt das Trägheitsmoment des Rotors beim in Übung 1.1 gegebenen Motor eine Rolle? Geben Sie bei konstanter Ankerspannung U_1 einen Lastsprung um ein gegebenes Drehmoment vor und berechnen Sie die Änderung des Drehimpulses.

Lösung zu Übung 1.1:

- $P_N = U_{indN}\, I_N$: hieraus folgt U_{indN} = 45 W/ 3 A = 15 V
- $U_N = I_N * R + U_{indN}$: hieraus folgt R = (24V -15V)/ 3A = 3 Ω
- $P_N = M_N * \omega_N$: hieraus folgt M_N = 45 W/ (2π 50 1/s) = 0,143 Ws = 0,143 Nm
- f ~ U_{ind}, somit gilt $f_0/f_N = U_N/U_{indN}$: hieraus folgt f_0 = 3000 1/min * 24V/15V = 4800 1/min
- Im Anlauf ist U_{ind} = 0, hieraus folgt: $I_A = U_N/R$ = 24 V/ 3 Ω = 8 A
- M ~ I, somit gilt $M_A/M_N = I_A/I_N$: hieraus folgt M_A = (8A/ 3A) * M_N = 0,381 Nm

Lösung zu Übung 1.2: Vorgegeben sind M_1, f_1, gesucht ist U_1.

- M ~ I, somit gilt $M_1/M_N = I_1/I_N$: hieraus folgt $I_1 = I_N * M_1/M_N$
- $f_1/f_N = U_{ind1}/U_{indN}$
- U_1 folgt aus Gleichung (1.2): $U_1 = I_1 * R + U_{indN} * f_1/f_N$

Lösung zu Übung 1.3: Vorgabe z.B. Lastsprung von M_N auf M_1 = 0,5 M_N innerhalb Δt = 20 ms.

- Strom bei M_1 (siehe Übung 1.2): $I_1 = I_N * M_1/M_N = 0{,}5\, I_N$
- $U_1 = U_N$ bleibt konstant, U_{ind1} erhöht sich gemäß Gleichung (1.2): $U_N = 0{,}5\, I_N\, R + U_{ind1}$
- $U_{ind1} = U_N - 0{,}5\, I_N\, R$ = 24V - 1,5 A * 3 Ω = 19,5V
- Änderung der Drehzahl: $f_1/f_N = U_{ind1}/U_{indN}$ hieraus folgt f_1 = 19,5/15V * 50 1/s = 65 1/s
- $J\omega' \approx J\, 2\pi\, \Delta f / \Delta t = J\, 2\pi\, 15/0{,}02\ (1/s^2) = J * 4710\ (1/s^2) = 0{,}28\ kg\ m^2/s^2 = 0{,}28$ Nm
- Die Trägheit des Rotors ist für den vorgegebenen Lastsprung relevant.

Physikalisches Modell der Regelstrecke

Der Motor mit den beschriebenen Eigenschaften und das Lastmoment sollen nun als Regelstrecke für die Steuerung betrachtet werden. Statt einzelne Arbeitspunkte manuell zu berechnen, soll ein Modell der Motors zusammen mit einem vorgegebenen Lastprofil in Form einer Tabellenkalkulation als Modell der Regelstrecke erstellt werden. Es werden hierfür die Parameter des Motors aus Übung 1.1 verwendet.

Zur Erstellung des Modells werden zunächst die Kenngrößen des Motors als Variable in die Tabellenkalkulation eingetragen. Auf diese Weise lassen sich später die Motoreigenschaften leicht verändern. Weiterhin wird ein Zeitintervall vorgegeben, zu dem Messpunkte errechnet werden (beispielsweise Δt = 10 ms, so dass man bei 20 ms pro Umdrehung 2 Messpunkte erhält). Als Eingangsgrößen werden verwendet: (1) ein Index k für die Zeitintervalle k * Δt, (2) das Lastmoment M_L in Abhängigkeit des Index k. Für K und M_L wird hierzu jeweils eine Spalte in der Tabellenkalkulation verwendet, wobei der Index k z.B. von 0 bis 99 über 100 Stützstellen verläuft (entsprechend 10 Umdrehungen). Die Ankerspannung U_1 ist ebenfalls eine Eingangsvariable, wird aber bei der Steuerung über den Index k nicht variiert, sondern bleibt fest eingestellt. Aus Ausgangsgröße dient (3) die Drehzahl f gemäß Gleichung 1.3.

Übung 1.4: Erstellen Sie eine Tabellenkalkulation nach der oben beschriebenen Vorgehensweise. Gehen Sie hierzu vor wie in Übung 1.2 (M => I => U_{ind} => f). Analysieren Sie das Verhalten der Steuerung bei Vorgabe eines willkürlichen Lastprofils (z.B. einen Lastsprung bei Index k = N. Welches Verhalten zeigt die Regelstrecke bei einem durch die Steuerung fest eingestellten Sollwert? Hinweis: Verwenden Sie eine Grafik. Folgendes Schema soll als Muster für einen möglichen Aufbau eines Arbeitsblattes in der Tabellenkalkulation dienen.

Motor	Nenndrehzahl	fN	3000	rpm	abgeleitete Größen:			
	Nennstrom	IN	3	A	Drehmomen	MN	0,143	Nm
	Nennleistung	PN	45	W	Uind Nenn	UindN	15,000	V
	Nennspannung	UN	24	V	Ankerwiders	R	3,000	Ohm
	Trägheitsmomen	J	60	1,00E-06 kg m2	Drehzahl	fN	50,000	1/s
					k = w0/UN= wN/UindN		20,95	1/Vs
Sollwert	Ankerspannung	U1	24	V	k2=k*R*IN/MN		1316,29	1/VAs2

Modell	Zeitintervall Δt	0,01	s	2 Messpunkte pro Umdrehung bei fN

ohne Trägheitsmoment des Rotors						mit Trägheitsmoment des Rotors			
Index k	ML/MN	I	Uind	Drehzahl f	f/fN	w(k)	f(k) [rpm]	f(k)/fN	w(k) = a * U1 - b * ML + c * w(k-1)
-1						0	0	0,00	Startbedingung: Stillstand
0	0,5	1,500	19,50	3900	1,3	45,91	438	0,15	
1	0,5	1,500	19,50	3900	1,3	86,65	827	0,28	
2	0,5	1,500	19,50	3900	1,3	122,82	1173	0,39	
3	0,5	1,500	19,50	3900	1,3	154,92	1479	0,49	
4	0,5	1,500	19,50	3900	1,3	183,42	1751	0,58	
5	0,5	1,500	19,50	3900	1,3	208,71	1993	0,66	

Übung 1.5: Modifizieren Sie die Tabellenkalkulation aus Übung 1.4 so, dass das Trägheitsmoment des Rotors berücksichtigt wird. Verwenden Sie hierzu Gleichung (1.3). Welchen Einfluss hat das Trägheitsmoment des Rotors auf Lastsprünge? Hinweis: Verwenden Sie die Konstanten k und k2, die sich in der Tabellenkalkulation numerisch leicht berechnen lassen. Ersetzen Sie die Ableitung ω' durch die Differenzengleichung $\omega' = \Delta\omega / \Delta t = (\omega(k) - \omega(k-1)) / \Delta t$. Formen Sie die Gleichung nach ω(k) um. Verwenden Sie eine Grafik zum Vergleich mit Übung 1.4.

Folgende Abbildung zeigt eine mit Hilfe eines Programms zur Tabellenkalkulation erzeugte Grafik. Hierbei wurden die Kennzahlen des Motors aus Übung 1.1 verwendet. Fest vorgegeben wurden: $U_1 = U_N = 24$ V, $\Delta t = 0{,}01$ s (d.h. zwei Messwerte pro Umdrehung), Startbedingung: Stillstand (bei Index k = -1 wurde $\omega(-1) = 0$ vorgegeben). Das Lastprofil M(k) wurde abhängig vom Index k in drei Stufen vorgegeben, wie im unteren Teil der Abbildung zu erkennen ist.

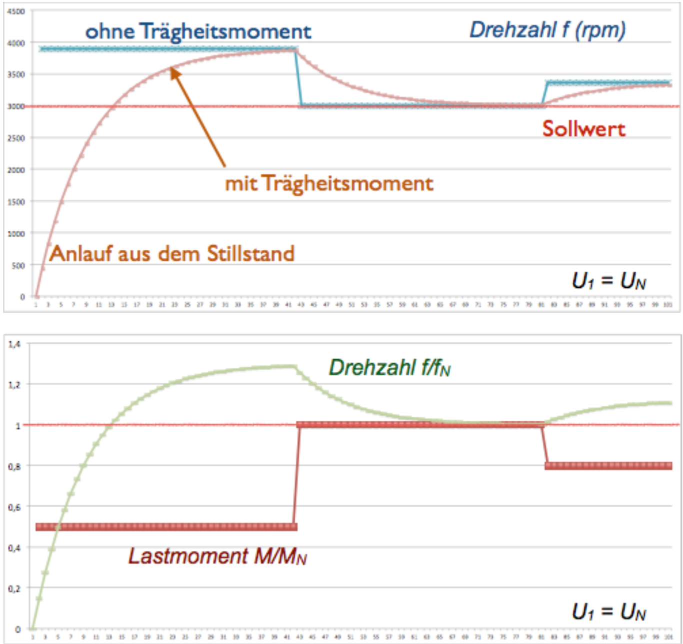


Bild 1.4 Verhalten des Motors bei wechselnder Last (aus dem Modell berechnet)

Wie man aus der Abbildung erkennt, startet der Motor aus dem Stillstand mit halber Last (M/M_N= 0,5. Nach dem Anlaufen erhöht sich die Drehzahl über den gewünschten Sollwert (Nenndrehzahl) hinaus. Die Last springt dann auf den Wert der Nennlast (M/M_N=1). Die Drehzahl erreicht unter dem Einfluss der Trägheit des Rotors den Sollwert. Anschliessend sinkt die Last auf 0,8 M_N, wodurch sich die Drehzahl wiederum erhöht. Die Drehzahlschwankungen bewegen sich bei diesem Motor im Bereich von 30% bei Lastschwankungen von 50%.

1.1. Regelung

Möchte man die Drehzahl genauer bzw. ohne Kenntnis der Regelstrecke einstellen, ist eine Messung der tatsächlichen Drehzahl erforderlich. Ein Drehgeber liefert die aktuelle Drehzahl. Die Abweichung vom vorgegebenen Sollwert wird durch einen Regler minimiert. Der Regler wirkt hierzu auf das Stellglied solange ein, wie sich die Regelabweichung reduzieren lässt.

Kennzeichen eines Regelkreises ist die Rückkopplung: der gemessene aktuelle Wert wird mit dem Sollwert verglichen. Die Abweichung dient als Kriterium für das Einwirken des Reglers. Folgende Abbildung zeigt eine mögliche Erweiterung der Steuerung zu einer Regelung der Drehzahl.

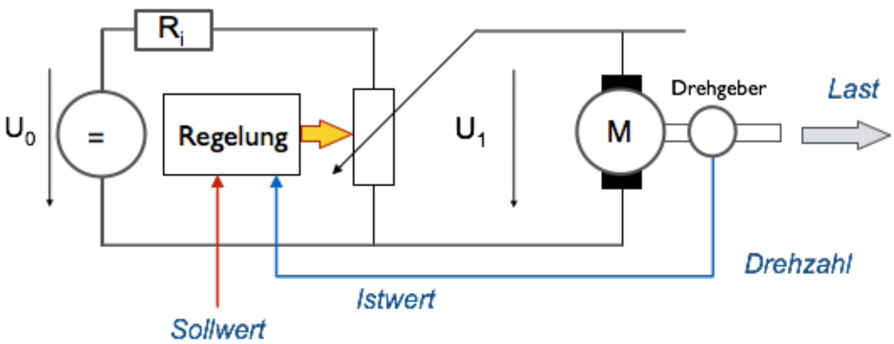


Bild 1.5 Erweiterung der Steuerung zu einer Regelung

Die Regeleinrichtung bewertet die Abweichung der Drehzahl vom gewünschten Sollwert und wirkt über das Stellglied auf den Motor ein, indem sie die bisher konstant gehaltene Ankerspannung in geeigneter Weise verstellt. In der Praxis würde man für eine digitale Regelung die Ankerspannung durch Pulsweitenmodulation verstellen, also ein digitales Schaltelement als Stellglied verwenden. Das Prinzip ist jedoch gleich. In der Regelungstechnik sind für Regelkreise die in folgender Abbildung gezeigten Begriffe gebräuchlich.

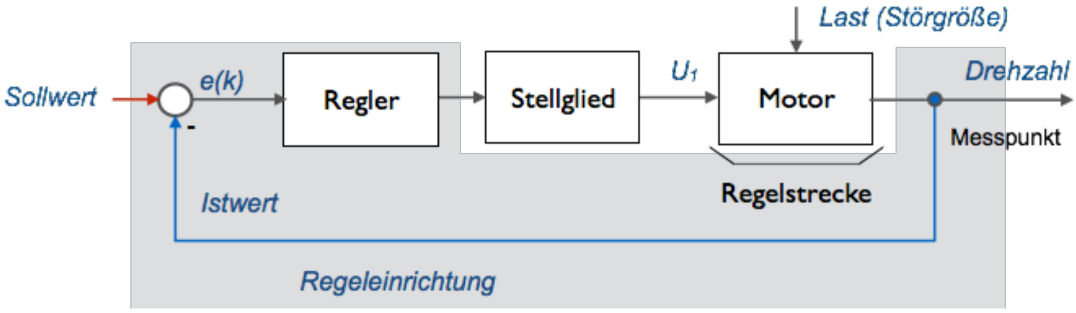


Bild 1.6 Regelkreis

Der Motor bildet die Regelstrecke. Die wechselnde Last ist nicht voraus kalkulierbar und wirkt daher als Störgröße auf die Regelstrecke ein. Der Messpunkt, die Bildung der Differenz aus Sollwert und Istwert, sowie der Regler gehören zur Regeleinrichtung. Unter dem Regler wird der Teil verstanden, der auf die Regelabweichung reagiert und auf das Stellglied einwirkt. In der Abbildung wird die Rückkopplung in Form der Regelschleife deutlich.

1.2. P-Regler

Für den Regler ist nun zu definieren, in welcher Weise er auf die Regeldifferenz (die Abweichung des gemessenen Istwertes vom Sollwert) reagieren soll. Im einfachsten Fall soll für die Drehzahlregelung bei einer Abweichung von der Solldrehzahl die Ankerspannung proportional zur Regelabweichung angehoben oder gesenkt werden. In diesem Fall spricht man von einem Proportionalregler, kurz: P-Regler.

Den P-Regler kann man durch den Faktor beschreiben, mit dem er die Regelabweichung bewertet. Der P-Regler lässt sich also durch folgende Gleichung beschreiben:

$$u_R(k) = K_P * e(k) \qquad (1.4)$$

Hierbei bezeichnet e(k) die Regeldifferenz, K_P den Proportionalitätsfaktor des Reglers, und $u_R(k)$ die Ausgangsgröße des Reglers. In dieser normierten Schreibweise ist die Ausgangsgröße $u_R(k) = 0$, wenn der Sollwert erreicht ist. Auf positive Regeldifferenzen (Istwert kleiner als Sollwert) reagiert der Regler mit positivem Ausgangssignal, er möchte den Istwert also nach oben treiben. Umgekehrt reagiert er auf negative Regeldifferenzen (Istwert überschreitet den Sollwert) abschwächend auf die Regelstrecke.

In der normierten Schreibweise ist der Reglerausgang gleich Null, wenn der Istwert auf Soll ist (Regeldifferenz gleich Null). Im Falle der Drehzahlregelung soll in diesem Fall die Ankerspannung gleich der Nennspannung sein. Die Stellgröße U1(k) errechnet sich also aus folgender Gleichung.

$$U1(k) = K_P * e(k) + U_N \qquad (1.5)$$

> Übung 1.6: Ergänzen Sie Ihr Modell der Regelstrecke in der Tabellenkalkulation um den Regler. Wählen Sie für K_P einen geeigneten Wert. Vergleichen Sie das Verhalten der Regelstrecke mit Regler mit dem Verhalten ohne Regler aus Übung 1.5. Hinweis: Am einfachsten kopieren Sie das Arbeitsblatt der Steuerung in ein neues Arbeitsblatt Regelung. So bleibt Ihnen die ungeregelte Strecke erhalten. Für den Regler ergänzen Sie eine Spalte für die Regeldifferenz e(k), sowie eine Spalte für den Regel-algorithmus gemäß Gleichung (1.5). Verwenden Sie eine Grafik.

Folgende Abbildung zeigt das Verhalten der Regelstrecke mit dem P-Regler. Während bei halbem Lastmoment die ungeregelte Strecke (siehe Abbildung 1.4 unten) eine Abweichung von ca 30% zeigte, ist diese Abweichung mit dem gewählten Proportionalitätsfaktor des Reglers deutlich geringer. Außerdem schwingt die Regelstrecke deutlich schneller auf Laständerungen ein. Einsatz des Reglers verbessert die Einhaltung der Sollfrequenz und das Zeitverhalten deutlich. Allerdings erkennt man auch, dass der P-Regler Abweichungen vom Sollwert nicht ausregelt.

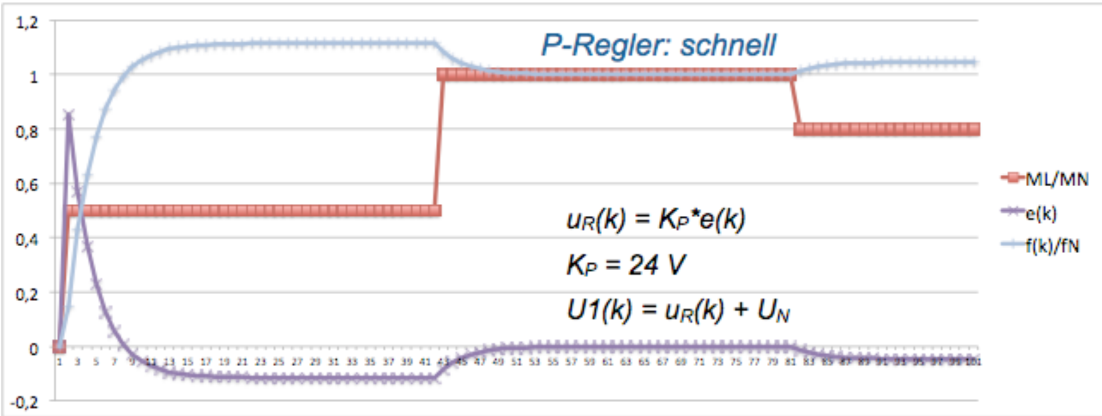


Bild 1.7 Drehzahlregelung mit P-Regler

Das in der Abbildung oben gezeigte Verhalten des Reglers ist in Bezug auf folgende Anwen-dungsfälle interessant:

- Führungsverhalten: Wie folgt der Regelkreis Änderungen der Führungsgröße? Die Führungsgröße ist in diesem Beispiel die durch den Sollwert vorgegebene gewünschte Drehzahl (Frequenz f_S). Die Führungsgröße ändert sich im abgebildeten Fall beim Einschalten: Sie folgt einer Sprungfunktion (im abgebildeten Maßstab f_S/f_N dem Einheitssprung). Die Drehzahl des Regelkreises schwingt sich nach dem Einschalten ohne Überschwinger etwas oberhalb des gewünschten Wertes ein. Bei einer Regelung auf einen festen Wert der Führungsgröße wäre das Führungsverhalten hiermit beschrieben. Bei einer Folgeregelung (variable Führungsgröße, hier: Vorgabe einer variabel einstellbaren Drehzahl) beschreibt das Führungsverhalten die Güte, mit der der Regelkreis den Vorgaben folgt.
- Störungsverhalten: Wie kompensiert der Regelkreis Änderungen der Störgröße? In der Abbildung spielt die variable Last die Rolle der Störgröße. Das Störungsverhalten beschreibt, wie gut der Regelkreis Lastwechsel ausregelt. Das Störungsverhalten zeigt sich in der Abbil-dung also an den Lastwechseln, wobei die Führungsgröße hierbei konstant gehalten wurde.

In Gleichung (1.4) wurde der Regelalgorithmus des P-Regler in zeitdiskreter Schreibweise angegeben, so wie man ihn bei einer digitalen Regelung programmieren würde. Zur Erläuterung der Funktionsweise ist die Darstellung im Zeitbereich hilfreich.

$$u_R(t) = K_P * e(t) \qquad (1.6)$$

In dieser Darstellung lässt sich der P-Regler als System interpretieren, das aus der Eingangsgröße e(t) die Ausgangsgröße $u_R(t)$. Das System lässt sich im Zeitbereich z.b. beschreiben durch seine Impulsantwort oder Sprungantwort. Dem System lässt sich mit Hilfe der Laplace-Transformation eine Übertragungsfunktion G(s) zuordnen. Folgende Abbildung zeigt die Sprungantwort und die Übertragungsfunktion des P-Reglers.

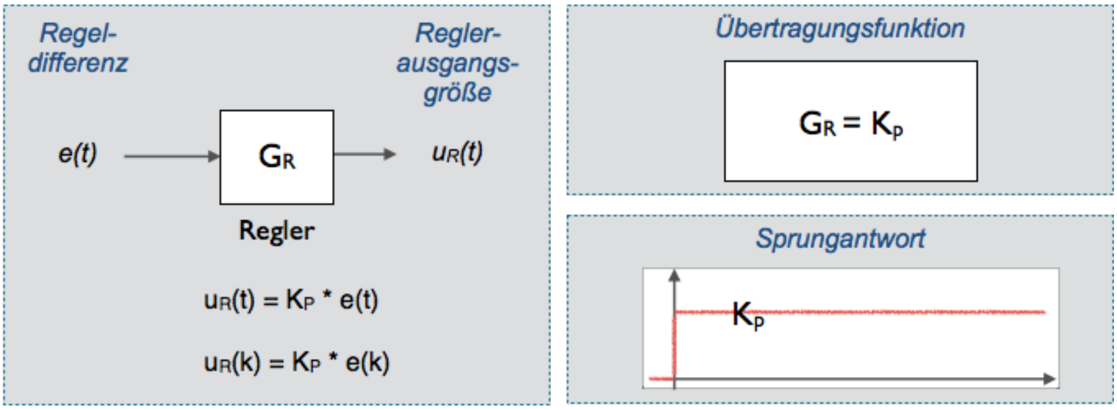


Bild 1.8 P-Regler als System mit Sprungantwort und Übertragungsfunktion

In diesem einfachen Fall wäre die Impulsantwort des Systems $u_{Ri}(t) = K_P * \delta(t)$. Die Laplace-Transformation der Impulsantwort ergibt als Übertragungsfunktion $G_R(s) = K_P$, den Proportionalitätsfaktor des Reglers. Wie man dem Regelalgorithmus entnimmt, folgt der Regler einem Einheitssprung Eingang ebenfalls proportional mit K_P (siehe Sprungantwort).

1.3. I-Regler

Beim I-Regler deutet der Name auf eine Integration hin (als sogenanntes Integrations-Glied bzw. kurz I-Glied in einer Signalkette). Integriert wird hierbei die Regeldifferenz über der Zeit. Der Regler lässt sich durch folgende Gleichung beschreiben.

$$u_R(t) = K_i * \int e(\tau)\, d\tau \qquad \text{mit } \tau = 0 \text{ bis } t \qquad (1.6)$$

Der Regler summiert (integriert) die Regelabweichungen aus der Vergangenheit bis zum Zeitpunkt τ=t und bewertet diese Fehlersumme mit der Reglerkonstanten K_i. In zeitdiskreter Schreibweise ersetzt man das Differenzial dτ durch das Abtastintervall Δt. Das Integral über den Abtastwerten e(k) ist die Summe der Abtastwerte. Er ergibt sich folgende Gleichung für den I-Regler.

$$u_R(k) = K_i * \Delta t * \Sigma e(i) \qquad \text{mit } i = 0, ..., k \qquad (1.7)$$

Übung 1.7: Ergänzen Sie in Ihrer Tabellenkalkulation den I-Regler. Wählen Sie den Reglerkoeffizienten K_i in geeigneter Weise und testen Sie den Regler an der Regelstrecke. Vergleichen Sie das Regelverhalten mit der ungeregelten Strecke und mit dem P-Regler. Hinweis: Ergänzen Sie einfach den P-Regler um eine zusätzliche Spalte für den I-Regler. Verwenden Sie eine Grafik.

Beim I-Regler wirken Regelabweichungen wegen der Integration dauerhaft auf das Regelverhalten. Auf diese Weise regelt der I-Regler Regelabweichungen aus. Ein Vergleich mit dem P-Regler zeigt aber auch, dass der I-Regler deutlich langsamer reagiert. Folgende Abbildung zeigt einen Testlauf mit den in der Abbildung genannten Reglerparametern.

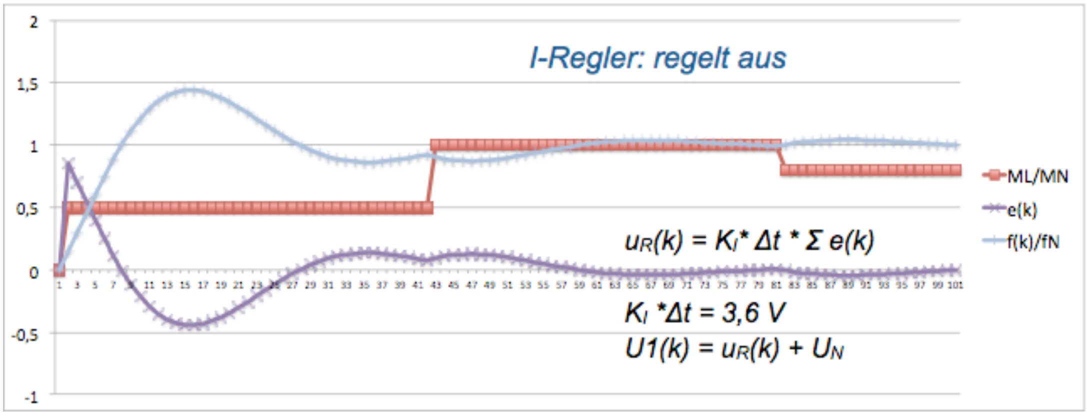


Bild 1.9 Drehzahlregelung mit I-Regler

Wenn man den I-Regler als System interpretiert, kann man ihn ebenfalls durch seine Übertragungsfunktion und Sprungantwort beschreiben. Das Abbild der Integration im Laplace-Bereich ist der Quotient 1/s. Insgesamt erhält man also für die Übertragungsfunktion $G_R(s) = K_i /s$. Die Sprungantwort ermittelt man aus Gleichung (1.6) als Gerade mit der Steigung K_i * dτ, bzw. in zeitdiskreter Form aus Gleichung (1.7) zu K_i * Δt.

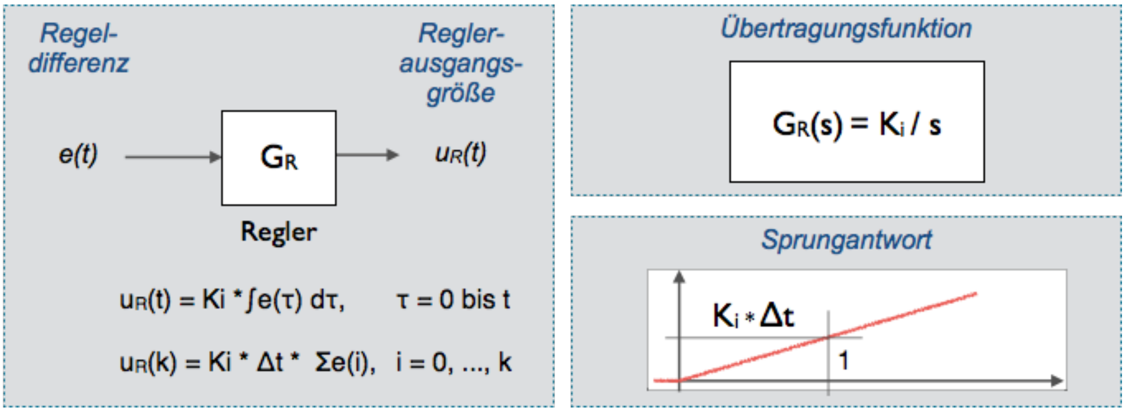


Bild 1.10 I-Regler als System mit Sprungantwort und Übertragungsfunktion

1.4. PI-Regler

Ein Vergleich der beiden Regler zeigt, dass P-Regler schnell und wirkungsvoll reagieren, aber nicht ausregeln. I-Regler regeln aus, sind allerdings langsam. Ein nahe liegender Gedanke ist es daher, beide Eigenschaften zu einem PI-Regler zu kombinieren. Kombination der Regelalgorithmen ergibt folgende Gleichungen für den kontinuierlichen und zeitdiskreten Fall.

$$m(t) = K_P * e(t) + K_i * \int e(\tau)\, d\tau \qquad \text{mit } \tau = 0 \text{ bis } t \tag{1.8}$$

$$m(k) = K_P * e(k) + K_i * \Delta t * \Sigma e(i) \qquad \text{mit } i = 0, ..., k \tag{1.9}$$

Beide Regler wirken also in Abhängigkeit der Regeldifferenz und addieren ihre Wirkung. In einem Blockschaltbild hätte man also einen P-Regler und I-Regler parallel betrieben, deren Ausgänge sich zur Ausgangsgröße m addieren.

Übung 1.8: Ergänzen Sie in Ihrer Tabellenkalkulation den PI-Regler. Vergleichen Sie das Regelverhalten mit der ungeregelten Strecke, dem P-Regler und dem I-Regler.

Folgende Abbildung zeigt einen Testlauf des kombinierten Reglers. Hierbei wurden die Reglerparameter unverändert übernommen, lediglich die Regelalgorithmen gemäß Gleichung (1.9) kombiniert. Es zeigt sich, dass sich tatsächlich die positiven Eigenschaften beider Regler kombinieren: Der PI-Regler reagiert wirkungsvoller und etwas schneller als der I-Regler. Im Unterschied zum P-Regler regelt er aus.

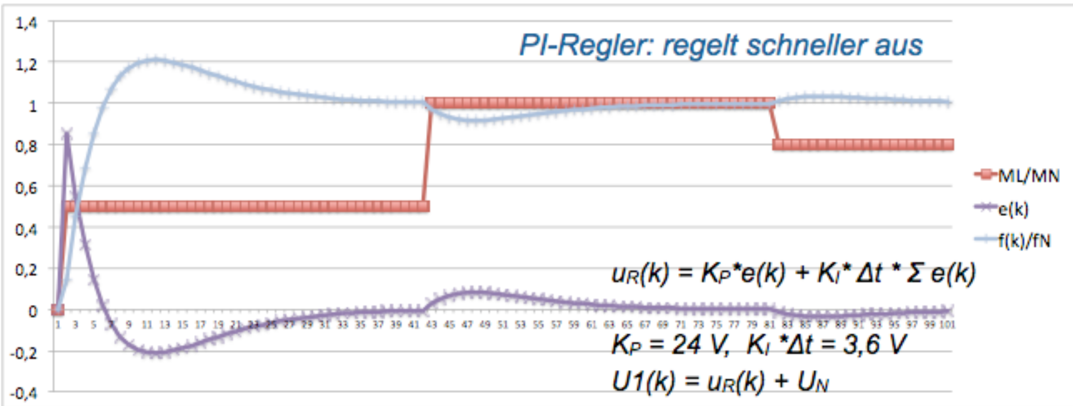


Bild 1.11 Drehzahlregelung mit PI-Regler

Übung 1.9: Beschreiben Sie die Übertragungsfunktion und die Sprungantwort des PI-Reglers.

Zusätzlicher D-Anteil

Um die Regelung noch etwas zu beschleunigen, könnte man aus der Regeldifferenz e(t) einen Trend antizipieren und somit vorausschauend auf die Regelstrecke einwirken. Ein Trend der Funktion e(t) entspricht mathematisch der Ableitung der Funktion, also e'(t) = de(t) / dt. Zusammen mit diesem differentiellen Anteil (D-Anteil) ergibt sich aus dem PI-Regler ein sogenannter PID-Regler. Folgende Abbildung zeigt die Regelkriterien für den in Abbildung 11 dargestellten Ablauf.

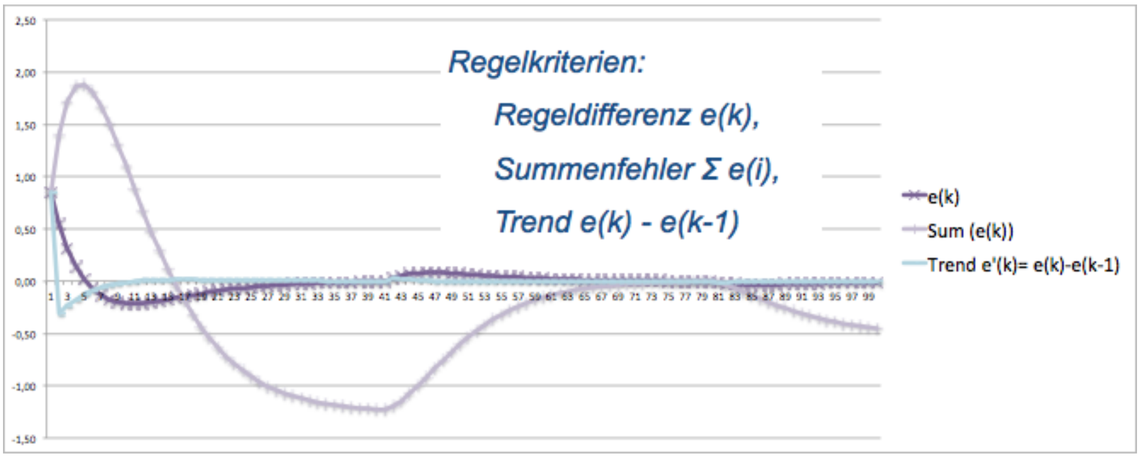


Bild 1.12 Regelkriterien

Der P-Regler reagiert unmittelbar auf die Regelabweichung e(k). Der Summenfehler Σ e(i) als Integral der Regelabweichung sorgt für das nachhaltige Ausregeln bei verbleibenden Regeldifferenzen. Die Trendkurve e(k) - e(k-1) antizipiert den Verlauf der Regelabweichung: Beim Anfahren und bei den folgenden Lastsprüngen verstärkt sie den proportionalen Anteil unmittelbar nach dem Lastwechsel.

1.5. *PID-Regler*

Der D-Anteil des Reglers verwendet als Regelkriterium ist der Trend e'(t) = de(t)/ dt als zeitliche Ableitung der Regeldifferenz. Dieser Anteil ist mit dem Reglerparameter K_d zu bewerten. Insgesamt erhält man für den PID-Regler also folgende Gleichungen.

$$u_R(t) = K_P * e(t) + K_i * \int e(\tau)\, d\tau + K_d\, de(t)/dt \qquad \text{mit } \tau = 0 \text{ bis } t \qquad (1.10)$$

$$u_R(k) = K_P * e(k) + K_i * \Delta t * \Sigma e(i) + (K_d / \Delta t) * (e(k)-e(k-1)) \qquad \text{mit } i = 0, ..., k \qquad (1.11)$$

Übung 1.10: Ergänzen Sie den PI-Regler in Ihrer Tabellenkalkulation um einen D-Anteil zu einem PID-Regler. Testen Sie den Regler.

Folgende Abbildung zeigt einen Testlauf, wobei die bisherigen Reglerparameter beibehalten wurden. Das Regelverhalten weicht mit den gewählten Parametern und dem gewählten Lastprofil nur unerheblich vom PI-Regler ab.

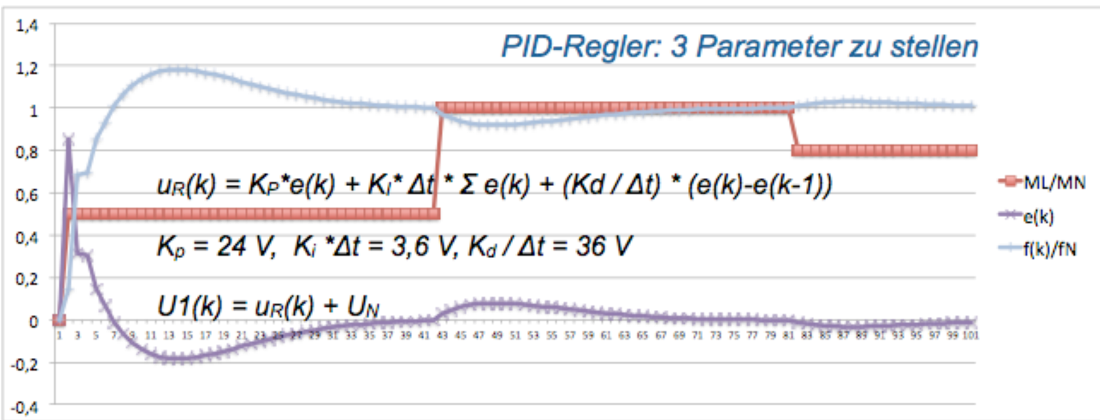


Bild 1.13 Drehzahlregelung mit PID-Regler

Das Reglerverhalten überrascht mit Blick auf die Regelkriterien (Fehler, Summenfehler und Fehlertrend) der einzelnen Anteile nicht. Der Fehlertrend gibt bei den Lastsprüngen nur punktuell einen Beitrag. Allerdings ist auch unverkennbar, das mit den gewählten Reglerkoeffizienten der integrative Anteil überwiegt. Die Koeffizienten K_p, K_i und K_d wichten die in Abbildung 1.12 gezeigten Regelkriterien. Die Wahl geeigneter Koeffizienten, d.h. in der Einstellung der Reglerparameter, ist die wesentliche Aufgabe in der Regelungstechnik.

Wegen der durch den Regelkreis gegebenen Rückkopplung kann bei ungünstiger Wahl der Reglerparameter der Regelkreis instabil werden. Außerdem sind die Stellgrößen in einem realen System nur innerhalb vorgegebener Grenzen veränderbar. In diesem Fall ist die Ankerspannung des Motors zu beachten. Mit den gewählten Parametern des P-Anteils und D-Anteils ist diese beim initialen Lastsprung zu hoch. Im realen Fall würde man den Motor mit Hilfe einer Vorsteuerung erst auf Nenndrehzahl hochfahren (Ankerspannung wie in Abschnitt 1.1 festlegen), bevor man den Regler aktiviert. Kriterien zur Einstellung der Reglerparameter werden in Kapitel 2 im Zusammenhang mit einer realen Regelstrecke vorgestellt.

1.6. Übertragungsfunktion

Für die Regelstrecke sei eine Übertragungsfunktion G_S angenommen. Durch Hinzufügen des Reglers und des Regelkreises erhält man die in folgender Abbildung gezeigte Struktur. Hierbei sei G_R die Übertragungsfunktion des Reglers. Der Regelkreis verändert das Verhalten des Regelstrecke. In welcher Weise die Regelung das Verhalten beeinflusst, zeigt sich durch Vergleich der Übertragungsfunktion der Regelstrecke mit der Übertragungsfunktion des geregelten Systems.

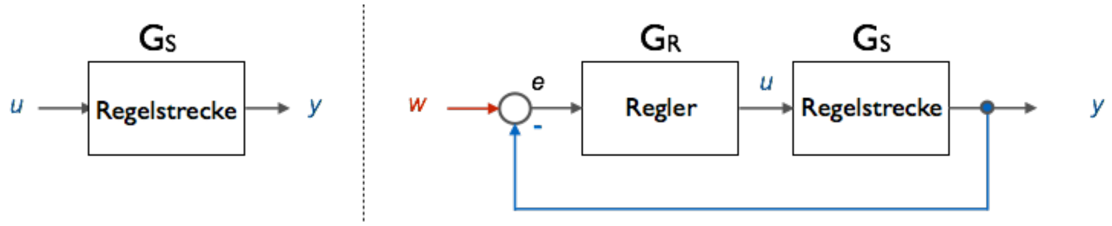


Bild 1.14 Vergleich der ungeregelten mit der geregelten Strecke

Die Übertragungsfunktion eines Systems ist als Verhältnis des transformierten Ausgangssignals zum Transformierten Eingangssignals definiert. Am Ausgang des Regelkreises erhält man:

$$Y(s) = (W(s) - Y(s))\, G_R(s)\, G_S(s) \qquad (1.12)$$

Nach Umformung erhält man als Übertragungsfunktion des Regelkreises aus dem Verhältnis Y(s) zu W(S):

$$G(s) = G_R(s)\, G_S(s) \,/\, (1 + G_R(s)\, G_S(s)) \qquad (1.12)$$

Die Einführung des Regelkreises hat also erheblichen Einfluss auf die Übertragungsfunktion des geregelten System im Vergleich zur ungeregelten Regelstrecke. Die durch Gleichung (1.3) beschriebene Regelstrecke hat eine Übertragungsfunktion der Form:

$$G_S(s) = a/(1 + b\, s) \qquad (1.13)$$

Im einfachsten Fall wird die Strecke durch einen P-Regler mit der Übertragungsfunktion $G_R = K_p$ geregelt. Für die Übertragungsfunktion des geregelten Systems erhält man dann:

$$G(s) = K_P\, a /(1 + K_P\, a + b\, s) \tag{1.14}$$

Übung: 1.11: Berechnen Sie die Koeffizienten a und b der Regelstrecke aus Gleichung (1.13) in Abhängigkeit der Konstanten in Gleichung (1.3) unter der Annahme M_L=0.

Übung 1.12: Berechnen Sie die Polstellen der Übertragungsfunktionen der ungeregelten Strecke nach Gleichung (1.13), sowie die Polstellen der geregelten Strecke nach Gleichung (1.14). Berechnen Sie die konkreten Werte der Polstellen für die Kennzahlen und Reglereinstellung aus Abschnitt 1.2. Welchen Einfluss hat der Regler?

1.7. Einfluss des Reglers auf die Übertragungsfunktion

Das Beispiel zeigt, dass sich durch den Einfluss des Reglers die Polstellen der Übertragungsfunktion gegenüber dem ungeregelten System verschieben. Mit den Werten aus Abschnitt 1.2 ergibt sich folgendes Bild. Für den ungeregelte Motor im Leerlauf erhält man die Übertragungsfunktion:

$$G_S(s) = 3{,}33 / (1 + 0{,}08\, s) \tag{1.15}$$

Hierbei wurde als Eingangsgröße die Ankerspannung U1 in V gewählt, als Ausgangsgröße die Frequenz f in Hz (nicht die Kreisfrequenz $\omega = 2\,\pi\, f$). Für den Regler wurde in Abschnitt 1.3 der relative Fehler $e'(t) = (f_S - y(t)) / f_S$ verwendet. Bei Verwendung des absoluten Wertes der Frequenz f als Ausgangssignal $y(t) = f(t)$ ist die Regeldifferenz $e(t) = f_S - y(t)$. Der zugehörige Reglerparameter K_P errechnet sich dann aus dem in Abschnitt 1.5 verwendeten Parameter K'_P zu $K_P = K'_P$ /50 Hz für die gewünschte Solldrehzahl f_S. Unter diesen Voraussetzungen errechnet sich die Übertragungsfunktion des geregelten Systems zu:

$$G(s) = 1{,}6 / (2{,}6 + 0{,}008\, s) = 0{,}615 / (1 + 0{,}03\, s) \tag{1.16}$$

Berechnet man die zugehörigen Polstellen, so ergibt sich im ersten Fall ein Pol bei s = - 1/ 0,08 = -12,6. Im zweiten Fall erhält man eine Polstelle bei s = -1/ 0,03 = -32,9. Der Einsatz des Reglers hat den Pol der ungeregelten Strecke weiter nach links in der komplexen Ebene verschoben.

Wie man sich vielleicht aus der Systemtheorie erinnert, liefern die Pole p der Übertragungsfunktion im Zeitbereich Beiträge der Form e^{-pt}. Man kann die Faktoren vor s in den Gleichungen (1.15) und (1.16) daher auch unmittelbar als Zeitkonstanten τ verstehen im Sinne von $e^{-pt} = e^{-t/\tau}$.

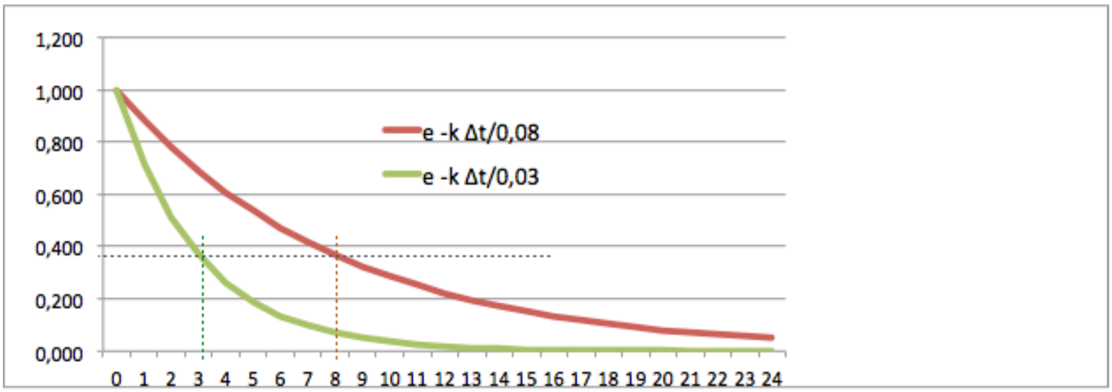


Bild 1.15 Einfluss des Reglers auf das Einschwingverhalten

Aus dieser Perspektive ist die Wirkung des Reglers unmittelbar einleuchtend: Die ungeregelte Strecke hat eine Zeitkonstante τ von 0,08 Sekunden. Bezogen auf die Dauer eine Umdrehung von f_S = 20 ms bei Solldrehzahl bzw. auf das in Abschnitt 1.5 verwendete Intervall von Δt = 10 ms zwischen den Messpunkten vergehen also ca. 4 Umdrehungen bzw. 8 Messpunkte innerhalb der Anstiegszeit $\tau = 0{,}08$. Der Einsatz des Reglers verringert die Anstiegszeit auf 0,03 Sekunden. Die Abbildung oben gibt den Verlauf beider Beiträge wieder, wobei als Zeitintervall zwischen dem Messwerten $\Delta t = 10$ ms gewählt wurde.

Übung 1.13: Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Polstellen und dem Einschwingverhalten (Sprungantwort) des Systems? Vergleichen Sie den geregelten Fall mit dem ungeregelten Fall.

Übung 1.14: Wir könnten Sie die Lage der Polstellen zur Auslegung des Reglerkonstanten K_P verwenden? Welche Werte für K_P sollten Sie vermeiden? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Übung 1.15: Welche Bedeutung hat der Zähler der Übertragungsfunktionen in den Gleichungen (1.15) und (1.16)? Vergleichen Sie die ungeregelte Strecke mit der geregelte Strecke im eingeschwungenen Zustand. Hinweis: Verwenden Sie die Grenzwertsätze der Laplace-Transformation. Wohin bewegt sich die Variable s in der Übertragungsfunktion für $t \to \infty$? Wohin bewegt sich die Variable s in der Übergangsfunktion für $t \to \infty$? Welcher Fall hat im eingeschwungenen Zustand die geringere Abweichung vom Sollwert?

2. Drehzahlregelung mit PID Regler

In diesen Abschnitt soll ein Gleichstromantrieb als reale Regelstrecke durch einen digitalen Regler mit vorgegebener, konstanter Drehzahl betrieben werden. Der Regler wird als Software auf eine, Mikrocontroller realisiert. Die Regelstrecke enthält den Motor mit Drehgeber. Der Regelalgorithmus soll auf dem Regler für minimalen Rechenaufwand optimiert werden. Zur Einstellung der Reglerparameter werden Regeln vorgestellt, die sich unmittelbar in der Realität überprüfen lassen.

2.1. Regelstrecke mit Regler

Die Regelstrecke ist auf einer Motorbaugruppe untergebracht. Der Aufbau entspricht dem des Laborversuchs für analoge Regler (mit Operationsverstärker). Hier soll jedoch der Regler mit Hilfe eines Mikrocontrollers realisiert werden. Die Motorbaugruppe enthält einen Drehgeber zur Messung der Regelgröße. Als Stellglied wird ein Leistungsverstärker verwendet, der sich über Pulsweitenmodulation ansteuern lässt. Folgende Abbildung zeigt den prinzipiellen Aufbau.

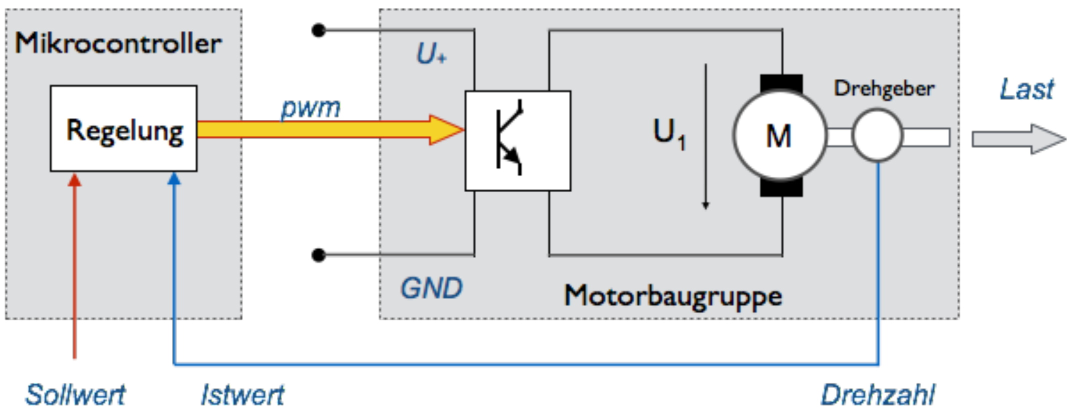


Bild 2.1 Aufbau der Drehzahlregelung mit Mikrocontroller

Somit benötigt die SPS nur digitale Eingänge und Ausgänge. Damit die Pulsweite nicht direkt vom Prozessor (CPU) der SPS erzeugt werden muss, wird ein Baustein verwendet, der zu einem gegebenen Wert eigenständig ein pulsweitenmoduliertes Signal erzeugt. Der gegebene Wert wird von der vom Regler direkt als PWM-Signal an einen Motortreiber gegeben.

Übung 2.1: Erstellen Sie ein Konzept für die Regelung. Hierzu zählt die Vorgabe der Ankerspannung über Pulsweitenmodulation (PWM), sowie das Einlesen der Messwerte des Drehgebers. Dokumentieren Sie Ihr Konzept. Hinweis: Unterlagen über den Motor mit Drehgeber (Regelstrecke), den Controller (Arduino UNO), sowie den Motor-Treiber (Arduino Motor-Shield) finden Sie in Anhang E.

2.2. Regelalgorithmus

Der Regler soll als PID-Regler ausgeführt werden. Gleichung (2.1) beschreibt den Regelalgorithmus im zeitkontinuierlichen Fall. Gleichung (2.2) beschreibt den Algorithmus im zeitdiskreten Fall, wobei Δt das Abtastintervall bezeichnet.

$$u_R(t) = K_P * e(t) + K_i * \int e(\tau)\, d\tau + K_d\, de(t)/dt \qquad \text{mit } \tau = 0 \text{ bis } t \qquad (2.1)$$

$$u_R(k) = K_P * e(k) + K_i * \Delta t * \Sigma e(i) + (K_d / \Delta t) * (e(k)-e(k-1)) \qquad \text{mit } i = 0, ..., k \qquad (2.2)$$

Bei der Realisierung als digitaler Regler wird der Algorithmus in einer Programmschleife zyklisch ausgeführt. Um den Rechenaufwand bzw. die Laufzeit auf dem Regler zu reduzieren, lässt sich der Algorithmus in folgenden Punkten optimieren: (1) rekursive Berechnung der Fehlersumme Σe(i), (2) die Division durch eine Multiplikation ersetzen, (3) die Anzahl der Operationen reduzieren. Durch Umformen erhält man einen vereinfachten Algorithmus der Form:

$$u_R(k) = u_R(k-1) + q_0\, e(k) + q_1\, e(k-1) + q_2\, e(k-2) \qquad (2.3)$$

Hierbei bedeuten

$$q_0 = K_P + K_i * \Delta t + (K_d / \Delta t) \qquad (2.4)$$

$$q_1 = - K_P - 2 * (K_d / \Delta t) \qquad (2.5)$$

$$q_2 = (K_d / \Delta t) \qquad (2.6)$$

Übung 2.2: Prüfen Sie die Korrektheit von Gleichung (2.3) in Bezug auf Gleichung (2.2).

Übung 2.3: Programmieren Sie den Regelalgorithmus auf Ihrer SPS. Testen Sie den Algorithmus an der Regelstrecke.

2.3. Einstellung der Reglerparameter

Zum Einstellen der Reglerparameter gibt es unterschiedliche Methoden. Ein guter Startpunkt ist die ungeregelten Strecke, d.h. alle Reglerparameter sind zunächst auf Null. Dann lässt sich z.B. durch Probieren eine günstige Reglereinstellung finden. Hierzu erhöht man zunächst den proportionalen Anteil K_P, bis die Dämpfung des Systems schlecht wird. Anschließend erhöht man den I-Anteil. Dann wäre zu probieren, ob ein D-Anteil die Strecke stabilisiert.

Neben der Methode des Probierens kann man auch einschlägige Einstellregeln verwenden, wie z.B. die Einstellregeln nach Ziegler/Nichols. Nach diesem Verfahren wird ausgehend vom Startpunkt Null zunächst der K_P-Anteil so weit erhöht, bis das System ins Schwingen gerät, d.h. in einen kritischen Zustand. Diese Reglereinstellung wird als K_{krit} erfasst, sowie die Periodendauer T_{krit} der Schwingung. Als Reglereinstellungen verwendet man dann: $K_P = 0{,}6\ K_{krit}$, $K_i = 1{,}2\ K_{krit}/T_{krit}$ und $K_d = 0{,}075\ K_{Krit}{}^*T_{krit}$. Das Verfahren von Ziegler-Nichols setzt voraus, dass man die Regelstrecke in einen kritischen Zustand fahren darf.

Die Einstellung der Reglerparameter sind natürlich abhängig von den Eigenschaften der Regelstrecke. Für unterschiedliche Strecken finden sich in der Literatur Vorschläge für günstige Reglereinstellungen. Ist die Strecke bekannt, kann man jedoch mit Hilfe der Übertragungsfunktion des geregelten Systems selber günstige Reglereinstellungen ableiten, z.B. durch Vorgabe der gewünschten Zeitkonstanten bzw. der Lage der Pole.

Übung 2.4: Optimieren Sie die Einstellung Ihrer Reglerparameter nach Ihren Vorstellungen. Untersuchen Sie das Führungsverhalten und Störverhalten Ihres Reglers.

2.4. Stabilität

Wie in Abbildung 1.14 in Abschnitt 1 gezeigt, entsteht durch die Einführung des Regelkreises eine Rückkopplung (engl. feed back). Wenn diese Rückkopplung zu einer Mitkopplung wird, gerät das geregelte System ins Schwingen. Dieser Effekt ist von Veranstaltungen bekannt, wenn ein Mikrophon in die Nähe eines Lautsprechers gerät. Die Übertragungsfunktion des Regelkreises beträgt

$$G(s) = G_R(s)\ G_S(s)\ /\ (1 + G_R(s)\ G_S(s)) \qquad (2.7)$$

Hierbei bedeutet $G_S(s)$ die Übertragungsfunktion der Strecke, und $G_R(s)$ die Übertragungsfunktion des Reglers. Aus der Lage der Pole der Übertragungsfunktion lässt sich die Stabilität des Systems ableiten. Gibt es Pole in der rechten komplexen Halbebene, so ist das System instabil. Die Wahl der Reglerparameter ist also so zu wählen, dass es solche Pole nicht gibt.

Haben alle Pole der Übertragungsfunktion negative Realteile, so ist das System asymptotisch stabil, d.h. es schwingt sich auf einen stabilen Zustand ein. Je weiter die Pole der Übertragungsfunktion in der linken Halbebene von der imaginären Achse entfern sind, desto geringer sind die zeitkonstanten und desto höher ist die Dämpfung des Systems.

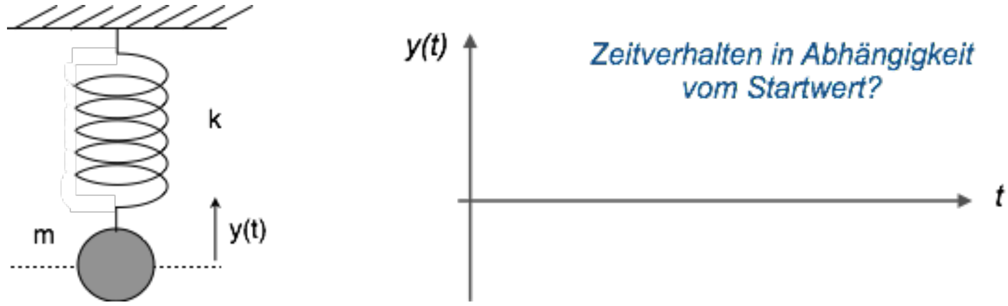
Ist der Realteil eines Poles gleich Null, so ist das System ungedämpft. Ein Beispiel hierfür wäre ein idealer Schwingkreis (mit einem konjugiert komplexen Polpaar auf der imaginären Achse). Ein solches System bezeichnet man als grenzstabil. Pole mit positivem Realteil bedeuten, dass das System sich aufschwingt, also instabil ist. Zu den instabilen Systemen rechnet man auch die grenzstabilen Systeme.

3. Übungen

3.1. Mechanisches System

In der Regelungstechnik interessiert vor allem das zeitliche Verhalten eines Systems: Was geschieht, wenn man die Eingangsgröße des Systems ändert? Wie aus der Physik bekannt, lassen sich Systeme sich durch Gleichungen bzw. Differenzialgleichungen beschreiben.

Folgende Abbildung zeigt ein mechanisches Pendel, bestehend aus einer Masse m und einer Feder mit der Federkonstanten k. Der Bezugspunkt sei dabei so gewählt, dass y = 0 den Ruhepunkt des Pendels beschreibt.



Frage 3.1.1: Beschreiben Sie das zeitliche Verhalten des Systems durch eine Gleichung. Hinweis: Gehen Sie davon aus, dass (1) die Kraft F die Masse m beschleunigt (F = m a), (2) dass diese Kraft um die Federkonstante k proportional zur Auslenkung y der Masse ist (F = k y).

Lösung: Aus der Summe der Kräfte (Maschenregel der Mechanik) folgt

$$m\,a + k\,y = 0 \qquad (3.1.1)$$

Die Beschleunigung a(t) entspricht hierbei der 2. Ableitung der Auslenkung y(t):

$$a(t) = \ddot{y}(t) \qquad (3.1.2)$$

Somit erhält man die Differenzialgleichung

$$\ddot{y}(t) + k/m\; y(t) = 0 \qquad (3.1.3)$$

Frage 3.1.2: Welche Lösungen hat die in 3.1.1 erstellte Differenzialgleichung? Beschreiben Sie das zeitliche Verhalten in Abhängigkeit der initialen Auslenkung $y(0) = y_0$ (Startwert).

Lösung: Man kann zeigen, dass Differenzialgleichungen der Form

$$\ddot{y}(t) + \omega_0^2\, y(t) = 0 \qquad (3.1.4)$$

harmonische Schwingungen der Form

$$y(t) = \hat{y}\,\sin(\omega_0 t + \phi_0) \qquad (3.1.5)$$

als Lösung haben. Zweimaliges ableiten von (3.1.5) und einsetzen in (3.1.3) zeigt die Gültigkeit des Lösungsansatzes. Die Größe ω_0 beschreibt die Eigenschwingung des Systems.

3.2. Energiespeicher im mechanischen System

Die Energie des ungedämpft schwingenden Systems ist konstant. Die Energie ergibt sich aus der Summe der kinetischen Energie und potentiellen Energie. In den Nulldurchgängen ist das Pendel am schnellsten, hat also die größte kinetische Energie. Da die Nulldurchgänge dem Ruhepunkt der Feder entsprechen, ist hier die potentielle Energie gleich Null. An den Umkehrpunkten ist die

Auslenkung am größten und somit die potentielle Energie maximal. Da an den Umkehrpunkten die Geschwindigkeit des Pendels Null ist, ist hier die kinetische Energie gleich Null.

Frage 3.2.1: Berechnen Sie die kinetische Energie E_k des mechanischen Systems aus Aufgabe 3.1.

Lösung: $E_k = 1/2\ k\ y(t)^2$

Frage 3.2.2: Berechnen Sie die kinetische Energie E_p des mechanischen Systems aus Aufgabe 3.1.

Lösung: $E_p = 1/2\ m\ v^2 = 1/2\ m\ \dot{y}(t)^2$

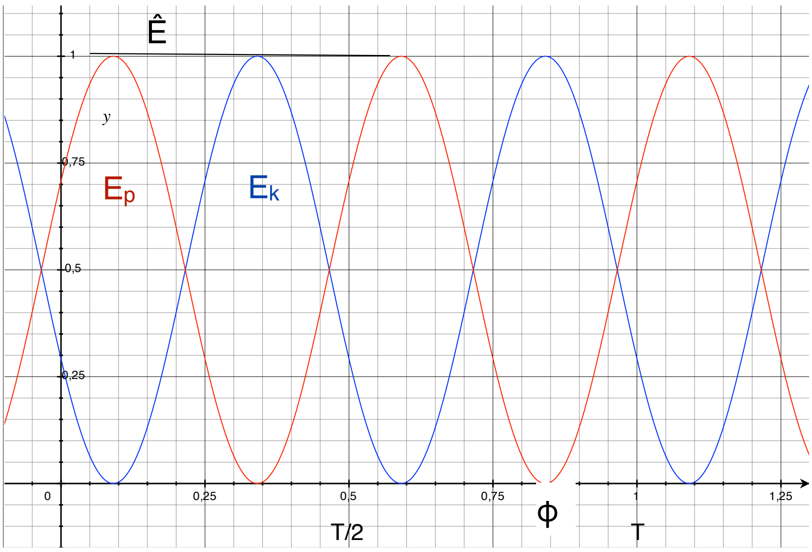
Frage 3.2.3: Welcher Zusammenhang ergibt sich für die Summe der Energien $E_k + E_p$?

Lösung: $E = E_k + E_p = 1/2\ k\ y(t)^2 + 1/2\ m\ \dot{y}(t)^2$

Frage 3.2.4: Stellen Sie die Summe der Energien grafisch dar, indem Sie die Lösung der Differenzialgleichung in die Gleichungen für die kinetische und potentielle Energie einsetzen.

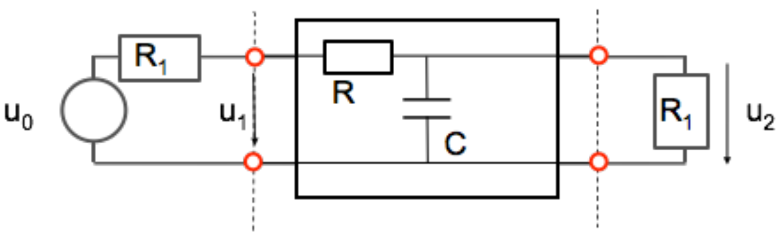
Lösung: $E = 1/2\ k\hat{y}^2 \sin^2(\omega_0 t+\phi_0)+1/2\ m\hat{y}^2\ \omega^2 \sin^2(\omega_0 t+\phi_0+\pi/2)$

Einsetzen von $m\ \omega^2 = k$ ergibt für beide Anteile der Energie gleiche Amplituden der Größe $\hat{E} = 1/2\ k\ \hat{y}^2$. Für den Verlauf beider Energieanteile ergibt sich das folgende Diagramm.



3.3. RC-Glied

Ein RC-Glied ist zwischen den Eingang u_1 und den Ausgang u_2 geschaltet.



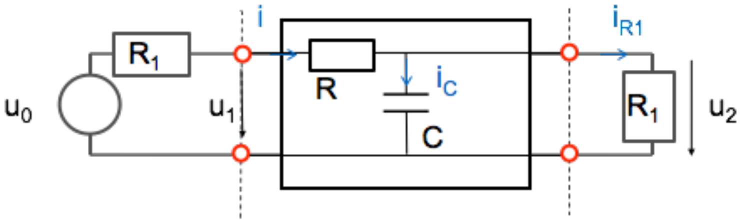
Frage 3.3.1: Ergänzen Sie die Ströme im Schaltbild. Erstellen Sie die Differenzialgleichung für $u_2(t)$ in Abhängigkeit von $u_1(t)$. Wie lautet die Differenzialgleichung für den Fall, dass $R_1 \gg R$ ist (d.h. $i_{R1}(t)$ vernachlässigt werden kann)?

Lösung: Dem Schaltbild entnimmt man folgende Gleichungen:

$$u_2(t) = u_1(t) - R\, i(t) \qquad (1)$$

$$i(t) = i_{R1}(t) + i_C(t) \qquad (2)$$

Die Ströme errechnen sich zu: $i_{R1}(t)=1/R_1\, u_2(t)$, sowie $i_C(t) = C\, du_2(t)/dt$.



Einsetzen und Umformen nach $u_2(t)$ ergibt die Differenzialgleichung:

$$u_2(t) = u_1(t) - R/R_1\, u_2(t) - RC\, du_2(t)/dt$$

$$RC\, du_2(t)/dt + u_2(t)\,(1 + R/R_1) = u_1(t)$$

Für $R_1 \gg R$ vereinfacht sich die Gleichung zu:

$$RC\, du_2(t)/dt + u_2(t) = u_1(t) \qquad (3.3.1)$$

Frage 3.3.2: Nennen Sie eine analytische Lösung der Differenzialgleichung. Zur Vereinfachung sei angenommen, dass $R_1 \gg R$ ist (d.h. $i_{R1}(t)$ vernachlässigt werden kann).

Lösung: Eine Differenzialgleichung erster Ordnung der Form

$$\dot{y}(t) + a\, y(t) = 0 \qquad (3.3.2)$$

besitzen Lösungen der Form

$$y(t) = y(0)\, e^{-at} \qquad (3.3.3)$$

wobei $y(0) = y_0$ den Startwert beschreibt. Die Lösung beschreibt somit im Beispiel den Abklingvorgang bei aufgeladenem Kondensator. Der Nachweis lässt sich durch ableiten und einsetzen erbringen. Gleichung (3.3.2) beschreibt den Fall ohne äußere Anregung des Systems, in diesem Fall also ohne die Eingangsspannung $u_1(t)$.

Mit Berücksichtigung des Eingangssignals besitzt die Differenzialgleichung

$$\dot{y}(t) + a\, y(t) = x(t) \qquad (3.3.4)$$

Lösungen der Form

$$y(t) = y(0)\, e^{-at} + \int e^{-a(t-\tau)}\, x(\tau)\, d\tau \qquad \text{mit } \tau = 0 \text{ bis } t \qquad (3.3.5)$$

Zur sogenannten homogenen Lösung (3.3.3) kommt nun in (3.3.5) ein sogenanntes Faltungsintegral mit der Eingangsgröße x(t) dazu (die sogenannte partikuläre Lösung). Letzterer Ausdruck beschreibt das durch die Wirkung der Eingangsgröße erzwungene Verhalten des Systems.

3.4. Numerische Lösung für das RC-Glied

Führt man die Differenzialgleichung in den zeitdiskreten Fall über, so erhält man eine algebraische Gleichung (Differenzengleichung). Diese Gleichung lässt sich numerisch mit geringem Aufwand lösen. Für den zeitdiskreten Fall wählt man: t = k Δt, wobei Δt das Abtastintervall bezeichnet, und k ein Index für die Abtastwerte.

Frage 3.4.1: Diskretisieren Sie die Differenzialgleichung aus Aufgabe 3.3.1.

Lösung: Mit t = k Δt erhält man:

$$y(t) \quad \square \quad y(k\,\Delta t) = y(k).$$

Die Schreibweise wird so vereinfacht, dass man die konstanten Abtastintervalle Δt nicht explizit mitführt. Für die Ableitung $\dot{y}(t)$ erhält man somit

$$\dot{y}(t) = dy(t)/dt \quad \square \quad (y(k) - y(k-1)) / \Delta t.$$

Für die Gleichung (3.3.4) ergibt sich:

$$\dot{y}(t) + a\, y(t) = x(t) \qquad (3.3.4)$$

$$(y(k) - y((k-1)) / \Delta t + a\, y(t) = x(k) \qquad (3.4.1)$$

Durch Umformen nach y(k) erhält man die rekursive Gleichung

$$y(k) = y((k-1) / (1 + a\,\Delta t) \; + \; \Delta t\, x(k) / (1 + a\,\Delta t) \qquad (3.4.2)$$

Diese Gleichung hat die Form

$$y(k) = a_1\, y(k-1) \; + \; b\, x(k) \qquad (3.4.3)$$

Frage 3.4.2: Beispiel zur numerischen Lösung. Es seien R = 100Ω und C = 1 mF. Lösen Sie die Differenzengleichung aus Frage 3.3.1 numerisch, z.B. mit Hilfe Ihres Programms zu Tabellenkalkulation. Hinweis: Wählen Sie als Abtastintervall Δt = 0,01 s. Geben Sie als Eingangssignal eine Sprungfunktion bzw. einen Einheitsimpuls vor. Stellen Sie das Zeitverhalten als Diagramm dar.

Lösung: Ausgangspunkt ist

$$RC\, du_2(t)/dt + u_2(t) = u_1(t) \qquad (3.3.1)$$

Durch Diskretisieren von $du_2(t)/dt$ □ $(u_2(k) - u_2(k-1)) / \Delta t$ und Einsetzen in (3.3.1) erhält man

$$RC\, (u_2(k) - u_2(k-1)) / \Delta t \; + u_2(k) = u_1(k) \qquad (3.4.4)$$

Durch Umformen nach $u_2(k)$ erhält man

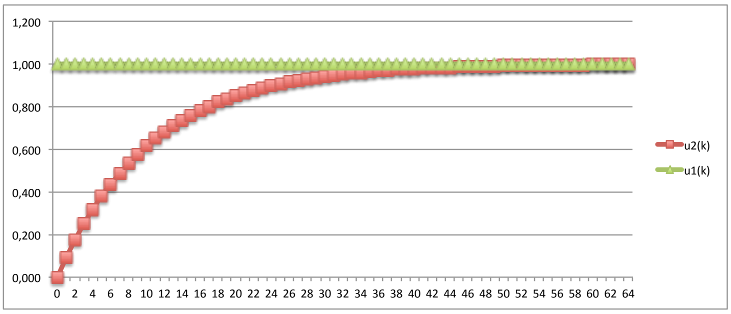
$$u_2(k) = a_1\, u_2(k-1) \; + \; b\, u_1(k) \qquad (3.4.5)$$

mit a_1= RC/Δt / (1+ RC/Δt) und b= 1/ (1+ RC/Δt). Beispiel zur Berechnung:

R=	100,000	V/A
C=	0,001	As(V
Δt=	0,010	s

u2(k) = a1 u2(k-1) + b u1(k)	
RC/Δt =	10
b= 1/ (1+ RC/Δt) =	0,09091
a1= RC/Δt / (1+ RC/Δt) =RC/Δt *b =	0,90909

Index k	u2(k)	u1(k)	
0	0,000	1	Startwert
1	0,091	1	
2	0,174	1	
3	0,249	1	
4	0,317	1	
5	0,379	1	
6	0,436	1	
7	0,487	1	
8	0,533	1	
9	0,576	1	
10	0,614	1	
11	0,650	1	
12	0,681	1	
13	0,710	1	
14	0,737	1	
15	0,761	1	
16	0,782	1	
17	0,802	1	
18	0,820	1	



3.5. Energiespeicher im RC-Glied

Die Fähigkeit, auf eine äußere Anregung verzögert zu reagieren, bzw. aus einem Startzustand in eine Ruhezustand überzugehen, deutet auf einen Energiespeicher im RC-Glied hin.

Frage 3.5.1: Wo wird im RC-Glied Energie gespeichert?

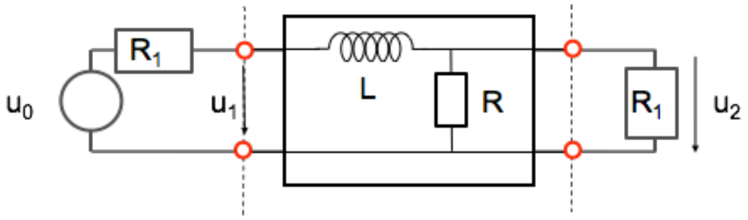
Frage 3.5.2: Wie lässt sich diese Energie berechnen?

Frage 3.5.3: Wovon hängt die Speicherkapazität ab?

Frage 3.5.4: Berechnen Sie den zeitlichen Verlauf der gespeicherten Energie zu den Randbedingungen aus Aufgabe 3.4.2.

3.6. RL-Glied

Ein RL-Glied ist zwischen den Eingang u_1 und den Ausgang u_2 geschaltet.



Frage 3.6.1: Ergänzen Sie die Ströme im Schaltbild. Erstellen Sie die Differenzialgleichung für $u_2(t)$ in Abhängigkeit von $u_1(t)$. Wie lautet die Differenzialgleichung für den Fall, dass $R_1 \gg R$ ist (d.h. $i_{R1}(t)$ vernachlässigt werden kann)?

Frage 3.6.2: Nennen Sie eine analytische Lösung der Differenzialgleichung. Zur Vereinfachung sei angenommen, dass $R_1 \gg R$ ist (d.h. $i_{R1}(t)$ vernachlässigt werden kann).

3.7. Numerische Lösung für das RL-Glied

Führt man die Differenzialgleichung in den zeitdiskreten Fall über, so erhält man eine algebraische Gleichung (Differenzengleichung). Diese Gleichung lässt sich numerisch mit geringem Aufwand lösen. Für den zeitdiskreten Fall wählt man: $t = k\,\Delta t$, wobei Δt das Abtastintervall bezeichnet, und k ein Index für die Abtastwerte.

Frage 3.7.1: Diskretisieren Sie die Differenzialgleichung aus Aufgabe 3.6.1.

Frage 3.7.2: Beispiel zur numerischen Lösung. Es seien $R = 10\ \Omega$ und $L = 1$ H. Lösen Sie die Differenzengleichung aus Frage 3.3.1 numerisch, z.B. mit Hilfe Ihres Programms zu Tabellenkalkulation. Hinweis: Wählen Sie als Abtastintervall $\Delta t = 0{,}01$ s. Geben Sie als Eingangssignal eine Sprungfunktion bzw. einen Einheitsimpuls vor. Stellen Sie das Zeitverhalten als Diagramm dar.

3.8. Energiespeicher im RL-Glied

Die Fähigkeit, auf eine äußere Anregung verzögert zu reagieren, bzw. aus einem Startzustand in eine Ruhezustand überzugehen, deutet auf einen Energiespeicher im RL-Glied hin.

Frage 3.8.1: Wo wird im RL-Glied Energie gespeichert?

Frage 3.8.2: Wie lässt sich diese Energie berechnen?

Frage 3.8.3: Wovon hängt die Speicherkapazität ab?

Frage 3.8.4: Berechnen Sie den zeitlichen Verlauf der gespeicherten Energie zu den Randbedingungen aus Aufgabe 3.7.2.

3.9. Numerische Lösung für das mechanische System

Die Differenzialgleichung für das mechanische System aus Aufgabe 3.1 soll in eine Differenzengleichung umgewandelt werden, die sich dann numerisch lösen lässt.

Frage 3.9.1: Numerische Lösung der Differenzialgleichung. Führen Sie die Differenzialgleichung aus Aufgabe 3.1.1 in den zeitdiskreten Fall über, so dass sich eine algebraische Gleichung (Differenzengleichung) ergibt, die sich numerisch mit geringem Aufwand lösen lässt. Hinweis: Die 2. Ableitung lässt sich nicht unmittelbar als Differenzial linearisieren, jedoch mit Hilfe der Darstellung als Gleichungssystem 1. Ordnung.

Lösung: Ausgangspunkt ist

$$\ddot{y}(t) + k/m\ y(t) = 0 \qquad (3.1.3)$$

Durch Einführung der Hilfsvariablen $x_1(t) = y(t)$ und $x_2(t) = \dot{y}(t)$ erhält man das Gleichungssystem

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \qquad (1)$$

$$\dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t) = -\ k/m\ x_1(t) \qquad (2)$$

Dieses Differenzialgleichungssystem 1. Ordnung lässt sich in ein Differenzengleichungssystem überführen:

$$(x_1(k) - x_1(k-1)) / \Delta t = x_2(k) \qquad (1)$$

$$(x_2(k) - x_2(k-1)) / \Delta t = -\ k/m\ x_1(k) \qquad (2)$$

Umformen von (1) nach $x_1(k)$ bzw. (2) nach $x_2(k)$ und einsetzen von (2) in (1) ergibt:

$$x_1(k) = (x_1(k-1) + \Delta t\ x_2(k-1)) / (1 + k\ \Delta t^2/m) \qquad (1)$$

$$x_2(k) = x_2(k-1) - k\Delta t/m\ x_1(k) \qquad (2)$$

Frage 3.9.2: Beispiel zur numerischen Lösung. Die Masse sei m = 0,1 kg, die Federkonstante k = 0,1 N/m. Lösen Sie das Differenzengleichungssystem aus Frage 3.9.1 numerisch, z.B. mit Hilfe Ihres Programms zu Tabellenkalkulation. Hinweis: Wählen Sie als Abtastintervall Δt = 0,1 s. Wählen Sie einen geeigneten Startwert $y(0)=y_0$.

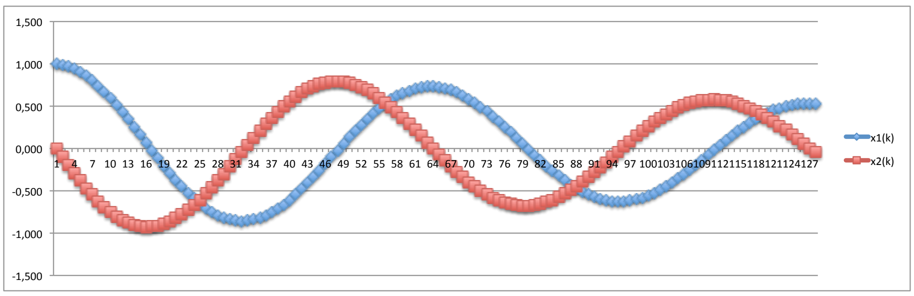
Lösung: Lösungsweg wie bei 3.4.2, Ergebnis:

k=	0,100	N/m
m=	0,100	kg
Δt=	0,100	s

x1(k) = (x1(k-1) + Δt x2(k-1)) / (1 + k Δt2/m)
x2(k) = x2(k-1) - kΔt/m x1(k)

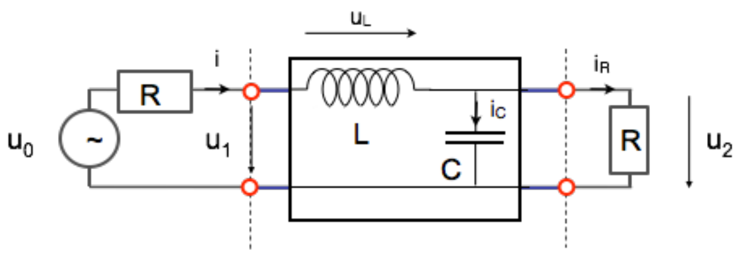
kΔt/m =	0,100000
1 + k Δt2/m=	1,010000

Index k	x1(k)	x2(k)	
0	1,000	0	Startwert
1	0,990	-0,099	
2	0,970	-0,196	
3	0,941	-0,290	
4	0,903	-0,381	
5	0,857	-0,466	
6	0,802	-0,546	
7	0,740	-0,620	
8	0,671	-0,688	
9	0,597	-0,747	
10	0,517	-0,799	
11	0,433	-0,842	
12	0,345	-0,877	
13	0,255	-0,902	
14	0,163	-0,918	
15	0,070	-0,925	
16	-0,022	-0,923	
17	-0,113	-0,912	



3.10. RLC-Glied

Ein RLC-Glied ist zwischen den Eingang u_1 und den Ausgang u_2 geschaltet.



Frage 3.10.1: Erstellen Sie die Differenzialgleichung für $u_2(t)$ in Abhängigkeit von $u_1(t)$.

Lösung: $u_2(t) = u_1(t) - LC\, d^2u_2(t)/dt^2 - (L/R)\, du_2(t)/dt$ (3.10.1)

in allgemeiner Form:

$$\ddot{y}(t) + 2\delta\, \dot{y}(t) + \omega_0^2\, y(t) = x(t) \qquad (3.10.2)$$

wobei $2\delta = 1/RC$, $\omega_0^2 = 1/LC$, $y(t) = u_2(t)$ und $x(t)= u_1(t)/LC$.

Frage 3.10.2: Nennen Sie eine analytische Lösung der Differenzialgleichung. Skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf der Lösung. Wie lautet die Lösung unter der Annahme, dass $R \to \infty$?

Frage 3.10.3: Diskretisieren Sie die Differenzialgleichung aus Aufgabe 3.10.1. Hinweis: Wandeln Sie die Differenzialgleichung vorher in ein Differenzialgleichungssystem 1. Ordnung um.

Frage 3.10.4: Numerischen Lösung. Es seien R = 100 Ω und L = 0,1 H und C = 1 mF. Lösen Sie die Differenzengleichung aus Frage 3.3.1 numerisch, z.B. mit Hilfe Ihres Programms zu Tabellenkalkulation. Hinweis: Wählen Sie als Abtastintervall Δt in geeigneter Weise (in Abhängigkeit von der Periodendauer der Resonanzfrequenz). Stellen Sie folgende zeitlichen Abläufe in einem Diagramm dar: (1) die Eigenschwingung des Systems dar (ohne Eingangssignal, jedoch mit Startwert), (2) die Reaktion auf eine Sprungfunktion als Eingangssignal, (3) die Reaktion auf einen Einheitsimpuls als Eingangssignal. Untersuchen Sie den Einfluss der Systemparameter (R, L, C) auf das Zeitverhalten.

Frage 3.10.5: Wo wird im RLC-Glied Energie gespeichert? Wann sind die Energiespeicher jeweils maximal gefüllt? Wo wird Energie verlustbehaftet gewandelt?

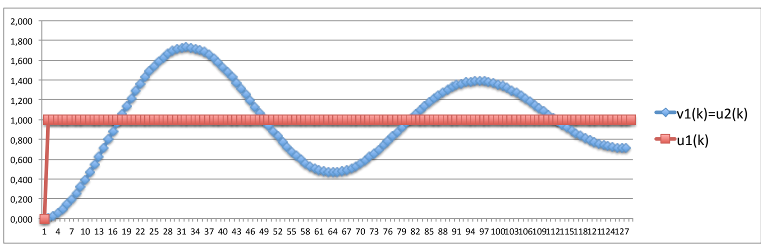
Frage 3.10.6: Berechnen Sie die Energien E_C und E_L im RLC-Glied, sowie die Summe dieser Energien. Stellen Sie deren zeitlichen Verlauf dar.

Beispiel:

R=	100,000	V/A	ÿ(t) + 2δ ẏ(t) + ω02 y(t) = x(t)	2δ=1/RC=	10	1/s
L=	0,100	Vs/A	v1(t)=y(t); v2(t)= ẏ(t)	ω02=1/LC=	10000	1/s2
C=	0,001	As/V	v1'(t) = v2(t)	ω0=	100	1/s
Δt=	0,001	s	v2'(t)=ÿ(t)= - 2δ v2(t)) - ω02 v1(t) + x(t)	α=	0,98039216	

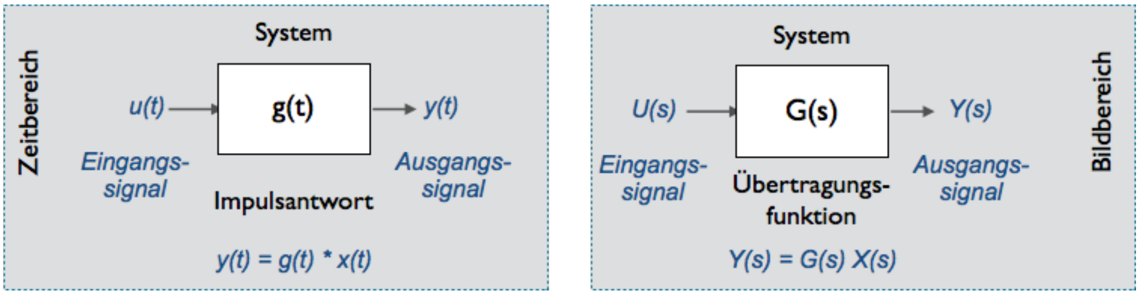
Diskretisieren: v1'(t) ->(v1(k)-v1(k-1))/Δt; v2'(t) ->(v2(k)-v2(k-1))/Δt;
umformen und einsetzen von (1) in (2): Reihenfolge der Berechnu
v1(k)=v1(k-1) + Δt v2(k) [2]
v2(k)= α * (v2(k-1) - ω02 Δt v1(k-1) + Δt x(k)) mit α = 1 / (1+ 2δ Δt + ω02 Δt2) [1]

Index k	v1(k)=u2(k)	v2(k)		u1(k)	x(k)=u1(k)/LC
0	0,000	0	Startwert	1,000000	10000,000000
1	0,010	9,804		1,000000	10000,000000
2	0,029	19,319		1,000000	10000,000000
3	0,058	28,459		1,000000	10000,000000
4	0,095	37,140		1,000000	10000,000000
5	0,140	45,287		1,000000	10000,000000
6	0,193	52,831		1,000000	10000,000000
7	0,253	59,708		1,000000	10000,000000
8	0,318	65,865		1,000000	10000,000000
9	0,390	71,256		1,000000	10000,000000
10	0,466	75,843		1,000000	10000,000000
11	0,545	79,595		1,000000	10000,000000
12	0,628	82,495		1,000000	10000,000000
13	0,712	84,528		1,000000	10000,000000
14	0,798	85,693		1,000000	10000,000000
15	0,884	85,995		1,000000	10000,000000



3.11. Systemmodell

Unter einem System versteht man Art der Betrachtung, bei der das Verhalten einer technischen Anordnung durch der Ausgangssignals als Reaktion auf ein Eingangssignal beschrieben wird. Diese Betrachtung gilt sowohl messtechnisch als auch rechnerisch im Sinne eines Systemmodells. Das System wird hierbei beispielsweise durch seine Impulsantwort beschreiben, wie in der folgenden Abbildung links dargestellt.



Darstellung im Zeitbereich: Diese Darstellung entspricht der Beschreibung des Systems durch eine Differenzialgleichung: das Ausgangssignal ergibt sich als Reaktion auf das Eingangssignal zusammen mit den Eigenschaften des Systems. Die Lösung der Differenzialgleichung würde man als Summe der homogenen Lösung der Differenzialgleichung (Eigenschwingungen des Systems in Abhängigkeit vom Startzustand) und der partikulären Lösung (erzwungen Reaktion des Systems auf das Eingangssignal) beschreiben. Das Einschwingen des Systems aus einem Anfangszustand in seinen Ruhezustand (homogene Lösung) ist in der Regelungstechnik weniger von Interesse. In der Regel beschränkt man sich auf das Faltungsintegral (d.h. die partikuläre Lösung) die das Systemverhalten im Abhängigkeit des Eingangssignals beschreibt:

$$y(t) = \int g(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau \qquad \text{mit } \tau = 0 \text{ bis } t \qquad (3.11.1)$$

Darstellung im Bildbereich: Durch Laplace-Transformation der Differenzialgleichung erhält man eine Systembeschreibung im Bildbereich. Hierbei entspricht die Bildfunktion des Eingangssignals Y(s) dem Produkt aus der Übertragungsfunktion G(s) des Systems und der Bildfunktion des Eingangssignals X(s). Die Übertragungsfunktion ist die Laplace-Transformierte der Impulsantwort.

$$Y(s) = G(s)\, X(s) \qquad (3.11.2)$$

Frage 3.11.1: Berechnen Sie aus Aufgabe 3.3 die Übertragungsfunktion des RC-Gliedes.

Lösung: Ausgangspunkt ist die Differenzialgleichung

$$RC\, du_2(t)/dt + u_2(t) = u_1(t) \qquad (3.3.1)$$

Durch Transformation in den Bildbereich erhält man

$$RC\, s\, U_2(s) + U_2(s) = U_1(s) \qquad (3.11.3)$$

Die Ableitung wird bei der Transformation durch Multiplikation mit s wiedergegeben. Durch Umformen nach $U_2(s)$ erhält man:

$$U_2(s)\, (RC\, s + 1) = U_1(s) \qquad (3.11.4)$$

$$U_2(s) = (1 / (RC\, s + 1))\; U_1(s) = G(s)\, U_1(s) \qquad (3.11.5)$$

Die Übertragungsfunktion ist also G(s) = (1 / (RC s + 1)).

Frage 3.11.2: Berechnen Sie aus Aufgabe 3.6 die Übertragungsfunktion des RL-Gliedes.

Frage 3.11.3: Verallgemeinern Sie die Übertragungsfunktionen für das RC-Glied und für das und RL-Glied als Systeme 1. Ordnung. Verwenden Sie hierzu die Differenzialgleichung in der normierten Form $\dot{y}(t) + a\, y(t) = x(t)$.

Frage 3.11.4: Berechnen Sie aus Aufgabe 3.10 die Übertragungsfunktion des RLC-Gliedes. Verallgemeinern Sie die Übertragungsfunktion für Systeme 2. Ordnung. Verwenden Sie hierzu die Differenzialgleichung in der normierten Form $\ddot{y}(t) + 2\delta\, \dot{y}(t) + \omega_0^2\, y(t) = x(t)$.

3.12. Ermittlung der Impulsantwort aus der Übertragungsfunktion

Mit Hilfe einer Transformationstabelle bzw. Korrespondenztabelle lässt sich aus einer gegebenen Übertragungsfunktion G(s) die Impulsantwort g(t) ermitteln. Die Laplace-Transformierten einiger ausgewählter Funktionen sind in Anhang B zu finden.

Die Bildfunktion $F(s) = 1/(s+a)$ korrespondiert beispielsweise mit der Zeitfunktion $f(t) = e^{-at}$ für $t \geq 0$ (0 sonst). Somit besitzt ein System mit der Übertragungsfunktion $G(s) = 1/(s+a)$ die Impulsantwort $g(t) = e^{-at}$ für $t \geq 0$.

Frage 3.12.1: Ermitteln Sie aus der Übertragungsfunktion des RC-Glieds (bzw. RL-Glieds) die Impulsantwort mit Hilfe der Transformationstabelle. Bestimmen Sie die Zeitkonstante τ des RC-Glieds (bzw. RL-Glieds).

Frage 3.12.2: Den Bildfunktionen aus Anhang B entnimmt man, dass die Impulsfunktion die Bildfunktion 1 besitzt, die Sprungfunktion die Bildfunktion 1/s, sowie die Rampenfunktion die Bildfunktion $1/s^2$. Die Bildfunktionen gehen also durch sukzessive Multiplikation mit dem Faktor 1/s auseinander hervor. Was bedeutet dieser Zusammenhang im Zeitbereich?

Frage 3.12.3: In umgekehrter Lesart gibt es folgenden Zusammenhang für die Bildfunktionen in Anhang B: aus der Bildfunktion der Rampe erhält man durch Multiplikation mit s die Bildfunktion der Sprungfunktion (die sogenannte Übergangsfunktion), aus dieser durch Multiplikation mit s die Bildfunktion der Impulses (die Impulsantwort). Was bedeutet dieser Zusammenhang im Zeitbereich?

Frage 3.12.4: Ermitteln Sie aus der Übertragungsfunktion des LC-Glieds die Impulsantwort mit Hilfe der Transformationstabelle.

3.13. Faltung

Mit Hilfe der Impulsantwort lässt sich das zeitliche Verhalten eines Systems wie folgt ermitteln:

$$y(t) = \int g(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau \qquad \text{mit } \tau = 0 \text{ bis } t \qquad (3.11.1)$$

Das Ausgangssignal y(t) ergibt sich aus der Faltung der Impulsantwort g(t) mit dem Eingangssignal x(t). Das Faltungsintegral lässt sich im zeitdiskreten Fall numerisch sehr einfach lösen:

$$y(k) = \sum g(i) \cdot x(k-i) \qquad \text{mit } i = 0 \text{ bis } k \qquad (3.11.2)$$

Frage 3.13.1: Berechnen Sie die Systemantwort y(k) des RC-Glieds (bzw. RLC-Glieds) mit Hilfe der Faltung. Verwenden Sie hierzu unterschiedliche Eingangssignale, z.B. Einheitsimpuls, Sprungfunktion, bzw. ein harmonisches Signal (Sinus oder Cosinus). Hinweis: Wählen Sie die Systemparameter (hier R) bzw. das Abtastintervall Δt so, dass die Impulsantwort nach ca. 10 Stützstellen abgeklungen ist. Reduzieren Sie die Faltungssumme auf diese 10 Stützstellen. Verwenden Sie hierzu Ihre Tabellenkalkulation.

Frage 3.13.2: Interpretieren Sie den Faltungsalgorithmus gemäß Gleichung (3.11.2): Wie werden die Stützstellen der Impulsantwort g(i) im Zusammenhang mit den Stützstellen des Eingangssignals x(k-i) verwendet? Analysieren Sie die Funktionsweise Ihrer Implementierung in der Tabellenkalkulation.

3.14. Polstellen der Übertragungsfunktionen

Für ein System 2. Ordnung sei folgende Übertragungsfunktion gegeben:

$$G(s) = b_0 / (s^2 + a_1\, s + a_0) \qquad (3.14.1)$$

Damit die Korrespondenztabelle verwendet werden kann, um die Impulsantwort zu ermitteln, ist zu klären, wie die Polstellen der Übertragungsfunktion beschaffen sind. Unter den Polstellen versteht man hierbei die Nullstellen des Nennerpolynoms, d.h. die Werte von s, für die gilt:

$$s^2 + a_1\, s + a_0 = 0 \qquad (3.14.2)$$

Frage 3.14.1: Beispiel: $G(s) = 2 / (s^2 + 3s + 2)$. Ermitteln Sie die Lage der Polstellen.

Frage 3.14.2: Beispiel: $G(s) = 4 / (s^2 + 4)$. Ermitteln Sie die Lage der Polstellen.

Frage 3.14.3: Welche Bedeutung haben die Polstellen in Bezug auf die Ermittlung der Impulsantwort aus der Übertragungsfunktion?

Frage 3.14.4: Welche Möglichkeiten für die Lage der Polstellen gibt es für ein System 2. Ordnung?

3.15. Quadratische Gleichung

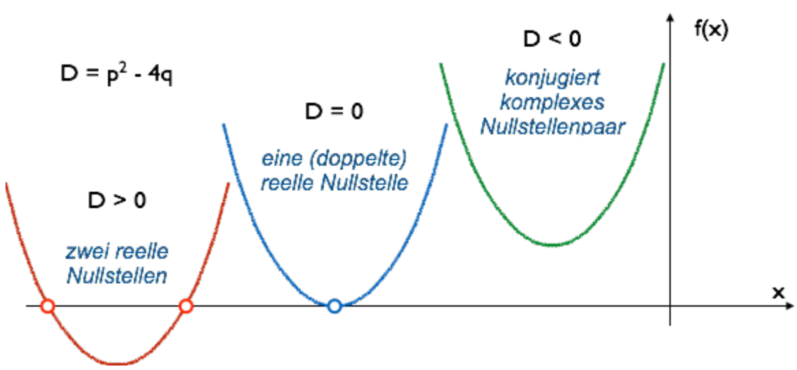
Für Systeme 2. Ordnung lassen sich die Polstellen der Übertragungsfunktion als Nullstellen des Nennerpolynoms durch Lösen einer quadratischen Gleichung ermitteln. Das Nennerpolynom sei hierbei in folgender Form gegeben:

$$s^2 + a_1\, s + a_0 = 0 \qquad (3.14.2)$$

Diese Darstellung entspricht der aus der Schulmathematik bekannten Form

$$x^2 + p\, x + q = 0 \qquad (3.15.1)$$

Die Nullstellen beschreiben somit den Schnittpunkt einer Parabel mit der y-Achse. Hierfür gibt es die in folgender Abbildung gezeigten Möglichkeiten:



Hierbei bezeichnet D die Diskriminante $D = p^2 - 4q$. Die Lage der Nullstellen ermittelt man aus $x_{1,2} = -p/2 \pm \sqrt{(p/2)^2 - q}$. Ist die Diskriminante kleiner Null, so ermittelt man die Nullstellen aus $x_{1,2} = -p/2 \pm j\sqrt{q - (p/2)^2}$.

Frage 3.15.1: Gegeben Sei die Übertragungsfunktion $G(s) = 2 / (s^2 + 2s + 2)$. Ermitteln Sie die Polstellen. Berechnen Sie die Impulsantwort.

Frage 3.15.2: Gegeben Sei die Übertragungsfunktion $G(s) = 2 / (s^2 + s - 2)$. Ermitteln Sie die Polstellen. Berechnen Sie die Impulsantwort. Ist das System stabil?

Frage 3.15.3: Gegeben Sei die Übertragungsfunktion $G(s) = 2 / (s^2 - 2s + 2)$. Ermitteln Sie die Polstellen. Berechnen Sie die Impulsantwort. Ist das System stabil?

Frage 3.15.4: Gegeben Sei die Übertragungsfunktion $G(s) = 1 / s^3 + 3s^2 + 3s$. Ermitteln Sie die Polstellen.

3.16. Partialbruchzerlegung

Zur Berechnung der Nullstellen höherwertiger Nennerpolynome (über die 2. Ordnung hinaus) lässt sich eine gegebene Übertragungsfunktion mit Hilfe der Partialbruchzerlegung in eine geeignete Form bringen. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra besitzt jedes Polynom mit reellen Koeffizienten mindestens eine komplexe Nullstelle. Diese Nullstellen können reell bzw. konjugiert komplex sein. Im Umkehrschluss folgt also, dass sich jedes Polynom mit reellen Koeffizienten in reelle Polynomfaktoren erster bzw. zweiter Ordnung zerlegen lässt.

In der Praxis der Regelungstechnik bedeutet dies, dass sich eine Übertragungsfunktion

$$G(s) = Z(s) / N(s) = Z(s) / (s^n + a_{n-1} s^{n-1} + ... + a_2 s^2 + a_1 s + a_0) \qquad (3.16.1)$$

umformen lässt in die Form.:

$$G(s) = Z(s) / N(s) = Z(s) / ((s - p_1) (s - p_2) ... (s - p_{n-1}) (s - p_n)) =$$

$$= K_1/(s - p_1) + K_2/(s - p_2) + ... + K_{n-1}/(s - p_{n-1}) + K_n/(s - p_n)$$

Hierbei bezeichnen $Z(s)$ das Zählerpolynom und $N(s)$ das Nennerpolynom der Übertragungsfunkion. Voraussetzung für die Zerlegung in Partialbrüche ist, dass der Grad n des Nenners größer als der Grad m des Zählers ist. Die Polstellen sind mit p_i bezeichnet.

Frage 3.16.1: Gegeben sei die Übertragungsfunktion $G(s) = 2/(s+1)(s+2)$. Führen Sie diese über in die Form $G(s) = K_1/(s+1) + K_2/(s+2)$. Ermitteln Sie die Impulsantwort $g(t)$ des Systems.

Lösung: Durch Erweitern der Übertragungsfunktion $G(s)$ mit jeweils einer der Polstellen p_i und Bildung des Grenzwerts $s \rightarrow p_i$ erhält man jeweils einem der Koeffizienten K_i:

$p_1 = -1$: $(s+1)\, G(s) = 2 / (s+2) = K_1 + (s+1) K_2 / (s+2)$

mit $s \rightarrow -1$ folgt hieraus: $K_1 = 2$

$p_1 = -2$: $(s+2)\, G(s) = 2 / (s+1) = (s+2) K_1 / (s+1) + K_2$

mit $s \rightarrow -2$ folgt hieraus: $K_1 = -2$

Somit ist $G(s) = 2/(s+1) - 2/(s+2)$.

Für $g(t)$ erhält man somit: $g(t) = 2 e^{-t} - 2 e^{-2t}$.

Frage 3.16.2: Gegeben sei die Übertragungsfunktion $G(s) = 2/(s+1)(s+2)(s+3)$. Führen Sie diese über in die Form $G(s)=K_1/(s+1) + K_2/(s+2) + K_3/(s+3)$. Ermitteln Sie die Impulsantwort $g(t)$ des Systems.

Frage 3.16.3: Gegeben sei die Übertragungsfunktion $G(s) = 2 / (s^2 - 3s +2)$ Führen Sie diese über in die Form $G(s)=K_1/(s+p_1) + K_2/(s+p_2)$. Ermitteln Sie die Impulsantwort g(t) des Systems.

Frage 3.16.4: Gegeben sei die Übertragungsfunktion $G(s) = (s+3) / (s^2 -4)$. Ermitteln Sie die Polstellen und stellen Sie die Übertragungsfunktion als Partialbruchzerlegung dar. Berechnen Sie die Impulsantwort. Hinweis: Verwenden Sie zur Berechnung der Pole sowie für die Partialbruchzerlegung MATLAB. Eine Anleitung finden Sie in Anhang D.

3.17. Verhalten im eingeschwungenen Zustand

Die Sprungantwort h(t) des Systems geht aus der Integration der Impulsantwort g(t) über der Zeit hervor. In den Bildbereich übersetzt ergibt sich also die Bildfunktion H(s) der Sprungantwort (die sogenannte Übergangsfunktion) aus der Übertragungsfunktion G(s) durch Multiplikation mit dem Faktor 1/s, es gilt:

$$H(s) = G(s) / s \tag{3.17.1}$$

Dieser Zusammenhang lässt sich nutzen, um aus einer gegebenen Übertragungsfunktion G(s) unmittelbar das Verhalten der Sprungantwort im eingeschwungenen Zustand abzuleiten. Nach den Grenzwertsätzen der Laplace-Funktion gilt (Endwertsatz, siehe Anhang B):

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} F(s)\, s$$

Somit gilt für die Sprungantwort $h(t\to\infty)$ im eingeschwungenen Zustand:

$$h(t\to\infty) = G(s\to 0) \tag{3.17.2}$$

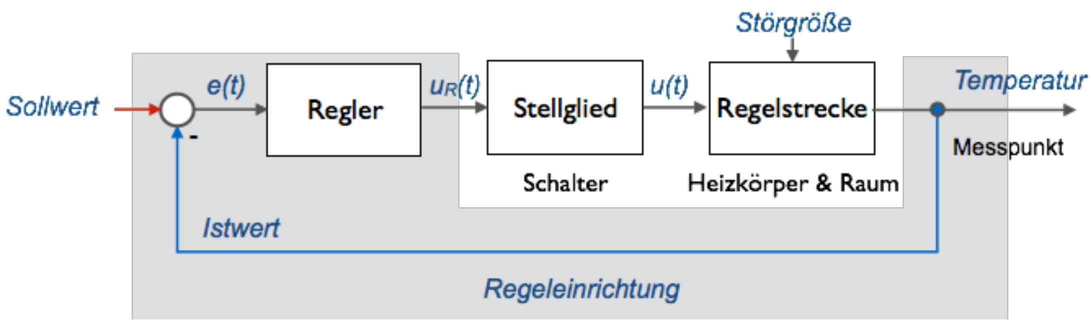
Achtung: Diese Beziehung ist nur gültig für stabile Systeme. Vorher ist also durch Berechnung der Lage der Polstellen die Stabilität des Systems zu prüfen.

Frage 3.17.1: Berechnen Sie den Wert der Sprungantwort im eingeschwungenen Zustand für die Übertragungsfunktionen aus Aufgabe 3.14.

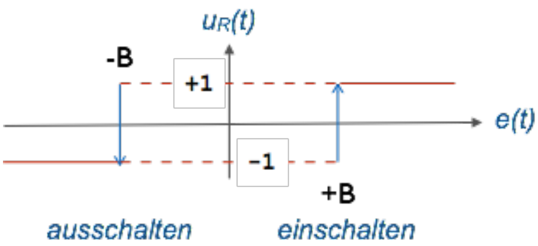
Frage 3.17.2: Berechnen Sie den Wert der Sprungantwort im eingeschwungenen Zustand für die Übertragungsfunktionen aus Aufgabe 3.15.

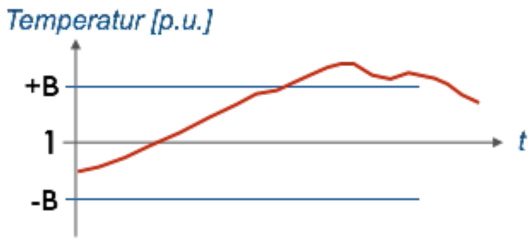
3.18. Zweipunktregler

Die Temperatur in einem Raum soll mit Hilfe eines elektrischen Heizkörpers geregelt werden. Die Regelstrecke bildet der zu beheizende Raum mit dem Heizkörper. Der Heizkörper lässt sich ein-schalten oder abschalten. Als Schalter (Stellglied) wird ein Relais verwendet, das sich vom Regler (Mikrocontroller) bedienen lässt. Folgende Abbildung zeigt den Regelkreis.



Dem Regler stehen als Eingangssignale zur Verfügung: (1) ein per Drehknopf einstellbarer Wert für die gewünschte Raumtemperatur, (2) ein Messwert der aktuellen Raumtemperatur. In der Praxis ist eine solche Regelung direkt am elektrischen Heizkörper angebracht.





Der Regler soll so arbeiten, dass er bei Überschreiten der mit dem Drehknopf eingestellten Temperatur um die Bandbreite B das Heizelement abschaltet ($u_R(t)$ = -1), bei Unterschreiten der eingestellten Temperatur um die Bandbreite B das Heizelement einschaltet ($u_R(t)$ = +1). In der Abbildung oben ist die relative Temperatur T/T_{soll} dargestellt (normiert auf den Nennwert im sogenannten per unit System, p.u.).

Frage 3.18.1: Erläutern Sie das Funktionsprinzip des Reglers mit Hilfe der Regelabweichung e(k).

Frage 3.18.2: Stellen Sie den Regelalgorithmus als Ablaufdiagramm dar (bzw. als Aktivitätsdiagramm).

Frage 3.18.3: Regelstrecke. Bedingt durch das Luftvolumen und die Temperatur der Wände dauert es eine Weile, bis sich die Raumtemperatur erhöht bzw. abkühlt. Als Modell der Regelstrecke sei die Übertragungsfunktion $G_S(s) = 2/(\tau s+1)$ angenommen, mit der Zeitkonstanten τ = 30 Minuten. Als Störgröße werden alle sonstigen Einflüsse auf die Temperatur betrachtet, z.B. zwischenzeitlich geöffnete Fenster oder Türen. Erstellen Sie ein Modell der Regelstrecke in Ihrer Tabellenkalkulation bzw. in MATLAB.

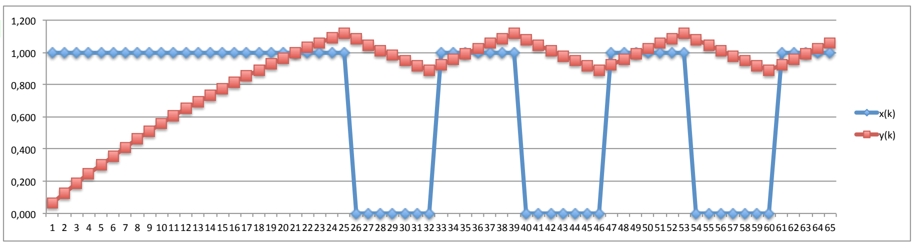
Frage 3.18.4: Simulation der Regelung. Ergänzen Sie Ihre Regelstrecke um den Regler. Simulieren sie die Regelung. Hinweis: verwenden Sie Ihren Algorithmus aus Frage 3.18.2.

Beispiel:

τ=	30	Minuten
Δt=	1	Minute
Δt/τ=	0,033	
B=	0,1	
B+=	1,1	
B-=	0,9	

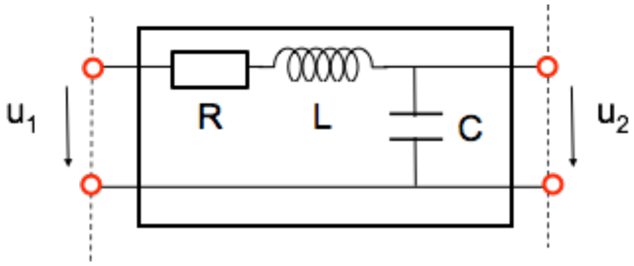
Gs(s)=2/(τs+1)=Y(s)/X(s)
DGL: τ ẏ(t)] + y(t) = 2 x(t)
zeitdiskret: y(k) = α (y(k-1) + 2Δt/τ x(k))
α = 1/ (1 +Δt/τ) = 0,9677

Index k	x(k)	y(k)
-1	0,000	0,000
0	1,000	0,065
1	1,000	0,127
2	1,000	0,187
3	1,000	0,246
4	1,000	0,302
5	1,000	0,357
6	1,000	0,410
7	1,000	0,461
8	1,000	0,511
9	1,000	0,559
10	1,000	0,606
11	1,000	0,651
12	1,000	0,694



3.19. RLC-Filter

Gegeben sei folgende Schaltung.



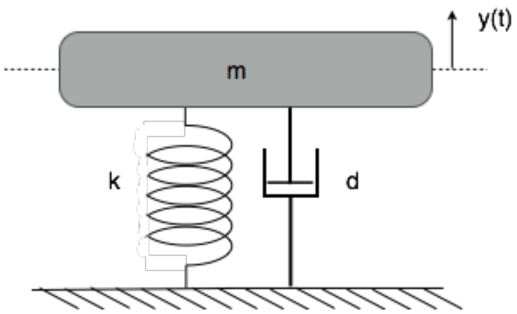
Frage 3.19.1: Erstellen Sie die Differenzialgleichung.

Frage 3.19.2: Berechnen Sie die Übertragungsfunktion.

Lösung: $G(s) = U_2(s)/U_1(s) = 1/(LC\ s^2 + RC\ s + 1)$

3.20. Fahrwerk

Ein Fahrzeug mit der Masse m sei mit Hilfe einer Feder k und eines Dämpfers d an die Strasse gekoppelt, wie in der folgenden Abbildung gezeigt.



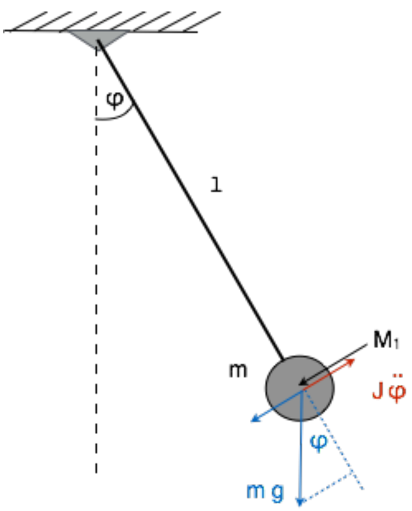
Frage 3.20.1: Erstellen Sie die Differenzialgleichung. Hinweis: Die Dämpfung ist proportional zur Geschwindigkeit, d.h. $F_d = d\ \dot{y}(t)$.

Frage 3.20.2: Berechnen Sie die Übertragungsfunktion.

Lösung: $G(s) = Y(s)/F_1(s) = 1/(m\ s^2 + d\ s + k)$

3.21. Schaukel

Die Masse m sei an einem Seil der Länge l befestigt und wird um kleine Winkel ϕ ausgelenkt.



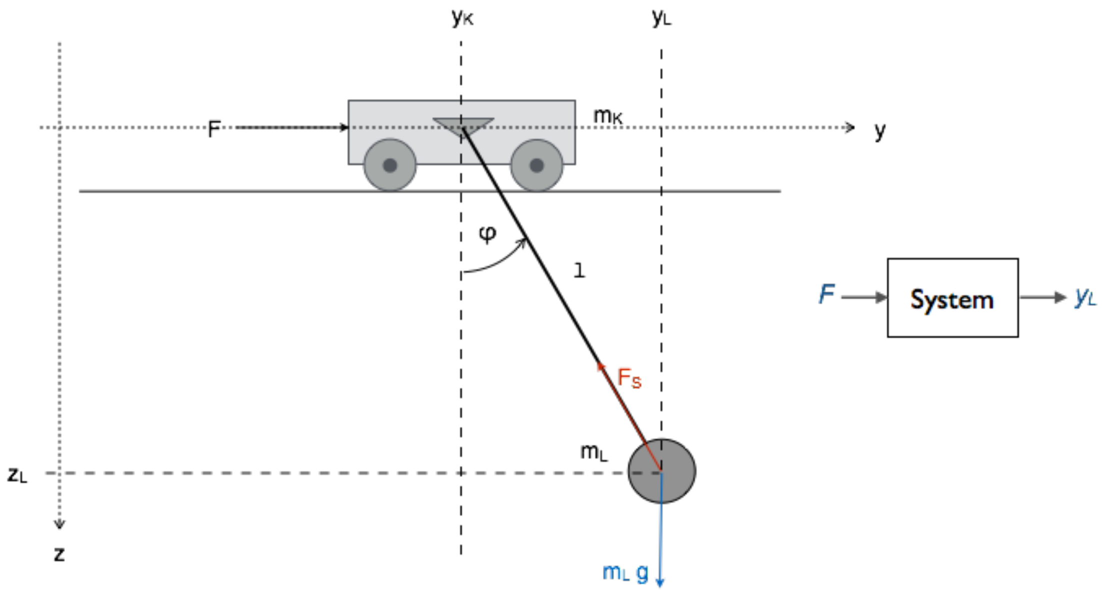
Frage 3.21.1: Erstellen Sie die Differenzialgleichung. Hinweis: Das Massenträgheitsmoment der Masse m am Seil der Länge l berechnet sich zu $J = m\, l^2$. Als äußere Anregung wirkt das Moment M_1 ein. Es soll nur um kleine Winkel ϕ ausgelenkt werden.

Frage 3.21.2: Berechnen Sie die Übertragungsfunktion.

Lösung: $G(s) = \Phi(s) / M_1(s) = 1/ J\, (s^2 + g/l)$

3.22. Verladebrücke

Auf einer Verladebrücke soll mit Hilfe der Laufkatze mit der Masse m_K die Last m_L an einer vorgegebenen Zielposition y_L abgesetzt werden. Die Laufkatze wird mit Hilfe der Kraft F bewegt (Eingangsgröße). Die Zielposition y_L stellt die Ausgangsgröße dar. Es seien kleine Winkel ϕ vorausgesetzt.



Frage 3.22.1: Erstellen Sie die Differenzialgleichung. Hinweis: Wählen Sie zunächst als den Winkel ϕ als Ausgangsgröße. Die Auslenkung $y_L(t)$ erhalten Sie dann aus $y_K(t)$ und $\phi(t)$.

Lösung: Es gelten die folgenden Bewegungsgleichungen:

$$m_K\, \ddot{y}_K(t) - F_S \sin\phi(t) = F(t) \qquad (1)$$

$$m_L\, \ddot{y}_L(t) + F_S \sin\phi(t) = 0 \qquad (2)$$

$$m_L\, z''_L(t) + F_S \cos\phi = m_L\, g \qquad (3)$$

Aus der Geometrie ergibt sich:

$$y_L = y_K + l \sin\phi \qquad (4)$$

$$z_L = l \cos\phi \qquad (5)$$

Mit Hilfe von (4) und (5) lassen sich y_L und z_L in ((2) und (3) eliminieren. Zweimaliges Ableiten von (4) und (5) ergibt:

$$\dot{y}_L = \dot{y}_K + l \cos\phi\ \phi'$$

$$\ddot{y}_L = \ddot{y}_K - l \sin\phi\ (\phi')^2 + l \cos\phi\ \phi'' \qquad (4')$$

$z'_L = - l \sin\phi \, \phi'$

$z''_L = - l \cos\phi \, (\phi')^2 - l \sin\phi \, \phi''$ (5')

Einsetzen von (4') und (5') in (2) und (3) ergibt:

$m_L \, (\ddot{y}_K - l \sin\phi \, (\phi')^2 + l \cos\phi \, \phi'') + F_S \sin\phi = 0$ (2')

$m_L \, (- l \cos\phi \, (\phi')^2 - l \sin\phi \, \phi'') + F_S \cos\phi = m_L \, g$ (3')

Nach Multiplikation von (2') mit cosϕ, Multiplikation von (3') mit sinϕ und anschliessender Subtraktion (2') - (3') verbleiben:

$\ddot{y}_K \cos\phi + l \, \phi'' = - g \sin\phi$ (6)

Einsetzen von $F_S \sin\phi$ auf (2') in (1) ergibt:

$m_K \, \ddot{y}_K + m_L \, \ddot{y}_K - m_L \, l \sin\phi \, (\phi')^2 + m_L \, l \cos\phi \, \phi'' = F(t)$ (7)

Da kleine Winkel ϕ vorausgesetzt waren, werden folgende Ausdrücke vereinfacht:

$\cos\phi \simeq 1; \; \sin\phi \simeq \phi; \; \phi \, (\phi')^2 \simeq 0;$

Er verbleiben folgende Systemgleichungen:

$\ddot{y}_K + l \, \phi'' = - g \, \phi$ (3.22.1)

$(m_K + m_L) \, \ddot{y}_K + m_L \, l \, \phi'' = F(t)$ (3.22.2)

Die Ausgangsgröße $y_L(t)$ folgt aus (4), im linearisierten Fall:

$y_L = y_K + l \, \phi$ (3.22.3)

Frage 3.22.2: Ermitteln Sie Sie die Übertragungsfunktion.

Lösung: Durch Transformation in den Bildbereich erhält man

$s^2 \, Y_K(s) + s^2 \, l \, \Phi(s) = - g \, \Phi(s)$ (3.22.1')

$s^2 \, (m_K + m_L) \, Y_K(s) + s^2 \, m_L \, l \, \Phi(s) = F(s)$ (3.22.2')

$Y_L(s) = Y_K(s) + l \, \Phi(s)$ (3.22.3')

Umformen von (3.22.1') nach Y_K und einsetzen in (3.22.2') ergibt:

$-g \, (m_L + m_K) \, \Phi(s) - m_K \, l \, s^2 \, \Phi(s) = F(s)$

Hieraus folgt für die Ausgangsgröße Φ(s):

$G_1(s) = \Phi(s)/F(s) = -1 \, / \, (g \, (m_L + m_K) + s^2 \, m_K \, l)$

Umformen von (3.22.1') nach Y_K und einsetzen in (3.22.3') ergibt:

$G_2(s) = Y_L(s)/\Phi(s) = g/s^2$

Die gesamte Übertragungsfunktion ergibt sich auf der Verkettung von G_1 und G_2:

$G(s) = G_1(s) \, G_2(s).$

Frage 3.22.3: Simulieren Sie das System.

Lösung: Ausgangspunkt sind die Systemgleichungen (3.22.1) und (3.22.2).

$\ddot{y}_K + l \, \phi'' = - g \, \phi$ (3.22.1)

$$(m_K + m_L)\,\ddot{y}_K + m_L\, l\, \phi'' = \ddot{y}_K \qquad (3.22.2)$$

Ein Nachteil dieser Darstellung sind die gemischten zweiten Ableitungen in beiden Gleichungen. Zur leichteren Verarbeitung werden die Gleichungen daher etwas verändert. Multiplikation mit $1/m_L$ von (3.22.2) ergibt:

$$(m_K/m_L + 1)\,\ddot{y}_K + l\, \phi'' = F(t) / m_L \qquad (3.22.2)$$

Gleichung (3.22.1) von Gleichung (3.22.2) subtrahiert ergibt:

$$(m_K/m_L)\,\ddot{y}_K = g\, \phi + F(t) / m_L \qquad |\ m_L/m_K$$

$$\ddot{y}_K = m_L g/m_K\, \phi + F(t) / m_K \qquad (3.22.3)$$

Diese Gleichung (3.22.3) von (3.22.1) subtrahiert ergibt:

$$l\, \phi'' = -m_L g/m_K\, \phi - g\, \phi - F(t) / m_K \qquad |\ 1/l$$

$$\phi'' = -(g/l)(1+ m_L g/m_K)\, \phi - F(t) / l\, m_K \qquad (3.22.4)$$

Für das mit (3.22.3) und (3.22.4) vorliegende Differenzialgleichungssystem 2. Ordnung werden folgende Hilfsgrößen gewählt:

$$x_1(t) = y_K(t);\ x_2(t) = \dot{y}_K(t);\ \ x_3(t) = \phi(t);\ \ x_4(t) = \phi'(t)$$

Man erhält folgendes DGL-System erster Ordnung:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \qquad (1)$$

$$\dot{x}_2(t) = m_L g/m_K\, x_3(t) + F(t) / m_K \qquad (2)$$

$$\dot{x}_3(t) = x_4(t) \qquad (3)$$

$$\dot{x}_4(t) = -(g/l)(1+ m_L g/m_K)\, x_3(t) - F(t) / l\, m_K \qquad (4)$$

Die Ausgangsgröße $y_L(t)$ erhält man aus:

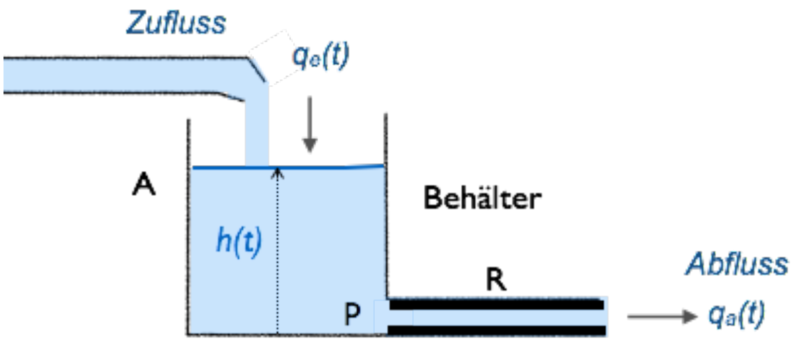
$$y_L(t)= y_K(t) + l\, \phi(t) = x_1(t) + l\, x_3(t) \qquad (5)$$

Das nun vorliegende Differenzialgleichungssystem 1. Ordnung lässt sich in ein zeitdiskretes Differenzengleichungssystem umwandeln und numerisch lösen (Tabellenkalkulation bzw. MATLAB). Hierfür sind Annahmen für die Werte der Systemparameter erforderlich (m_L, m_K, l).

Frage 3.22.4: Testen Sie verschiedene Verläufe der Eingangsgröße F für eine optimale Positionierung im Sinne kurzer Laufzeiten bzw. Vermeidung von Pendelbewegungen.

3.23. Füllstand

Folgende Abbildung zeigt einen Behälter mit der Fläche A mit Zufluss und Abfluss.



Hierbei bedeuten A (in m²) die Fläche des Behälters und ρ die Dichte der Flüssigkeit (in kg/m³). Am Boden des Behälters beträgt der Druck p der Flüssigkeit p = ρg h, wobei h die Füllhöhe bezeichnet. Dieser Druck p treibt die Flüssigkeit aus dem Behälter. Die ausströmende Menge q_a beträgt q_a = p/R, wobei R den hydraulischen Widerstand bezeichnet.

Der hydraulische Widerstand ist definiert als R = 128 ηL / πρ d^4 (in Ns/m²), wobei L die Länge des Abflussrohrs, d den Durchmesser des Abflussrohrs und η die Zähigkeitskonstante (dynamische Visko-sität) der Flüssigkeit (in Ns/m²) bezeichnen. In Wasser bei Temperatur 20 °C sind η = 0,001 Ns/m² und die Dichte ρ = 0,998203 g/cm³ ≃ 1000 kg/m³.

Frage 3.23.1: Erstellen Sie die Differenzialgleichung des Systems. Als Eingangsgröße soll der Zustrom $q_e(t)$ verwendet werden, als Ausgangsgröße der Füllstand h(t). Der Abfluss $q_a(t)$ wird als Störgröße betrachtet. Hinweis: Die Differenz des Zustroms $q_e(t)$ vom Abstrom $q_a(t)$ ist gleich der Füllstandsänderung A dh(t)/dt des Behälters. Der Abfluss $q_a(t)$ ist definiert durch den Druck und den hydraulischen Widerstand des Abflussrohrs, d.h. $q_a(t)$ = p/R (ohmsches Gesetz der Hydraulik).

Frage 3.23.2: Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion.

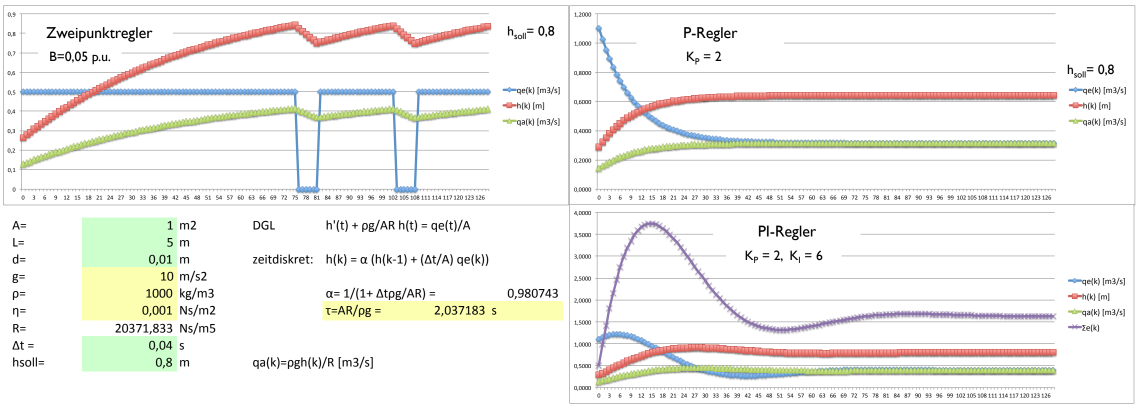
Lösung: $G(s) = H(s)/Q_e(s) = (1/A) / (s + \rho g/AR)$

Frage 3.23.3: Regeln Sie den Füllstand mit Hilfe eines Zweipunktreglers. Als Flüssigkeit soll Wasser verwendet werden. Treffen Sie für die numerische Berechnung realistische Annahmen für den Behälter und den Querschnitt des Abflussrohrs. Stellen Sie die Reglerparameter (Bandbreite) geeignet ein. Simulieren Sie die Regelung.

Frage 3.23.4: Regeln Sie den Füllstand mit Hilfe eines P-Reglers. Es wird davon ausgegangen, dass der Zustrom sich durch den Regler kontinuierlich verändert lässt (durch ein Ventil). Stellen Sie den Reglerparameter geeignet ein. Simulieren Sie die Regelung.

Frage 3.23.5: Regeln Sie den Füllstand mit Hilfe eines PI-Reglers. Stellen Sie die Regler-parameter geeignet ein. Simulieren Sie die Regelung.

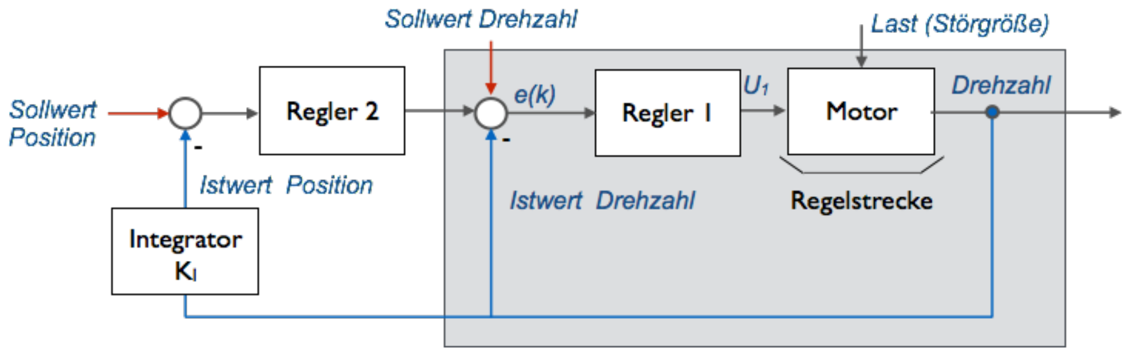
Beispiel:



Frage 3.23.6: Vergleichen Sie die Reglertypen in Ihrer Simulation. Welchen Regler würden Sie für welche Anwendungsfälle empfehlen?

3.24. Lageregelung

Die Drehzahlregelung eines Motors soll erweitert werden um eine Regelung der Position, die vom Motor angefahren werden soll. Diese Lageregelung wird der Drehzahlregelung als äußerer Regelkreis überlagert. Die folgende Abbildung zeigt das Prinzip.



Aus der Drehzahl wird durch Integration über der Zeit und Multiplikation mit dem Faktor K_I die Position abgeleitet ($s = K_I \int f(\tau)\, d\tau$). Die Abweichung der Position vom Sollwert dient als Eingang für den überlagerten Regler 2, der als Proportionalregler (P-Regler) ausgeführt wird.

Frage 3.24.1: Innerer Regelkreis (Regler 1). Die ungeregelte Strecke (Motor ohne Drehzahlregelung) hat die Übertragungsfunktion $G_S(s) = b / (s + a)$. Regler 1 sei (1) als P-Regler ausgeführt, (2) als PI-Regler ausgeführt, (3) als PID-Regler ausgeführt. Berechnen Sie die Übertragungsfunktion für den inneren Regelkreis für die genannten 3 Fälle.

Frage 3.24.2: Äußerer Regelkreis: Wie lautet die Übertragungsfunktion des gesamten Systems bzgl. der Lageregelung (mit äußerer Regelung und Ausgangsgröße Position) für die unter 3.24.1 genannten 3 Fälle?

Frage 3.24.3: Reglerparameter. Wie gehen Sie bei der Einstellung der Regler vor (äußerer und innerer Regelkreis)? Begründen Sie Ihre Aussage.

Frage 3.24.4: Simulieren Sie die Strecke für einen der unter 3.24.1 genannten Fälle für den inneren Regler. Wählen Sie geeignete Parameter für die Strecke und für die Reglerparameter.

3.25. Temperaturregelung mit P- und I-Regler

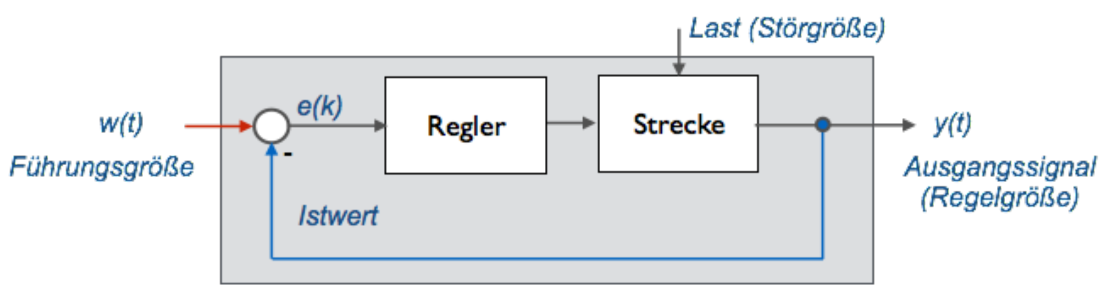
Frage 3.25.1: Regeln Sie die Temperatur in Aufgabe 3.18 mit Hilfe eine P-Reglers. Stellen Sie den Reglerparameter geeignet ein. Simulieren Sie die Regelung.

Frage 3.25.2: Regeln Sie die Temperatur in Aufgabe 3.18 mit Hilfe eine I-Reglers. Stellen Sie den Reglerparameter geeignet ein. Simulieren Sie die Regelung.

Frage 3.25.2: Regeln Sie die Temperatur in Aufgabe 3.18 mit Hilfe eine PI-Reglers. Stellen Sie die Reglerparameter geeignet ein. Simulieren Sie die Regelung.

Frage 3.25.4: Vergleichen Sie die Reglertypen in Ihrer Simulation. Welchen Regler würden Sie für welche Anwendungsfälle empfehlen?

3.26. Wurzelortskurven



Bei dem in der Abbildung gezeigten Regelkreis sei die Regelstrecke ein System erster Ordnung mit der Übertragungsfunktion $G_S(s) = b / (s + a)$. Für den Regler wird ein I-Regler mit der Übertragungsfunktion $G_R(s) = K/s$ verwendet.

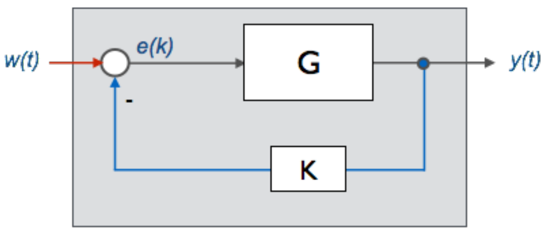
Frage 3.26.1: Berechnen Sie die Übertragungsfunktion des Regelkreises.

Frage 3.26.2: Berechnen Sie die Lage der Polstellen in Abhängigkeit der Variablen K. Für die Regelstrecke sei hierfür angenommen: b= 4, a = 4.

Frage 3.26.3: Welchen Verlauf in der komplexen Ebene nehmen die Polstellen (= Wurzeln) der Übertragungsfunktion in Abhängigkeit von K?

Frage 3.26.4: Der Verlauf der Polstellen wird auch als Wurzelortskurve bezeichnet. Welche Aussagen ermöglicht dieser Verlauf für eine Regelkreis?

Frage 3.26.5: Mit MATLAB lassen sich die Wurzelortskurven einer gegebenen Übertragungsfunktion G berechnen. Hierbei ist G die Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises, wie in der Abbildung unten gezeigt. Die variable Verstärkung K ist hierbei im Rückkopplungszweig angesiedelt. Zum Berechnen Wurzelortskurve verwenden Sie die Anweisung: `rlocus(G);` Die Anweisung `[K, Pole] = rlocfind(G)` ermöglicht Ihnen die Wahl von K mit den zugehörigen Polen. Erproben Sie diese Funktionen.



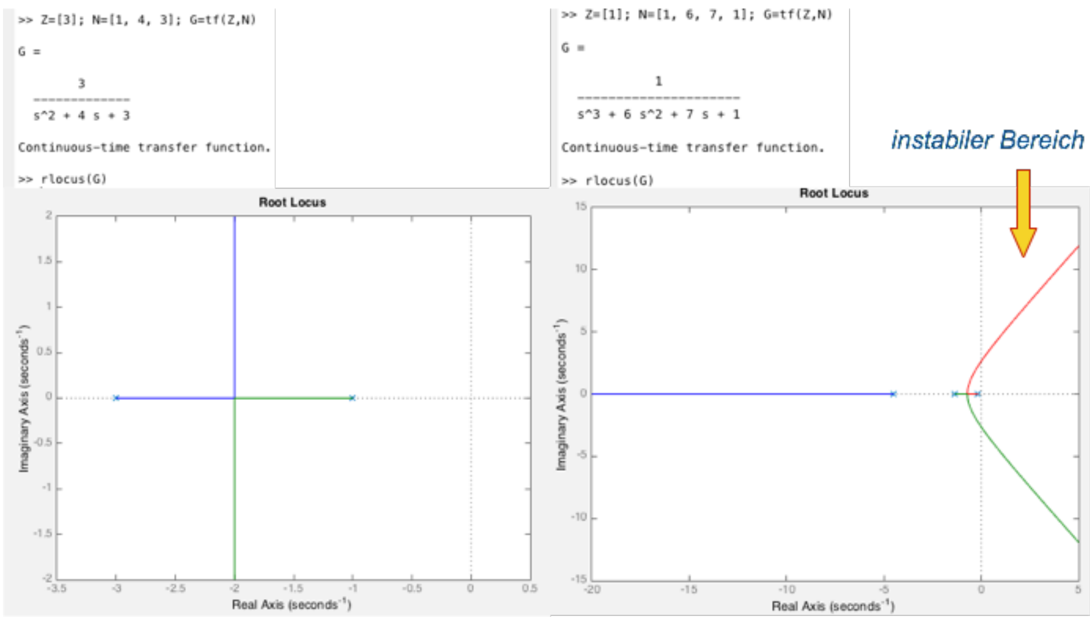
Vorgabe:

$$G = Z(s) / N(s)$$

Ergebnis:

$$G_{ges} = \frac{Z(s)}{Z(s) + K\,N(s)}$$

Beispiele:



Frage 2.26.6: Berechnen Sie die Wurzelortskurven einiger für Sie interessanter Regelkreise. Gibt es instabile Bereiche, die durch geeignete Wahl von K vermieden werden können?

3.27. Übertragungsfunktion und Frequenzgang

Gegeben sei die Übertragungsfunktion $G(s) = b_0 / s^2 + a_1 s + a_0$. Hierbei ist $s = \sigma + j\omega$ eine Variable in der komplexen Ebene. Unter dem Frequenzgang des Systems $G(\omega)$ bzw. $G(f)$ versteht man den Ausschnitt der Übertragungsfunktion für $s = j\omega$, d.h. den Wertebereich der imaginären Achse. Den Frequenzgang erhält man aus einer gegebenen Übertragungsfunktion somit durch Einsetzen von $s = j\omega$. Bemerkung: Aus der Struktur der Laplace-Transformation (siehe Anhang B) geht die Ähnlichkeit mit der Fourier-Transformation (= Spektraltransformation) hervor.

Frage 3.27.1: Berechnen Sie den Frequenzgang zu der oben genannten Übertragungsfunktion.

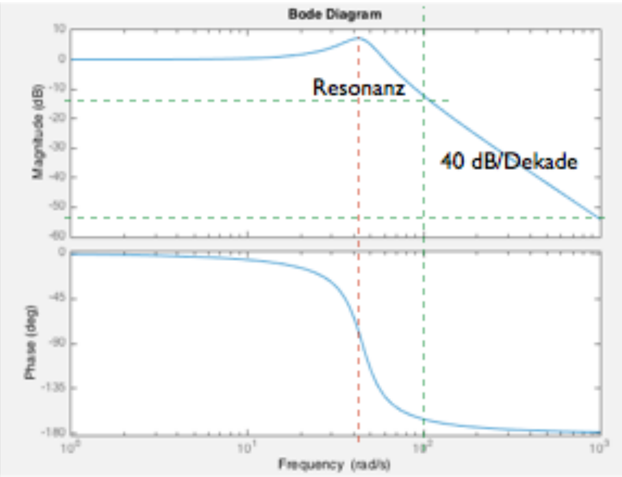
Frage 3.27.2: Berechnen Sie den Realteil und Imaginärteil des Frequenzgangs aus Frage 3.27.1. Berechnen Sie den Frequenzgang nach Betrag und Phase. Stellen Sie den prinzipiellen Verlauf des Frequenzgangs nach Betrag und Phase grafisch dar. Wie verläuft die Darstellung im linearen bzw. logarithmischen Maßstab grundsätzlich?

Frage 3.27.3: Ermitteln Sie die Polstellen der o.g. Übertragungsfunktion für $b_0 = 2000$, $a_1 = 20$, $a_0 = 2000$. Hinweis: Verwenden Sie MATLAB.

Frage 3.27.4: Skizzieren Sie den Frequenzgang mit den in Frage 3.27.3 genannten Werten. Stellen Sie den Frequenzgang im logarithmischen Maßstab dar. Interpretieren Sie den Frequenzgang bzgl. der Lage der Polstellen, der Steigung des Amplitudengangs, sowie dem Verlauf des Phasengangs. Hinweis: Verwenden Sie MATLAB.

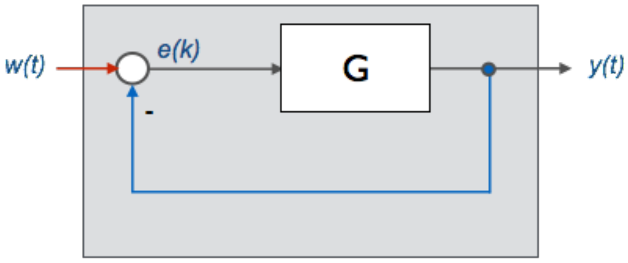
Beispiel:

```
>> Z=[2000]; N=[1, 20, 2000]; G=tf(Z,N)

G =

        2000
  ----------------
  s^2 + 20 s + 2000

Continuous-time transfer function.

>> [K, P] = residue(Z,N); bode(G)
```



3.28. Stabilität und Frequenzgang

Ein Regelkreis hat die Übertragungsfunktion G(s) im Vorwärtszweig.



Vorwärtszweig: $G(s)$

Regelkreis: $G_{ges} = \dfrac{G(s)}{1 + G(s)}$

Kritischer Punkt: $G(s) = -1$

Bedingt durch die Rückkopplung im Regelkreis ergibt sich insgesamt die Übertragungsfunktion $G_{ges}(s) = 1 / (1 + G(s))$. Durch die Rückkopplung kann also eine Instabilität entstehen, wenn $G(s) = -1$ wird. Dieser Effekt ist als Rückkopplung (engl. Feedback) von Musikveranstaltungen bekannt: Gerät ein Mikrophon in nähe des Schalls vom Lautsprecher, so ergibt sich ein geschlossener Kreis: der empfangene Schall wird erneut verstärkt. Es pfeift bei Frequenzen, für die $G(\omega) = -1$ wird.

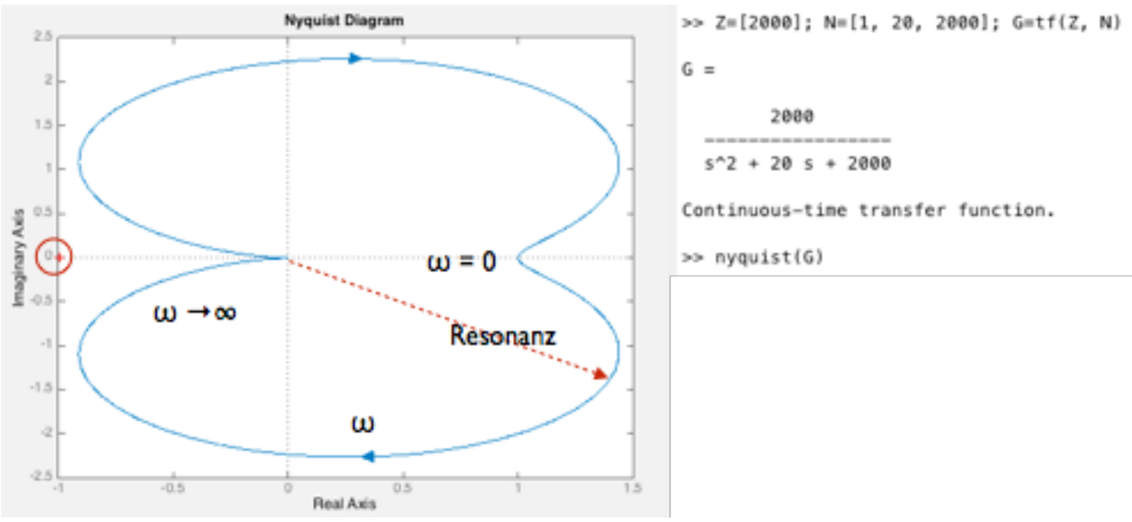
Frage 3.28.1: Welche Phasenbeziehung gilt an der Stelle der Instabilität ($G(\omega_r) = -1$)?

Frage 3.28.2: Wie groß muss die Verstärkung $|G(\omega_r)|$ an dieser Stelle sein, damit das System instabil wird?

Frage 3.28.3: Formal betrachtet ist bezüglich des Frequenzgangs $G(\omega)$ in der komplexen Ebene der Punkt (-1, 0) kritisch (Realteil = -1, Imaginärteil = 0). Übersetzt in Betrag und Phase bedeutet dieser Punkt, dass dort die Phase invertiert wird (dadurch wechselt das Vorzeichen von G bei $G(\omega_r)$, es gibt positive Rückkopplung). Wenn außerdem die Verstärkung $|G(\omega_r)| \geq 1$ ist, wird das System instabil. Diskutieren Sie die Plausibilität dieser Aussage. Was bedeutet dies für einen gegebenen Frequenzgang $G(\omega)$?

Frage 3.28.4: Die Darstellung des Frequenzgangs $G(\omega) = |G(\omega)| e^{j\phi(\omega)}$ nach Betrag und Phase in der komplexen Ebene bezeichnet man als Ortskurve. Im Unterschied zum Bode-Diagramm gibt es keine Frequenzachse. Betrag und Phase finden sich als Spur des komplexen Zeigers über der Frequenz. Skizzieren oder zeichnen Sie Ortskurven für Ihnen geläufige Frequenzgänge $G(\omega)$ und diskutieren Sie die Stabilität der Systeme. Hinweis: MATLB stellt Ihnen für Ortskurven die Funktion `nyquist(G)` zur Verfügung.

Beispiel:

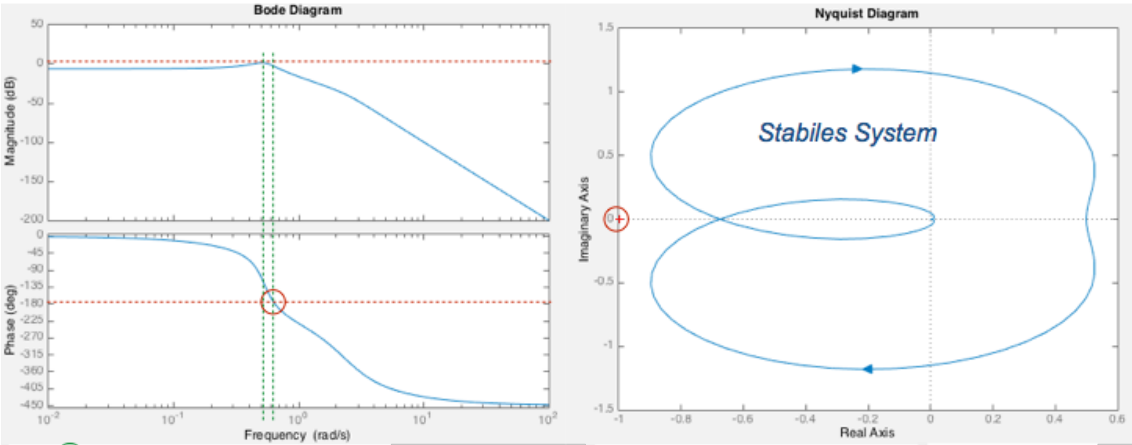


Frage 3.28.5: Amplitudenreserve und Phasenreserve. In die Ortskurve in Frage 3.28.5 darf der Punkt (-1, 0) in der komplexen Ebene auf keinen Fall eingeschlossen werden. Die Ortskurve sollte ihn links liegen lassen. Übersetzt man diese Eigenschaft in den Amplitudengang und Phasengang, so liegt der kritische Punkt (-1, 0) bei der Phase 180 Grad.

Die Differenz des Amplitudenwertes von der Durchtrittsfrequenz durch die 0-dB Linie (Verstärkung = 1) zum Amplitudenwert bei Phase 180 Grad wird als Amplitudenreserve bezeichnet. Die Entfernung des Phasenwerts bei der Durchtrittsfrequenz der Amplitude durch die 0-dB Linie zum Phasenwert bei 180 Grad wird als Phasenreserve bezeichnet. Beide Werte kennzeichnen den Sicherheitsabstand zum kritischen Punkt (-1, 0). Bis zu dieser Reserve kann die Verstärkung erhöht werden.

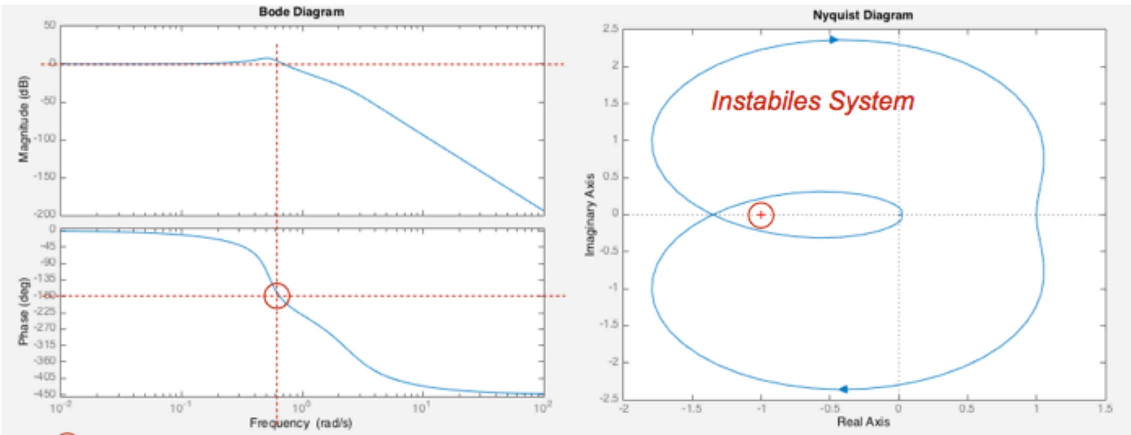
Skizzieren Sie die Ortskurve und ein Bode-Diagramm mit der Amplitudenreserve und Phasenreserve für ein System höherer Ordnung. Hinweis: MATLAB stellt Ihnen hierfür die Funktion `[A, phi, om180, om0dB] = margin(G)` zur Verfügung. Die Amplitudenreserve A wandeln Sie mit Hilfe von `AdB = 20*log10(A) dB` in einen logarithmischen Wert.

Beispiele:




```
>> Z=[1]; N=[1, 4, 10, 10, 4, 2]; G=tf(Z, N)

G =

                     1
  ----------------------------------------
  s^5 + 4 s^4 + 10 s^3 + 10 s^2 + 4 s + 2

Continuous-time transfer function.

>> bode(G)
>> nyquist(G)
```

```
>> [A, phi, om180, om0db] = margin(G)

A =

    1.4773

phi =

   26.4022

om180 =

    0.6461

om0db =

    0.5782
```



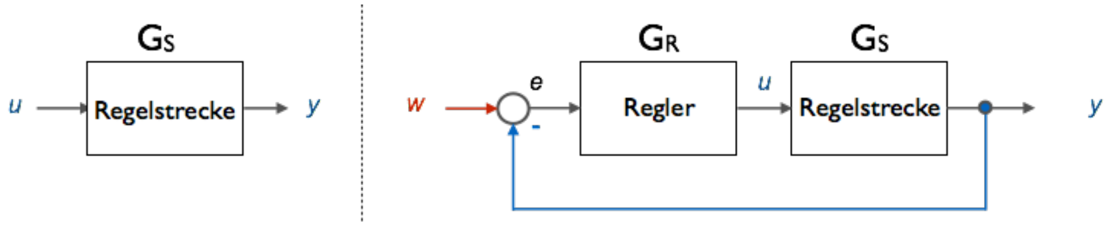

```
>> Z=[2]; N=[1, 4, 10, 10, 4, 2]; G=tf(Z, N)

G =

                     2
  ----------------------------------------
  s^5 + 4 s^4 + 10 s^3 + 10 s^2 + 4 s + 2

Continuous-time transfer function.

>> bode(G)
>> nyquist(G)
```

Frage 3.28.6: Erkunden Sie Ortskurven, Amplutidenreserve und Phasenreserve in Bezug auf die Stabilität für Übertragungsfunktionen. Verwenden Sie Systeme höher als 2. Ordnung, bei denen die Phase weiter als 180 Grad dreht.

4. Klausuraufgaben

4.1. P-Regler

Folgende Abbildung zeigt eine Regelstrecke mit der Übertragungsfunktion $G_S(s)$ ohne Regelung (links), sowie die gleiche Regelstrecke im Regelkreis mit Regler. Der Regler hat die Übertragungsfunktion $G_R(s)$. Es soll ein P-Regler eingesetzt werden.



Frage 4.1.1: Wie lautet die Übertragungsfunktion der geregelten Strecke im allge-meinen Fall (mit $G_S(s)$ und $G_R(s)$)? Wie lautet die Übertragungsfunktion im speziellen Fall, wenn für $G_R(s)$ ein P-Regler eingesetzt wird?

Lösung: aus (1) $Y(s) = G_R(s)\ G_S(s)\ E(s)$ und (2) $E(s) = W(s) - Y(s)$ erhält man

$$G_{ges}(s) = G_R(s)\ G_S(s) / (1 + G_R(s)\ G_S(s)).$$

Mit $G_R(s) = K_P$ ergibt sich hieraus

$$G_{ges}(s) = K_P\ G_S(s) / (1 + K_P\ G_S(s)).$$

Frage 4.1.2: Für die Strecke sei $G_s(s) = b_0 / (s^2 + a_1\ s + a_0)$. Welche Übertragungsfunktion ergibt sich für die geregelte Strecke mit dem P-Regler? Welchen Wert nimmt die Sprungantwort h(t) für die ungeregelte Strecke bzw. die geregelte Strecke im eingeschwungenen Zustand an ($h(t\rightarrow\infty)$)?

Lösung: Mit dem Zählerpolynom Z(s) und dem Nennerpolynom N(s) von $G_S(s) = Z(s) / N(s)$ erhält man allgemein für die geregelte Strecke:

$G_{ges}(s) = K_P\ Z(s) / (N(s) + K_P\ Z(s))$. Hieraus ergibt sich im speziellen Fall:

$G_{ges}(s) = K_P\ b_0 / (s^2 + a_1\ s + a_0 + K_P\ b_0)$

Eingeschwungener Zustand:

Ohne Regler: $h(t\rightarrow\infty) = b_0 / a_0$. Mit Regler: $h(t\rightarrow\infty) = K_P\ b_0 / (a_0 + K_P\ b_0)$

Frage 4.1.3: Für die Regelstrecke gelten folgende Werte: $b_0 = 3$, $a_1 = 4$, $a_0 = 3$. Berechnen Sie für den ungeregelten Fall: (1) die Pole der Übertragungsfunktion, (2) die Partialbruchzerlegung, (3) die Impulsantwort. Beschreiben Sie das Zeitverhalten der ungeregelten Strecke mit Hilfe ihrer Zeitkonstanten.

Lösung: Pole: $p_1 = -1$, $p_2 = -3$ erhält man durch Lösen der quadratischen Gleichung.

Durch Koeffizientenvergleich an den beiden Polen erhält man aus $G(s) = 3 / (s+1)\ (s+3) = K_1 / (s+1) + K_2 / (s+3)$ die Koeffizienten $K_1 = 1{,}5$ und $K_2 = -1{,}5$.

Die Impulsantwort erhält man hieraus aus der Rücktransformation in den Zeitbereich: $g(t) = 1{,}5\ e^{-t} - 1{,}5\ e^{-3t}$. Die ungeregelte Strecke hat die beiden Zeitkonstanten $\tau_1 = 1$ und $\tau_2 = 1/3$.

Frage 4.1.4: Legen Sie den Reglerparameter so fest, dass sich das Zeitverhalten der Strecke verbessert. Welchen Einfluss hat der Regler? Beschreiben Sie die Lage der Pole der Übertragungsfunktion der geregelten Strecke. Welche Impulsantwort hat die geregelte Strecke? Beschreiben

Sie das Zeitverhalten der geregelten Strecke mit Hilfe ihrer Zeitkonstanten. Welche Werte für die Reglerkonstante sollten Sie vermeiden?

Lösung: Verschiebung der ersten Polstelle zu kleineren Werten. Aus der Lösung der quadratischen Gleichung wählt man z.B. den Wert der Diskriminante D = 0, was sich mit Hilfe von $K_P = 1/3$ erreichen lässt. In diesem Fall sind $p_1 = p_2 = -2$. Im Vergleich zur ungeregelten Strecke ist hierdurch zwar der zweite Pol näher an die positive reelle Ebene gewandert, der dominierende Pol p_1 besitzt jedoch nun eine kleiner Zeitkonstante. Man erhält $\tau_1 = \tau_2 = 1/2$.

Mit $K_P = 1/3$ erhält man für die Übertragungsfunktion der geregelten Strecke:

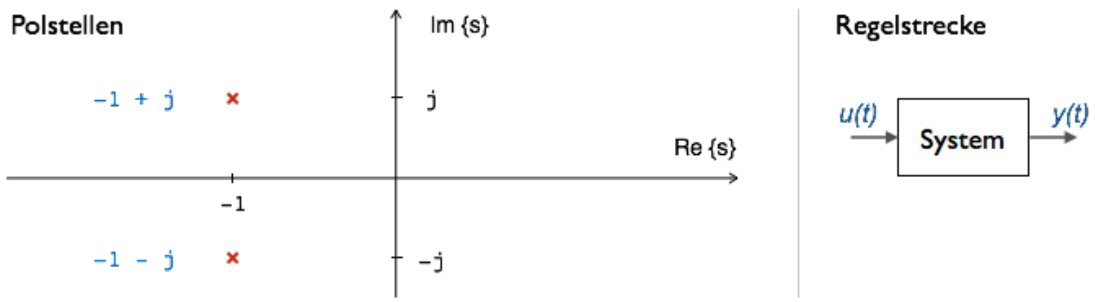
$G_{ges}(s) = 1 / (s^2 + 4 s + 4) = 1/ (s + 2)^2$

Aus der Korrespondenztabelle der Laplace Transformation ermittelt man die zugehörige Zeitfunktion zu $g(t) = t\, e^{-2t}$.

Reglerkonstanten, die die Pole in Richtung der positiven reellen Ebene verschieben, sind zu vermeiden, da das System hierdurch instabil wird. Mit Blick in die Lösung der quadratischen Gleichung wären das alle Werte von K_P, die den ursprünglichen Pol bei $p_1 = -1$ weiter nach links verschieben, d.h. $K_P < 1/4$.

4.2. Systembeschreibung durch Polvorgabe

Ein System (Regelstrecke) besitzt die in der Abbildung gezeigten Polstellen $s_{1,2} = -1 \pm j$.



Frage 4.2.1 (4 Punkte): Übertragungsfunktion. Wie lautet das Nennerpolynom N(s) der Übertragungsfunktion? Wie lautet die Übertragungsfunktion G(s), wenn das Zählerpolynom Z(s) = 2 beträgt?

Lösung: $N(s) = (s - (-1 + j)) (s - (-1 - j)) = s^2 + 2s + 2$

Mit Z(s) = 2 folgt hieraus $G(s) = Z(s) / N(s) = 2 / (s^2 + 2s + 2)$

Frage 4.2.2 (6 Punkte): Stabilität und Verhalten im eingeschwungenen Zustand. Ist das System stabil? Wenn ja, auf welchen Wert schwingt die Sprungantwort des Systems ein? Skizzieren Sie den Verlauf der Sprungantwort. Begründen Sie Ihre Aussagen.

Lösung: $h(t\rightarrow\infty) = G(s\rightarrow 0)$, es gilt also im eingeschwungenen Zustand $h(t\rightarrow\infty) = 1$. Die Impulsantwort des Systems ist eine gedämpfte Schwingung. Die Sprungantwort schwingt beim Einschwingen über.

Frage 4.2.3 (4 Punkte): Differenzialgleichung. Wie lautet die Differenzialgleichung des Systems für das Eingangssignal u(t) und das Ausgangssignal y(t)?

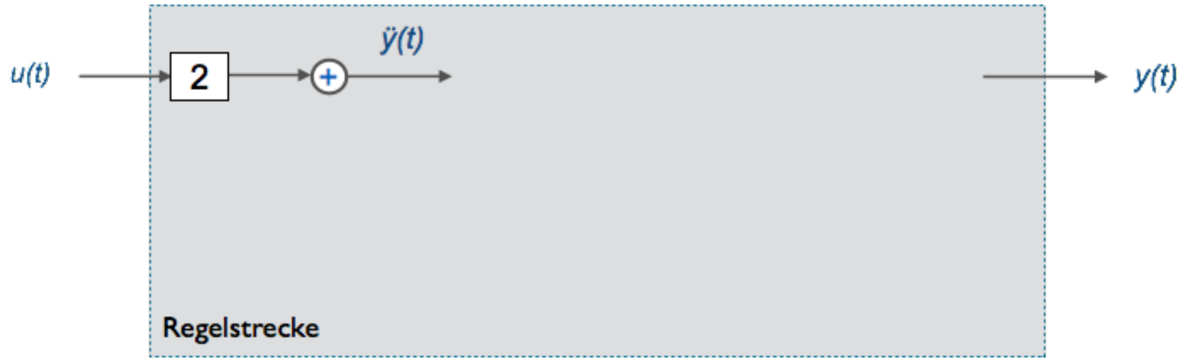
Lösung: Aus der Übertragungsfunktion erhält man

$$Y(s)\,(s^2 + 2s + 2) = 2\, U(s)$$

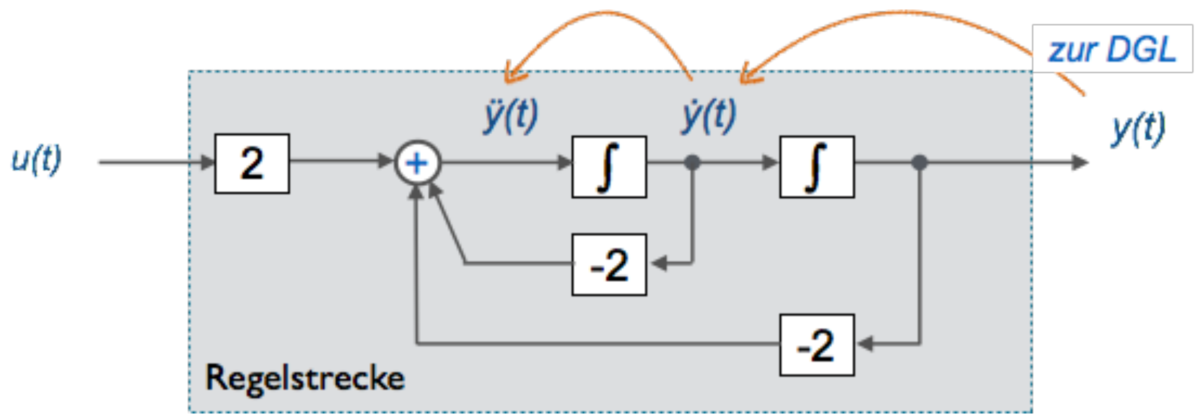
Transformation in den Zeitbereich ergibt

$$\ddot{y}(t) + 2\,\dot{y}(t) + 2\,y(t) = 2\,u(t)$$

Frage 4.2.4 (6 Punkte): Signalfluss. Skizzieren Sie ein Signalflussdiagramm (Blockdiagramm), das die Differenzialgleichung beschreibt. Verwenden Sie folgendes Schema. Welche Rolle spielen die Rückkopplungen im System?



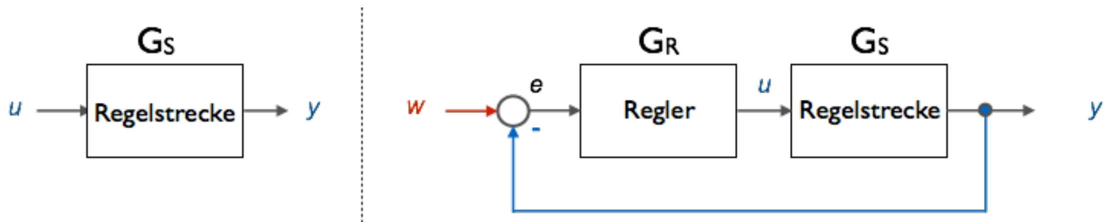
Lösung:



Die Rückkopplungen sind für das Einschwingverhalten verantwortlich. Setzt man beide Koeffizienten in den Rückkopplungszweigen gleich Null, so verbleibt nur $\ddot{y}(t) = 2\,u(t)$.

4.3. Regelkreis

Folgende Abbildung zeigt eine Regelstrecke mit der Übertragungsfunktion $G_S(s)$ ohne Regelung (links), sowie die gleiche Regelstrecke im Regelkreis mit Regler. Der Regler hat die Übertragungsfunktion $G_R(s)$.4



Frage 4.3.1 (4 Punkte): (1) Wie lautet die Übertragungsfunktion der geregelten Strecke im allgemeinen Fall (mit $G_S(s)$ und $G_R(s)$)? (2) Wie lautet die Übertragungsfunktion im speziellen Fall, wenn für $G_R(s)$ ein P-Regler eingesetzt wird, d.h. $G_R(s) = K_P$?

Lösung: aus (1) $Y(s) = G_R(s)\ G_S(s)\ E(s)$ und (2) $E(s) = W(s) - Y(s)$ erhält man

$G_{ges}(s) = G_R(s)\ G_S(s) / (1 + G_R(s)\ G_S(s))$.

Mit $G_R(s) = K_P$ ergibt sich hieraus

$G_{ges}(s) = K_P\ G_S(s) / (1 + K_P\ G_S(s))$.

Frage 4.3.2 (4 Punkte): Für die Strecke sei $G_s(s) = b_0 / (s^2 + a_1 s + a_0)$. Welche Übertragungs-funktion ergibt sich für die geregelte Strecke mit dem P-Regler? Welchen Wert nimmt die Sprungantwort h(t) der geregelte Strecke im eingeschwungenen Zustand an ($h(t\rightarrow\infty)$)?

Lösung: Mit dem Zählerpolynom Z(s) und dem Nennerpolynom N(s) von $G_S(s) = Z(s) / N(s)$ erhält man allgemein für die geregelte Strecke:

$G_{ges}(s) = K_P\ Z(s) / (N(s) + K_P\ Z(s))$. Hieraus ergibt sich im speziellen Fall:

$G_{ges}(s) = K_P\ b_0 / (s^2 + a_1 s + a_0 + K_P\ b_0)$

Eingeschwungener Zustand mit Regler: $h(t\rightarrow\infty) = K_P\ b_0 / (a_0 + K_P\ b_0)$

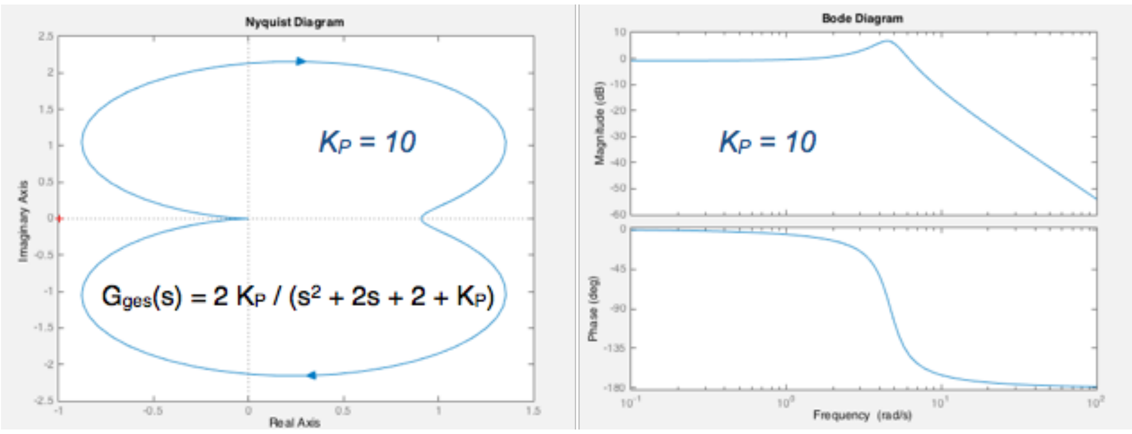
Frage 4.3.3 (6 Punkte): Für die Regelstrecke gelten folgende Werte: $b_0 = 2$, $a_1 = 2$, $a_0 = 2$. Fragen: (1) Wie lautet die Übertragungsfunktion der geregelten Strecke? (2) Auf welchen Wert schwingt sich die Sprungantwort h(t) für große Reglerkonstanten ein (z.B. Für $K_P > 10$)? (3) Berechnen Sie die Polstellen der Übertragungsfunktion für $K_P = 10$.

Lösung: (1) $G_{ges}(s) = 2\ K_P / (s^2 + 2s + 2 + K_P)$; (2) Für große Reglerkonstanten nähert sich der eingeschwungene Zustand der Sprungantwort der 1 (von kleineren Werten im einge-schwungenen Zustand aus). (3) Polstellen für $K_P = 10$: $G_{ges}(s) = 200 / (s^2 + 2s + 202)$; Quadratische Gleichung: Die Diskriminante ist kleiner 0, es ergibt sich also ein konjugiert komplexes Polpaar. Durch Einsetzen in die Lösungsformel $x_{1,2} = -p/2 \pm j \sqrt{(q - (p/2)^2)}$ erhält man die Pole $s_{1,2} = -1 \pm j\ 4{,}583$.

Frage 4.3.4 (6 Punkte): Qualitativer Einfluss der Reglereinstellung. Welchen Einfluss hat die Regler-konstante K_P auf die Strecke im Regelkreis? Beschreiben Sie (1) den Einfluss auf die Stellgröße, (2) den Verlauf der Sprungantwort der geregelten Strecke in Abhängigkeit der Reglerkonstanten K_P, (3) die Lage der Pole der Übertragungsfunktion der geregelten Strecke.

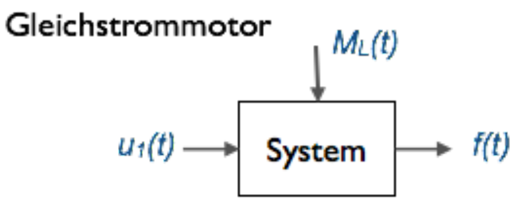
Lösung: (1) Der Regler zerrt in Abhängigkeit der Regelabweichung e(t) umso kräftiger an der Stellgröße u(t), je größer die Reglerkonstante K_P gewählt wird. Hierdurch verstärkt sich dann auch die Rückkopplung des durch die Regelstrecke gefilterten Signals. (2) Durch die stärkere Rückkopplung verringert sich einerseits der Fehler im eingeschwungenen Zustand (siehe Sprungantwort in Frage 2.3). Andererseits wird das System hierdurch potenziell de-stabilisiert. Dieser Effekt tritt auf durch höherfrequente Anteile des rückgekoppelten Signals, die bedingt durch die Verzögerung phasenverschoben sind. Im ungünstigsten Fall der Phasen-umkehr (Phasenverschiebung = 180 Grad) findet eine Mitkopplung dieser Anteile statt. (3) Der Imaginärteil des konjugiert komplexe Polpaars vergrößert sich. Zusammen mit der zunehmen-den Verstärkung im Zähler der Übertragungsfunktion tritt ein Resonanzpunkt bei höheren Frequenzen deutlicher hervor (siehe Bode Diagramm unten).

Nur zur Erläuterung der Musterlösung:



4.4. Drehzahlregelung für einen Motor

Ein Gleichstrommotor wird als System mit folgender Differenzialgleichung beschrieben. Hierbei ist $\omega(t) = 2\,\pi\, f(t)$ die Kreisfrequenz zur Drehzahl f(t). Mit $\dot\omega(t) = d\omega / dt$ ist die Ableitung der Kreisfrequenz bezeichnet. Das Lastmoment $M_L(t)$ stellt die Störgröße des Systems dar.



Differenzialgleichung:

$$\omega(t) = k_1\, u_1(t) - k_2\,(M_L(t) + J\,\dot\omega(t))$$

Frage 4.4.1 (4 Punkte): Berechnen Sie die Übertragungsfunktion des Systems aus der oben angegebenen Differenzialgleichung. Hinweis: Die Störgröße wird nicht berücksichtigt.

Lösung: Transformation in den Bildbereich ergibt

$$\Omega(s) = k_1\, U_1(s) - \; s\, k_2\, J\, \Omega(s)$$

Durch Umformen erhält man $\Omega(s)\,(1 + s\, k_2\, J) = k_1\, U_1(s)$ und hieraus

$$G(s) = F(s) / U_1(s) = \Omega(s) / 2\pi\, U_1(s) = \; k_1 / 2\pi\,(1 + s\, k_2\, J)$$

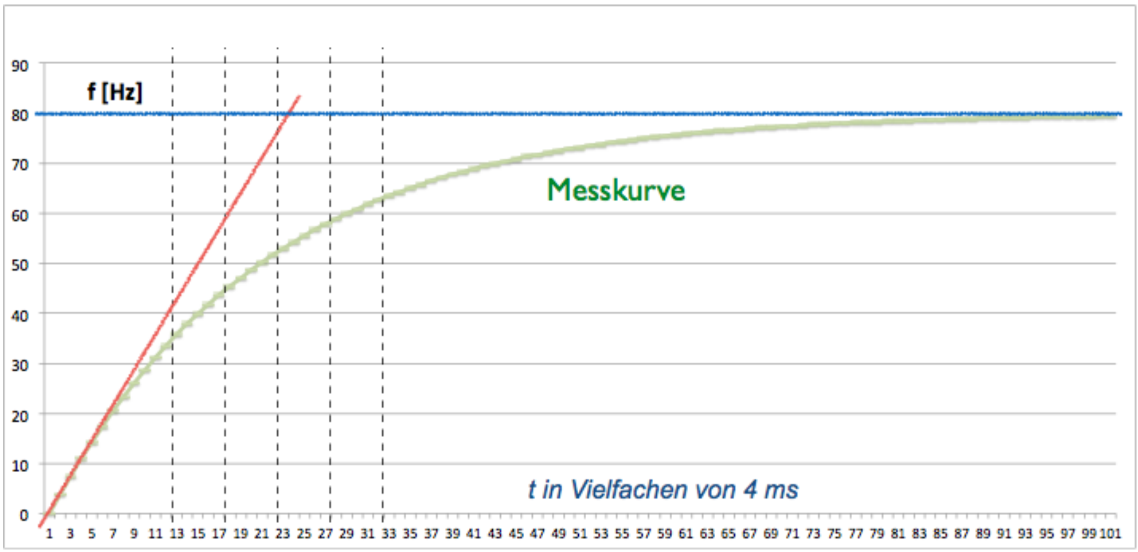
Frage 4.4.2 (4 Punkte): Berechnen Sie die Lage der Polstelle der Übertragungsfunktion. Welchen Einfluss hat das Trägheitsmoment J des Rotors auf die Lage der Polstelle? Welchen Einfluss hat das Trägheitsmoment des Rotors auf die Zeitkonstante des Systems?

Lösung: Polstelle = Nullstelle des Nenners, zu berechnen aus $(1 + s\, k_2\, J) = 0$.

Ergebnis: $s_1 = -1/ (k_2\, J) = 1/\tau$

Einfluss des Trägheitsmoments J: Je träger der Rotor, desto näher rückt die Polstelle in der komplexen Ebene auf der negativen reellen Achse in Richtung des Koordinatenursprungs (der Null). Der Kehrwert der Polstelle entspricht die Zeitkonstante τ des Systems. Die Zeit-konstante wächst mit zunehmender Trägheit J des Rotors, d.h. Das System reagiert träger.

Frage 4.4.3 (6 Punkte): Ein Motor mit Nennspannung $U_N = 24$ V und sonst unbekannten Parame-tern wurde wie folgt vermessen: Einschalten der Klemmenspannung $u_1(t) = U_N$ im Leer-lauf zum Zeitpunkt Null. Man erhält folgenden Verlauf der Drehzahl f(t). Ermitteln Sie hieraus die Übertragungsfunktion des Motors in der Form $G(s) = F(s)/U_1(s) = b / (1 + \tau s)$.



Lösung: (1) Die Zeitkonstante liest man ab zu τ = 25 * 4 ms = 100 ms = 0,1 s. (2) Der Faktor b in der Übertragungsfunktion ergibt sich aus dem Grenzwert der Sprungantwort im eingeschwungenen Zustand: $h(t \rightarrow \infty) = G(s \rightarrow 0) = b$ = 80 Hz / 24V = 3,33 Hz/V. Die Skalierung auf die Höhe der Sprungfunktion von 24V ist erforderlich, da für den Grenzwertsatz ein Einheits-sprung verwendet wurde.

Hieraus ergibt sich die Übertragungsfunktion zu $G(s) = 3{,}33 / (1 + 0{,}1\ s)$ Hz/V.

Frage 4.4.4 (4 Punkte): Lastmoment. Nehmen Sie an, der Motor hat sich beim Nennmoment auf die Nenndrehzahl eingeschwungen. Welchen Einfluss haben Lastwechsel um diesen Arbeitspunkt auf die Drehzahl des Motors? Welcher mathematische Zusammenhang ergibt sich? Begründen Sie Ihre Aussage mit Hilfe der Differenzialgleichung des Motors.

Lösung: Differenzialgleichung: $\omega(t) = k_1\, u_1(t) - k_2\, (M_L(t) + J\, \dot{\omega}(t))$

Mit $M_L(t) = M_N + \Delta M(t)$ und $u(t) = u_N$ erhält man den Zusammenhang

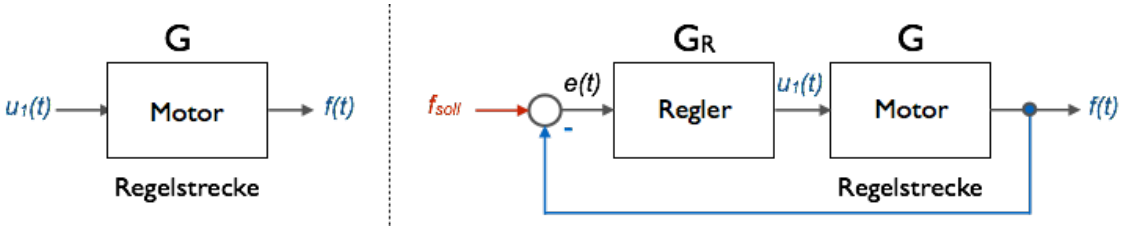
$$\omega(t) = \omega_N - k_2\, \Delta M(t) + k_2\, J\, \dot{\omega}(t)$$

wobei $\omega_N = k_1\, u_N - k_2\, M_N$ = const.

Lastwechsel $\Delta M(t)$ um den gewählten Arbeitspunkt wirken sich also linear auf die Dreh-zahl aus, wobei das Trägheitsmoment J des Rotors Lastsprünge puffert.

Frage 4.4.5 (4 Punkte): Regelkreis im allgemeinen Fall. Skizzieren Sie einen Regelkreis für den Motor. Der Regler hat die Übertragungsfunktion $G_R(s)$, der Motor (als Regelstrecke) die Übertragungsfunktion G(s). Welche Übertragungsfunktion hat der Regelkreis? Welche Übertragungs-funktion erhält man, wenn als Regler wird ein P-Regler verwendet wird ($G_R(s) = K_P$)?

Lösung:



Lösung: aus (1) $F(s) = G_R(s)\, G(s)\, E(s)$ und (2) $E(s) = F_{soll}(s) - Y(s)$ erhält man

$$G_{ges}(s) = G_R(s)\, G(s) / (1 + G_R(s)\, G(s)).$$

Mit $G_R(s) = K_P$ ergibt sich für den Regelkreis

$$G_{ges}(s) = K_P\, G(s) / (1 + K_P\, G(s)).$$

Frage 4.4.6 (6 Punkte): P-Regler. Als Regler wird ein P-Regler verwendet ($G_R(s) = K_P$). Als Übertragungsfunktion des Motors wird $G(s) = b / (1 + \tau s)$ verwendet. Welchen Einfluss hat der Regler auf die Zeitkonstante des geregelten Systems? Wie muss die Regler-konstante gewählt werden, damit die Zeitkonstante des geregelten Motors sich im Vergleich zur Zeitkonstante des ungeregelten Motors halbiert?

Lösung: Einsetzen von $G(s) = b / (1 + \tau s)$ in $G_{ges}(s) = K_P\, G(s) / (1 + K_P\, G(s))$ ergibt

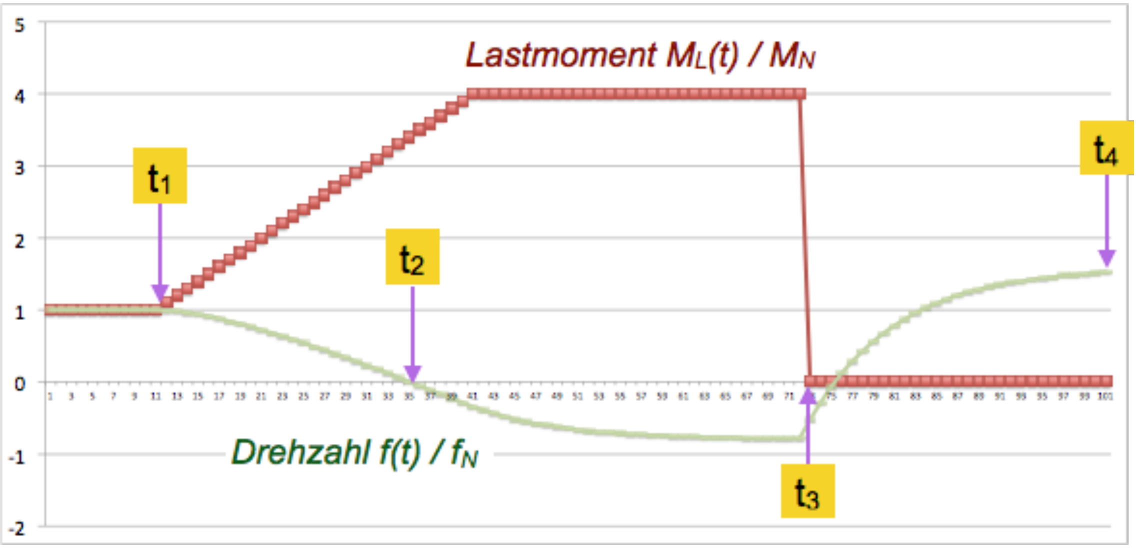
$$G_{ges}(s) = b\, K_P / (1 + \tau s + b\, K_P)$$

Polstelle des ungeregelten Systems: Aus $(1 + \tau s) = 0$ folgt $s_1 = -1/\tau$.

Polstelle des geregelten Systems: Aus $(1 + \tau s + b\, K_P) = 0$ folgt $s'_1 = -(1 + b\, K_P) / \tau$

Interpretation: Die Polstelle verlagert sich mit wachsender Reglerkonstante KP weiter nach links in der komplexen Ebene, bzw. Die Zeitkonstante des Regelkreises $\tau' = -1/s'_1 = \tau / (1 + b\, K_P)$ verringert sich. Die Zeitkonstante halbiert sich ($\tau' = \tau/2$), wenn $K_P = 1/b$ gewählt wird.

Frage 4.4.7 (6 Punkte): Ungeregelter Motor. Folgende Abbildung zeigt einen Simulationslauf des ungeregelten Systems.



Das Diagramm zeigt eine normierte Darstellung des Verlaufs der Störgröße (Last-moment) und der Ausgangsgröße (Drehzahl). Aus welchem Zustand startet das System? Erläutern Sie das Verhalten des Systems zu den in der Abbildung gezeigten Zeitpunkten und zwischen diesen Zeitpunkten.

Lösung: Das System startet aus einem eingeschwungenen Zustand auf einem Arbeitspunkt bei Nennlast und Nenndrehzahl. Zum Zeitpunkt t_1 steigt das Lastmoment kontinuierlich an bis zum 4-fachen Nennmoment. Der Motor reagiert hierauf durch Verringerung seiner Drehzahl. Zum Zeitpunkt t_2 kehrt sich die Drehrichtung des Motors um: Durch die konstante Klemmenspannung u_1 im Arbeitspunkt (= Nennspannung) ist der Motor nicht in der Lage, das geforderte Moment zu erbringen.

Bei stabilem 4-fachen Lastmoment stabilisiert sich die Drehzahl in Rückwärtsrichtung bei ca -0,8 der Nenndrehzahl zwischen t_2 und t_3. Zum Zeitpunkt t_3 fällt die Last komplett ab (M_L=0) und der Motor beginnt auf seine Leerlaufdrehzahl hochzulaufen, die er zum Zeitpunkt t_4 fast erreicht.

Frage 4.4.8 (6 Punkte): Geregelter Motor. Folgende Abbildung zeigt einen Simulationslauf des geregelten Systems. Es wurde ein P-Regler verwendet. Das Diagramm zeigt eine normierte Darstellung des Verlaufs der Störgröße (Lastmoment) und der Ausgangsgröße (Drehzahl). Aus welchem Zustand startet das System? Erläutern Sie das Verhalten des Systems zu den in der Abbildung gezeigten Zeitpunkten und zwischen diesen Zeitpunkten. Skizzieren Sie den Verlauf der Klemmenspannung $u_1(t)$ des Motors (der Stellgröße). Hinweis: Verwenden Sie für die Skizze bitte in der Kopie des Diagramms unten auf dem Arbeitsblatt in der normierten Form $u_1(t)/u_N$.

Englisch - Deutsch

Denominator	Nenner
Discrete-time	zeitdiskret
Eigenvalue	Eigenwert
Eigenvector	Eigenvektor
Numerator	Zähler
State estimator	Beobachter
State-space model	Zustandsmodell (Modell im Zustandsraum)
Transfer function	Übertragungsfunktion
Root Locus	Wurzelort

...

...

Abkürzungen

ADC	Analoge-Digital Converter (Analog-Digital-Wandler)
$T = 1/f$	Schwingungsdauer, Periodendauer [s]
$f = 1/T$	Frequenz, Anzahl der Schwingungen pro Zeiteinheit [1/s]
$\omega = 2\pi f = 2\pi/T$	Kreisfrequenz, Winkelgeschwindigkeit der Kreisbewegung [1/s]
E	Energie [Joule, J, N m, W s, kg m^2/s^2] potentielle Energie $E_p = 1/2\ k\ y^2$, kinetische Energie, Translation $E_k = 1/2\ m\ v^2$, kinetische Energie, Rotation $E_r = 1/2\ J\ \omega^2$, Energie elektrisches Feld $E_C = 1/2\ CU^2$, Energie magnetisches Feld $E_L = 1/2\ LI^2$
G(s)	Übertragungsfunktion (Abbild der Impulsantwort)
H(s)	Übergangsfunktion (Abbild der Sprungantwort)
PWM	Pulsweitenmodulation
SISO	Single Input - Single Output (Eingrößensystem)

Literatur

(1) Manfred Berger, Grundkurs der Regelungstechnik (mit Anwendungen der Student Edition von MATLAB und SIMULINK), Books on Demand Verlag, 2001, ISBN-13: 978-3831108473

(2) Horst Kuchling, Taschenbuch der Physik; Hanser Verlag GmbH & CO. KG; 20. aktualisierte Auflage (2010), ISBN-13: 978-3446424579

(3) Bronstein, Semendjajew, Musiol, Mühling; Taschenbuch der Mathematik: Verlag: Harri Deutsch; 7. Auflage (2008); ISBN-13: 978-3817120079

(4) Holger Lutz und Wolfgang Wend, Taschenbuch der Regelungstechnik: mit MATLAB und Simulink, Harri Deutsch Verlag, 2012, 9. Auflage: 9, ISBN-13: 978-3817118953

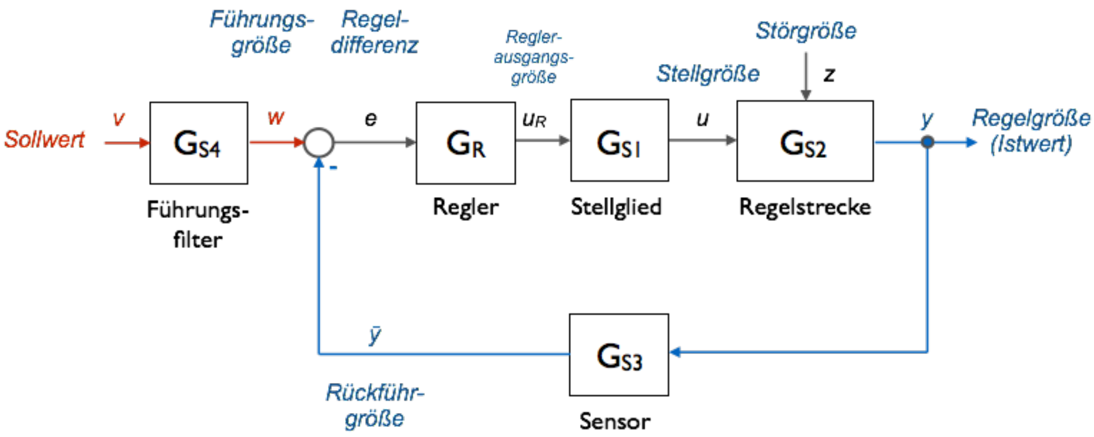
(5) Jan Lutze, Regelungstechnik 1: Systemtheoretische Grundlagen, Analyse und Entwurf Einschleifiger Regelungen, Springer Verlag, 2013, 9. Auflage, ISBN-13: 978-3642295324

(6) Tobias Fläming-Vetter, Lineare Regler in der Praxis, Folien zur Vorlesung mit Laborversuch, DHBW-Stuttgart, Mechatronik, 2014

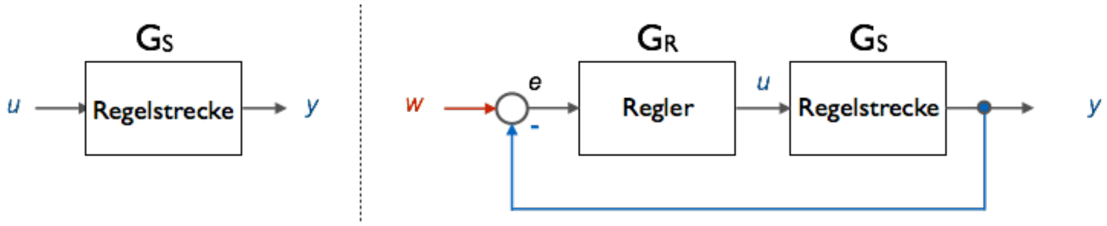
(7) Roboternetz, Übersicht über Regler, http://rn-wissen.de/index.php/Regelungstechnik

Anhang A - Regelkreis

Definitionen



Strecke und geschlossener Regelkreis



Übertragungsfunktion der Regelstrecke (ungeregelter Fall):

$$Y(s) = G_S(s)\, X(s)$$

Übertragungsfunktion des Regelkreises (geregelter Fall):

$$E(s) = (W(s) - Y(s)) \qquad (1)$$

$$Y(s) = G_R(s)\, G_S(s)\, E(s) \qquad (2)$$

Nach Einsetzen von (1) in (2) Umformung nach Y(s) erhält man:

$$G(s) = G_R(s)\, G_S(s) / (1 + G_R(s)\, G_S(s)) \qquad (3)$$

Beispiel: P-Regler

$G_S(s) = Z(s) / N(s)$ mit Zählerpolynom Z(s) und Nennerpolynom N(s)

$G_R(s) = K_p$

Einsetzen in (3) ergibt:

$$G(s) = K_P\, Z(s) / (N(s) + K_P\, Z(s))$$

Anhang B - Laplace Transformation

Definition

$$F(s) = L[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt$$

Mathematische Formeln

Grenzwertsätze der Laplace-Transformation:

Anfangswertsatz: $\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} F(s)\, s$

Endwertsatz: $\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} F(s)\, s$

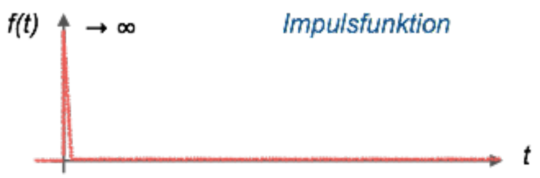
Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung (wobei F(t) = Stammfunktion von f(t)):

$$\int_a^b f(\tau)\, d\tau = F(b) - F(a) = [\, F(t)\,]_a^b$$

Partielle Integration: $\int u(\tau)\, v'(\tau)\, d\tau = u(t)\, v(t) \;+ \int u'(\tau)\, v(\tau)\, d\tau$

Beispiele zur Laplace Transformation

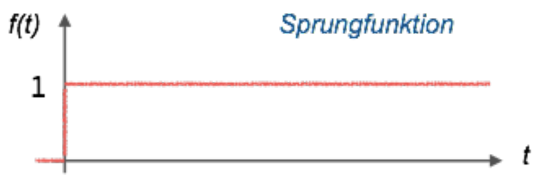
Impulsfunktion:



Definition im Zeitbereich: $\delta(t) \to \infty$ für $t \to 0$; 0 sonst

Bildfunktion: $F(s) = 1$

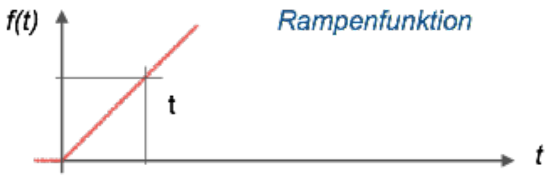
Sprungfunktion:



Definition im Zeitbereich: $f(t) = 1$ für $t \geq 0$; 0 sonst

Bildfunktion: $F(s) = 1/s$

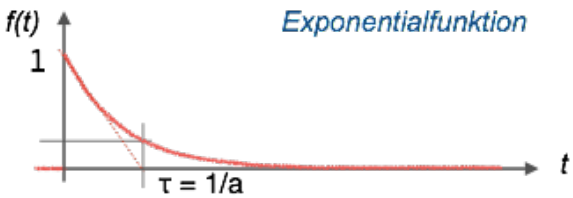
Rampenfunktion:



Definition im Zeitbereich: $f(t) = t$ für $t \geq 0$; 0 sonst

Bildfunktion: $F(s) = 1/\,s^2$

Exponentialfunktion:



Definition im Zeitbereich: $f(t) = e^{-at}$ für $t \geq 0$; 0 sonst

Bildfunktion: $F(s) = 1/\,(s+a)$

Polstelle: $p = -a$

Sinus- und Cosinus:

Definition im Zeitbereich: $f_1(t) = \sin(\omega t)$ für $t \geq 0$; 0 sonst

$f_2(t) = \cos(\omega t)$ für $t \geq 0$; 0 sonst

Bildfunktion: $F_1(s) = \omega \,/\, (s^2 + \omega^2)$

$F_2(s) = s \,/\, (s^2 + \omega^2)$

Polstellen: $p_{1,2} = \pm j\omega$ (konjugiert komplexes Polpaar)

Gedämpfte Schwingung (Sinus):

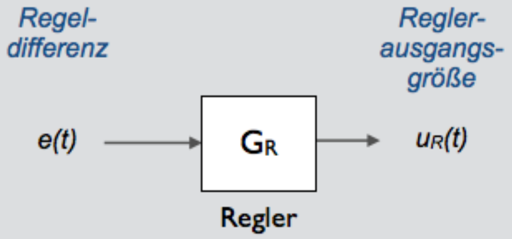
Definition im Zeitbereich: $f(t) = e^{-at} \sin(\omega t)$ für $t \geq 0$; 0 sonst

Bildfunktion: $F(s) = \omega \,/\, ((s + a)^2 + \omega^2)$

Polstellen: $p_{1,2} = -a \pm j\omega$ (konjugiert komplexes Polpaar)

Anhang C - Reglertypen

P-Regler



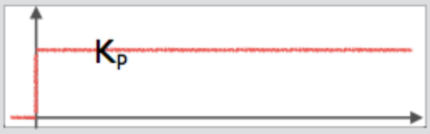
$$u_R(t) = K_P * e(t)$$

$$u_R(k) = K_P * e(k)$$

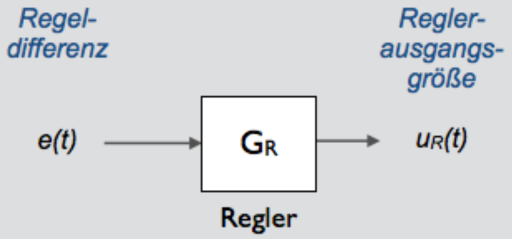
Übertragungsfunktion

$$G_R = K_p$$

Sprungantwort



I-Regler



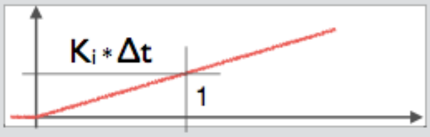
$$u_R(t) = K_i * \int e(\tau)\, d\tau, \qquad \tau = 0 \text{ bis } t$$

$$u_R(k) = K_i * \Delta t * \Sigma e(i), \quad i = 0, ..., k$$

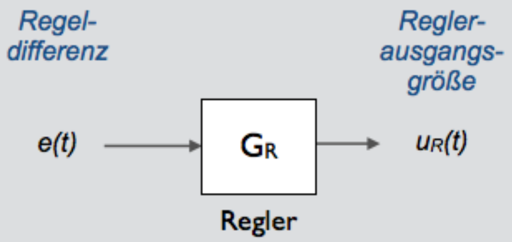
Übertragungsfunktion

$$G_R(s) = K_i / s$$

Sprungantwort



PID-Regler



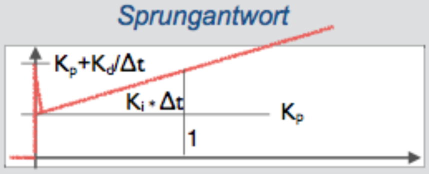
$$u_R(t) = K_P * e(t) + K_i * \int e(\tau)\, d\tau + K_d\, de(t)/dt$$

$$u_R(k) = K_P * e(k) + K_i * \Delta t * \Sigma e(i) + K_d * (e(k)-e(k-1))/\Delta t$$

Übertragungsfunktion

$$G_R(s) = K_p + K_i / s + K_d\, s$$

Sprungantwort



Anhang D - MATLAB Befehle

Laplace-Transformation: F = laplace(f); f= ilaplace(F)

Beispiel: syms s t /* Variablen deklarieren

G=3.33/(1 + 0.08 *s) /* Vorgabe der Übertragungsfunktion (Dezimalpunkt=Punkt)

g= ilaplace(G) /* Rücktransformation

g= (333/8) * exp(-(25*t)/2) /* Ergebnis

Differenzieren und Integrieren: diff(f,t), int(f,t)

Beispiel: diff(g,t) /* wurde oben definiert

ans = -(8325/16) * exp(-(25*t)/2) /* Ergebnis

Partialbruchzerlegung: diff(int(G,s))

Beispiel: G=(s+3)/(s^2 -4) /* [G]=Datentyp sym

diff(int(G,s))

ans = 5/(4*(s-2)) - 1/(4*(s+2))

Gebrochen rationale Funktion durch Zeilenvektoren eingeben:

Beispiel: Z = [1, 3]; N = [1, 0, -4] /* Eingabe Zähler Z und Nenner N

Koeffizienten der Partialbruchzerlegung: residue(Z, N)

residue(Z,N)

ans = 1.25; -0.25 /* Ergebnis

[K, P] = residue(Z,N) /* alternative Eingabe für Koeffizienten und Polstellen

K=1.25; -0.25; P = 2.0; -2.0 /* Ergebnis

Z und N in die Übertragungsfunktion übernehmen:

G = tf(Z, N) /* tf = transfer function; [G]=Datentyp tf

(s + 3) / (s^2 - 4) /* Ergebnis

Pole und Nullstellen berechnen:

zeroes = tzero(G)

zeroes = -3.0 /* Ergebnis

poles = pole(G)

poles = 2.0; -2.0 /* Ergebnis