Wellen und Leitungen

Vorlesung und Übungen

Ausgabe 0.3, Mai 2013

Dozent: Stephan Rupp

Inhaltsverzeichnis

1. Schwingungen 4
   - 1.1. Differentialgleichung 4
   - 1.2. Mechanische Schwingungen 6
   - 1.3. Elektrische Schwingungen 8
   - 1.4. Phasorenschreibweise 10
2. Wellen 12
   - 2.1. Wellengleichung 13
   - 2.2. Mechanische Wellen 14
   - 2.3. Elektromagnetische Wellen 15
   - 2.4. Phasorenschreibweise 16
3. Wellenausbreitung auf Leitungen 19
   - 3.1. Zweileitersysteme 19
   - 3.2. Leitungsmodell (verlustlose Leitung) 20
   - 3.3. Wellenausbreitung 22
   - 3.4. Reflexionsfaktor 24
   - 3.5. Leitungstransformation 27
   - 3.6. Smith-Diagramm 29
   - 3.7. Verlustbehaftete Leitung 31
4. Streuparameter 34
   - 4.1. Einführung von Wellengrößen 34
   - 4.2. Beschreibung eines Zweitors durch Streuparameter 35
   - 4.3. Eigenschaften aus Streuparametern ablesen 37
   - 4.4. Streuparameter berechnen 38
5. Freie Wellen 40
   - 5.1. Vom Schwingkreis zum Dipol 40
   - 5.2. Elektromagnetische Wellen im Fernfeld 41
   - 5.3. Ebene Wellen als Lösung 43

5.4. Wellengleichungen 45

5.5. Kugelwellen 46

6. Übungen 47

6.1. Leistungsanpassung 47

6.2. Hochfrequenzanwendungen 47

6.3. Leitungstransformation 48

6.4. Leistungsaufnahme bei komplexen Abschlusswiderständen 49

6.5. Stehwellenverhältnis 49

6.6. Blindwiderstände und Blindleitwerte im Smith-Diagramm 52

6.7. Anpassschaltung 52

6.8. Berechnung komplexer Impedanzen 55

6.9. Frequenzgänge im Smith-Diagramm 56

6.10. Verhalten kurzer Leitungen 56

6.11. Berechnung der Streuparameter 56

6.12. Streuparameter und Wirkleistung 56

6.13. Verkettung von Zweitoren 57

6.14. Polarisation 58

6.15. Reflexionen an Grenzflächen 58

6.16. Anpassschaltung 60

6.17. Berechnung der Streuparameter 64

6.18. Anschluss des Zweitors mit Hilfe einer Leitung 65

6.19. Induktive Last 67

6.20. Berechnung der Streuparameter 69

6.21. Anpassschaltung 72

1. Schwingungen

1.1. Differentialgleichung

Harmonische Schwingungen kann man als Projektion einer gleichförmigen Kreisbewegung betrachten. Hierbei bildet man den Phasenwinkel auf der x-Achse (Abszisse) ab, sowie die Projektion des Zeigers auf die y-Achse (Ordinate) als Auslenkung (Elongation) y(t). Der Scheitelpunkt der periodischen Funktion beschreibt die maximale Auslenkung der Schwingung, die Amplitude ŷ. Bei einer gleichförmigen Kreisbewegung ist der Phasenwinkel ϕ eine lineare Funktion der Zeit.

$$\phi = \omega\, t + \phi_0 \qquad (1.1)$$

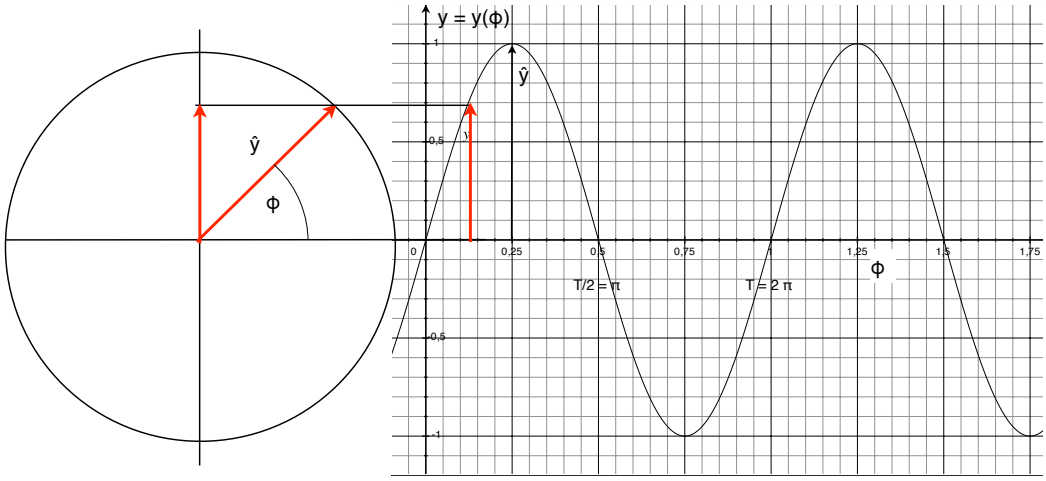


Bild 1.1 Harmonische Schwingung

Hierbei stellt ω die Kreisfrequenz der Schwingung dar, und ϕ_0 den Phasenwinkel zum Zeitpunkt t = 0. Die Kreisfrequenz ergibt sich aus der Periodendauer T, in der eine Umdrehung durchlaufen wird, bzw. aus der Frequenz f der Schwingung.

$$\omega = 2\,\pi / T = 2\,\pi\, f \qquad (1.2)$$

Die Auslenkung in Abhängigkeit der Zeit lässt sich als harmonische Schwingung in folgender Weise beschreiben:

$$y(t) = \hat{y} \sin(\phi) = \hat{y} \sin(\omega\, t + \phi_0) \qquad (1.3)$$

Diese Gleichung beschreibt die Vertikalkomponente der Kreisbewegung des Zeigers in Abbildung 1.1. Die Vertikalkomponente pendelt auf der y-Achse des Kreises zwischen den Werten +1 und -1. Dabei ist die Geschwindigkeit der Vertikalkomponente nicht konstant. Die oberen und unteren Scheitelpunkten sind Umkehrpunkte, hier kommt die Auslenkung zum Stillstand. Bei den Nulldurchgängen ist die Geschwindigkeit jeweils maximal, jedoch mit unterschiedlicher Richtung (abwärts bzw. aufwärts). Die Geschwindigkeit der Auslenkung y(t) lässt sich durch Differenzieren nach der Zeit errechnen.

$$v(t) = \dot{y}(t) = \hat{y}\, \omega \sin(\omega\, t + \phi_0 + \pi/2) \qquad = \hat{y}\, \omega \cos(\omega\, t + \phi_0) \qquad (1.4)$$

Die Schreibweise $\dot{y}$ bedeutet hierbei die Differenzierung d/dt nach der Zeit. Es zeigt sich, dass die Geschwindigkeit der Pendelbewegung der Auslenkung um eine Viertelperiode (π/2)

voraus läuft. Erneutes Differenzieren nach der Zeit ergibt die Beschleunigung der Pendelbewegung des Zeigers auf der y- Achse.

$$a(t) = \ddot{y}(t) = \hat{y}\,\omega^2 \sin(\omega t + \phi_0 + \pi) \qquad = -\hat{y}\,\omega^2 \sin(\omega t + \phi_0) \qquad (1.5)$$

Die Beschleunigung der Pendelbewegung ist gegenüber der Auslenkung eine halbe Periode (π) versetzt, folgt also der Auslenkung mit umgekehrten Vorzeichen. Im Punkt der maximalen Auslenkung ist auch die Beschleunigung maximal: im unteren Umkehrpunkt wird maximal nach oben beschleunigt, im oberen Umkehrpunkt maximal nach unten. In den Nulldurchgängen gibt es keine Beschleunigung.

Die zur Auslenkung umgekehrt gepolte Beschleunigung ist charakteristisch für Schwingungen. Physikalisch lässt sich eine solche Beschleunigung durch eine Rückstellkraft erzeugen, beispielsweise bei einem Pendel durch eine Feder mit Ruhepunkt im Nulldurchgang. In diesem Fall findet ein periodischer Wechsel zwischen potentieller Energie (maximal in den Endpunkten) und kinetischer Energie (maximal in den Nulldurchgängen) statt. Für elektromagnetische Schwingungen gilt der gleiche Zusammenhang für die Beschleunigung von Ladungen in einem Leiter. Die Energie pendelt hier zwischen elektrischem Feld (Endpunkte) und magnetischem Feld (Nulldurchgänge).

Schwingungen lassen sich als Differentialgleichung folgendermassen beschreiben:

$$\ddot{y}(t) + \omega_0^2\, y(t) = 0 \qquad (1.6)$$

Hierbei ist $\omega_0 = 2\pi / T$ die Eigenfrequenz der Schwingung. Wie die Betrachtung gezeigt hat, erfüllen die periodische Funktionen wie in Gleichung (1.3) diese Bedingung. Gleichung (1.3) ist somit eine Lösung der Differentialgleichung (1.6).

Gleichung (1.6) beschreibt eine ungedämpfte Schwingung. Reale Schwingungen verlieren Energie und kommen ohne Energiezufuhr irgendwann zum Stillstand. Gedämpfte Schwingungen werden durch folgende Differentialgleichung beschrieben:

$$\ddot{y}(t) + 2\delta\, \dot{y}(t) + \omega_0^2\, y(t) = 0 \qquad (1.7)$$

Im Unterschied zum unbedämpften Fall findet sich jetzt ein geschwindigkeitsproportionaler Anteil, der eine Reibung oder einen Widerstand zum Ausdruck bringt. Die Konstante δ wird als Abklingkoeffizient bezeichnet. Die Gleichung der gedämpften Schwingung wird durch Funktionen folgenden Typs gelöst:

$$y(t) = \hat{y}_0\, e^{-\delta t} \sin(\phi) = \hat{y}_0\, e^{-\delta t} \sin(\omega_d t + \phi_0) \qquad (1.8)$$

Zusätzlich zum periodischen Anteil $\sin(\phi)$ enthält diese Funktion einen mit der Zeit exponentiell abklingenden Anteil $e^{-\delta t}$. Die Frequenz der Schwingung ist ebenfalls gedämpft. Die Kreisfrequenz der gedämpften Schwingung in Gleichung (1.8) mit ω_d bezeichnet (Eigenfrequenz der gedämpften Schwingung). Die Frequenz der ungedämpften Schwingung (Eigenfrequenz der ungedämpften Schwingung) und ist mit ω_0 bezeichnet.

Zwischen diesen beiden Größen besteht als Voraussetzung für die Lösung der Differentialgleichung (1.7) folgender Zusammenhang:

$$\omega_d^2 = \omega_0^2 - \delta^2 \qquad (1.9)$$

Die Schwingungsdauer beträgt folglich

$$T_d = 2\pi / \omega_d = 2\pi / \sqrt{(\omega_0^2 - \delta^2)} \qquad (1.10)$$

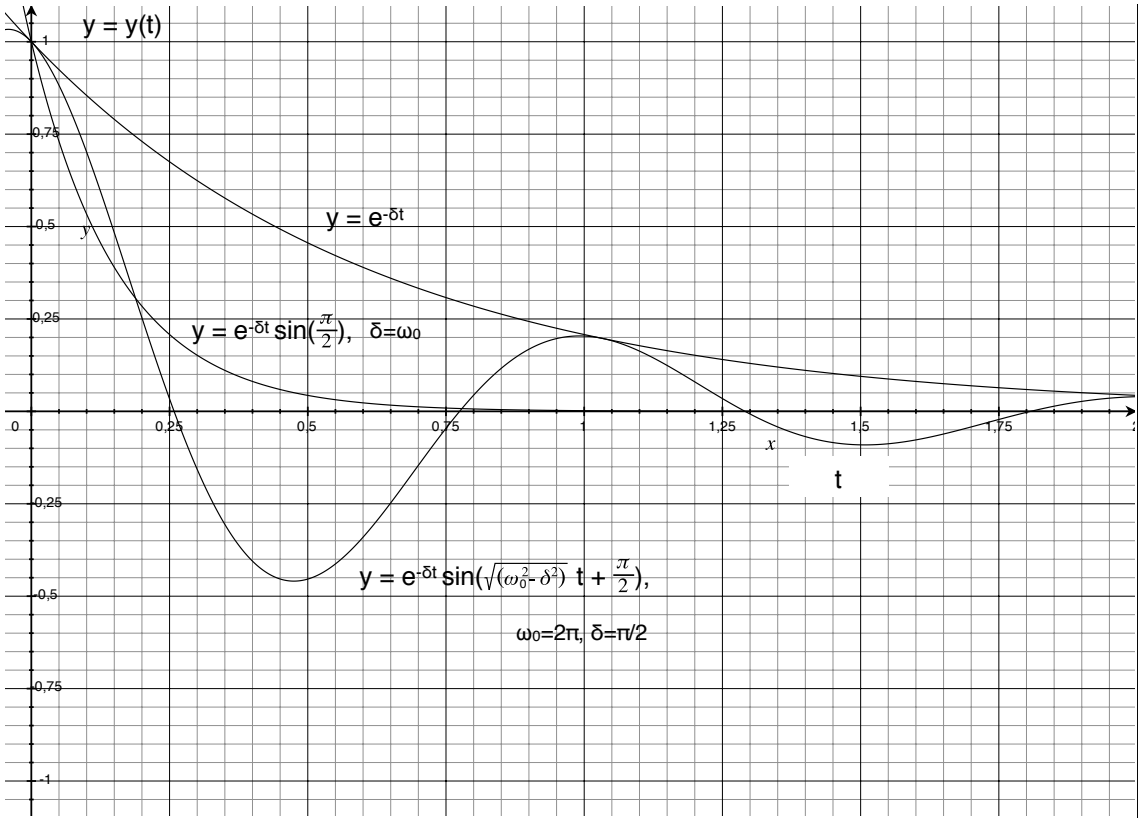


Bild 1.2 Gedämpfte Schwingung

Die gedämpfte Schwingung gemäß Gleichung (1.7) umfasst als Verallgemeinerung von Gleichung (1.3) den ungedämpften Fall, wenn der Abklingkoeffizient $\delta=0$ ist. Ein weiterer spezieller Fall ist der aperiodische Grenzfall, der sich ergibt, wenn $\delta=\omega_0$ ist. Abhängig vom Startwert y(0), also vom Phasenwinkel ϕ_0 gemäß Gleichung (1.8), kehrt das System nach einmaliger Auslenkung ohne periodische Schwingung in die Ruhelage zurück.

Der Begriff „Eigenfrequenz“ soll auf die durch den ungedämpften bzw, gedämpften Schwingkreis gegebene Frequenz hinweisen, im Unterschied zur Erregung von Schwingungen durch äußere Einflüsse (erzwungene Schwingungen). Die Eigenfrequenz kennzeichnet den Resonanzbereich des Schwingkreises.

1.2. Mechanische Schwingungen

Im mechanischen Fall lassen sich Schwingungen beispielsweise an einem Federpendel beobachten, wir in Abbildung 1.3 dargestellt. Die Federkonstante k beschreibt die Kraft, die für eine Auslenkung der Feder erforderlich ist und wird demzufolge in Newton pro Meter gemessen. Um die Masse m zu bewegen ist nach dem Grundgesetz der Dynamik eine Kraft erforderlich, die proportional zur Masse, sowie zur Beschleunigung der Masse ist: F = m a. Diese Kraft misst sich mit der Kraft zur Auslenkung der Feder um die Entfernung y.

$$m\,a = -\,y\,k \tag{1.11}$$

Die Beschleunigung wirkt hierbei entgegen der Auslenkung. Durch Umformung und Einsetzen der zweiten Ableitung des Weges y(t) für die Beschleunigung $a(t) = \ddot{y}(t)$ erhält man die Differentialgleichung der Schwingung.

$$\ddot{y}(t) + k/m\, y(t) = 0 \qquad (1.12)$$

Ein Vergleich mit Gleichung (1.6) zeigt, dass der Faktor k/m das Quadrat der Eigenfrequenz des Federpendels beschreibt, $k/m = \omega_0^2$, (wobei $\omega = \omega_0$, da im ungedämpften Fall das Pendel mit der Eigenfrequenz des ungedämpften Schwingkreises schwingt). Das Verhältnis von Federkraft zur Masse bestimmt die Eigenfrequenz der Schwingung.

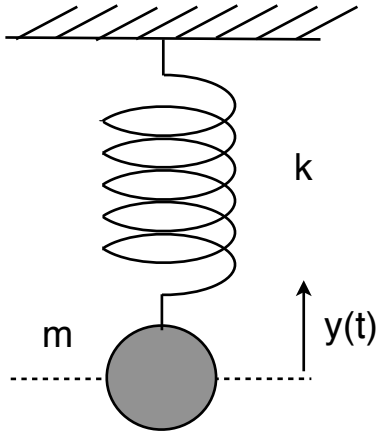


Bild 1.3 Federpendel

Die Energie des ungedämpft schwingenden Systems ist konstant. Die Energie ergibt sich aus der Kombination von kinetischer Energie und potentieller Energie. In den Nulldurchgängen ist das Pendel am schnellsten, hat also die größte kinetische Energie. Da die Nulldurchgänge dem Ruhepunkt der Feder entsprechen, ist hier die potentielle Energie gleich Null. An den Umkehrpunkten ist die Auslenkung am größten und somit die potentielle Energie maximal. Da an den Umkehrpunkten die Geschwindigkeit des Pendels Null ist, ist die kinetische Energie hier ebenfalls gleich Null.

Gemäß Definition der potentiellen Energie E_p und der kinetischen Energie E_k ergibt sich folgender Zusammenhang.

$$E = E_p + E_k = 1/2\, k\, y^2 + 1/2\, m\, v^2 \qquad (1.13)$$

Durch Einsetzen der Auslenkung $y = \hat{y} \sin(\omega t + \phi_0)$, (siehe Gleichung (1.3)), sowie der Geschwindigkeit $v = \hat{y}\, \omega \sin(\omega t + \phi_0 + \pi/2)$ (siehe Gleichung (1.4)) ergibt sich insgesamt für die Energie des Systems:

$$E = 1/2\, k\, \hat{y}^2 \sin^2(\omega t + \phi_0) + 1/2\, m\, \hat{y}^2\, \omega^2 \sin^2(\omega t + \phi_0 + \pi/2) \qquad (1.14)$$

Durch Einsetzen von $m\, \omega^2 = k$ ergeben sich für beide Anteile der Energie gleiche Amplituden der Größe $\hat{E} = 1/2\, k\, \hat{y}^2$. Für den Verlauf beider Energieanteile ergibt sich das folgende Diagramm.

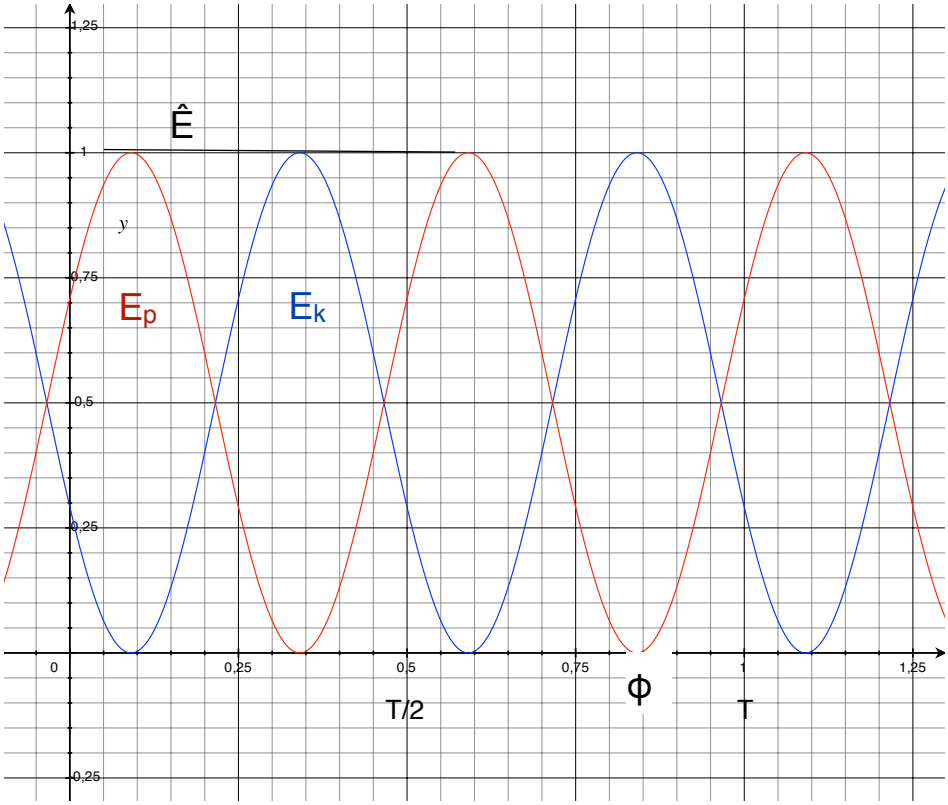


Bild 1.4 potentielle Energie und kinetische Energie

Übung 1.1: Weise nach, dass die Summe aus kinetischen Energie und potentieller Energie konstant ist. Wie groß ist die Gesamtenergie? Wie groß sind die Mittelwerte der jeweiligen Energieanteile? In welcher physikalischen Einheit wird die Energie dargestellt?

1.3. Elektrische Schwingungen

In einem elektrischen Schwingkreis befindet sich eine Kapazität C und eine Induktivität L. Zur initialen Auslenkung wird die Kapazität mit der Ladungsmenge Q geladen. Die schwingende Größe ist die Ladung mit dem Augenblickswert q(t).

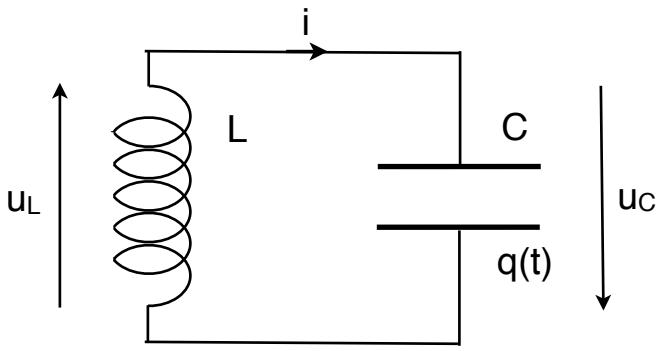


Bild 1.5 elektrischer Schwingkreis

Zu jedem Zeitpunkt müssen die Spannungen über der Kapazität und der Induktivität übereinstimmen, d.h. $u_L + u_C = 0$. Durch Einsetzen von $u_C = q(t)/C$ und $u_L = L\, di/dt = L\, q``(t)$ ergibt sich die Differentialgleichung der Schwingung.

$$q``(t) + (1/ L C)\, q(t) = 0 \qquad (1.15)$$

Durch Vergleich mit der Differentialgleichung (1.6) ergibt sich die Eigenfrequenz der Schwingung zu

$$\omega_0^2 = 1/ LC \qquad (1.16)$$

Für die Periodendauer der Schwingung erhält man somit $T = 2\pi / \omega_0 = 2\pi / \sqrt{LC}$. Eine Lösung der Differentialgleichung (1.15) ist die Funktion

$$q(t) = q\hat{} \sin (\omega t + \phi_0) \qquad (1.17)$$

Durch Division der Gleichung (1.17) durch die Kapazität C ergibt sich die Spannung u(t). Durch Differenzieren von Gleichung (1.17) nach der Zeit erhält man den Strom i(t).

$$u(t) = \hat{u} \sin (\omega t + \phi_0) \qquad (1.18)$$

$$i(t) = q\hat{}\omega \sin (\omega t + \phi_0 + \pi/2) = \hat{i} \cos (\omega t + \phi_0) \qquad (1.19)$$

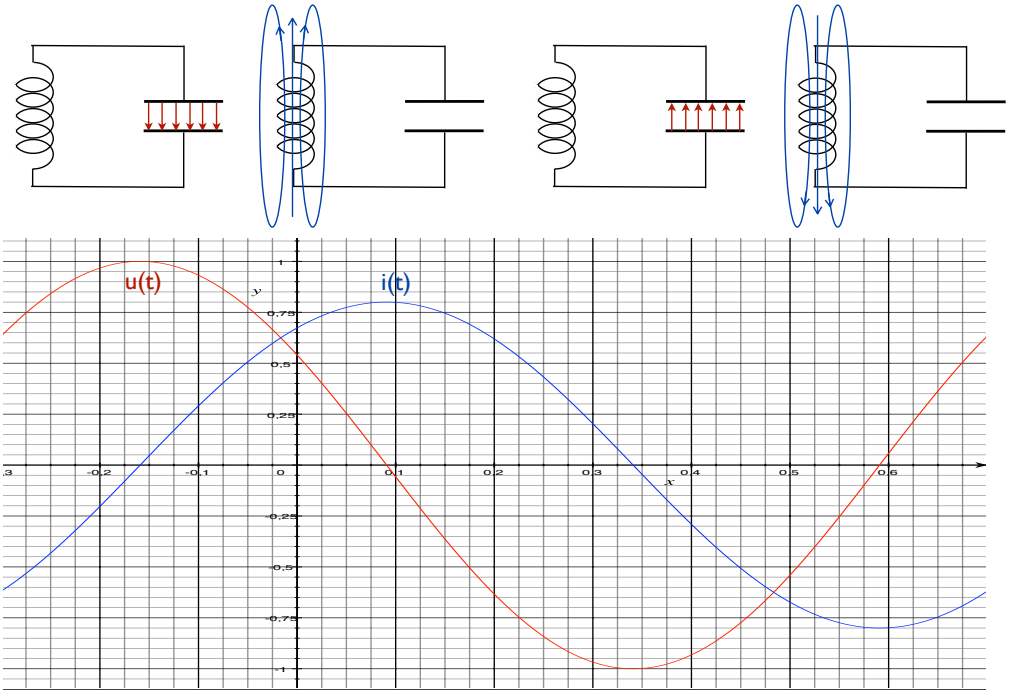


Bild 1.6 Verlauf von Strom und Spannung

Das Pendeln der Ladung im Schwingkreis führt zum wechselweisen Aufbau eines elektrischen Feldes in der Kapazität und eines magnetischen Feldes in der Induktivität. Strom und Spannung schwingen mit 90^0 phasenversetzt. Die Spannung folgt der Ladung und folgt somit in Analogie zum mechanischen Pendel der Auslenkung y(t). Der Strom als zeitliche Ableitung folgt der Geschwindigkeit der Ladung und somit in Analogie zum mechanischen Pendel der Geschwindigkeit v(t) als zeitliche Ableitung der Auslenkung.

Laut Definition gilt für die elektrische Energie und für die magnetische Energie

$$E_C = 1/2\, C\, u^2 \qquad (1.20)$$

$$E_L = 1/2\ L\ i^2 \qquad (1.21)$$

Durch Einsetzen der Spannung u(t) und des Stromes i(t) gemäß Gleichungen (1.18) und (1.19) erhält man für die elektrische und magnetische Energie ähnliche Verhältnisse wie bei der mechanischen Schwingung zwischen potentieller Energie und kinetischer Energie. Die gesamte Energie im Sinne der Summe der elektrischen und magnetischen Energie ist konstant. Die Energie pendelt zwischen beiden Formen: im Spannungsmaximum ist die elektrische Energie maximal und keine magnetische Energie vorhanden, im Strommaximum ist das magnetische Feld maximal und kein elektrisches Feld vorhanden.

Übung 1.2: Berechne durch Einsetzen von (1.18) und (1.19) in Gleichungen (1.20) und (1.21) die gesamte Energie des Schwingkreises. Zeige, dass die Summe einen konstanten Wert ergibt. Berechne den Anteil der elektrischen Energie. Hinweis: Verwende Gleichung (1.16) und die Beziehung u = q/C. In welchen physikalischen Einheiten werden elektrische und magnetische Energie wiedergegeben?

Enthält der Schwingkreis einen elektrischen Widerstand R, so ergibt sich eine gedämpfte Schwingung. Die Differentialgleichung erhält man gemäß der Maschenregel aus der Summe der Spannungen $u_L + u_R + u_C = 0$, wobei sich für die Spannung u_R die Beziehung $u_R = R\ i = R\ q'$ verwenden lässt. Man erhält die Differentialgleichung

$$q''(t) + R/L\ q'(t) + (1/\ L\ C)\ q(t) = 0 \qquad (1.21)$$

Übung 1.3: Berechne mit Hilfe der Beziehungen aus Abschnitt 1.1 den Abklingkoeffizienten des gedämpften Schwingkreises, die Eigenfrequenz des ungedämpften Schwingkreises, sowie die Periodendauer der Schwingung. Unter welchen Bedingungen ergibt sich der aperiodische Grenzfall?

1.4. Phasorenschreibweise

Für harmonische periodische Funktionen lässt sich der Schreibaufwand durch eine Schreibweise vereinfachen, die Amplitude und Phase als Zeiger (engl. Phasor) darstellt. Die komplexe Funktion z(t) lässt sich beschreiben als

$$z(t) = \hat{z}\ e^{j\phi} = \hat{z}\ e^{j(\omega t + \phi_0)} = \hat{z}\ e^{j\phi_0}\ e^{j\omega t} \qquad (1.22)$$

Hierbei wurde der Phasenwinkel $\phi = \omega\ t + \phi_0$ wiederum als lineare Funktion der Zeit angesetzt. Die komplexe Größe $\underline{z} = \hat{z}\ e^{j\phi_0}$ wird als Phasor bezeichnet. Die komplexe Funktion z(t) hat die Amplitude $\hat{z}$, sowie den Ausdruck $e^{j\phi}$, der einen Zeiger der Länge 1 in der komplexen Ebene darstellt, wie die folgende Abbildung zeigt. Hierbei gilt

$$e^{j\phi} = \cos(\phi) + j \sin(\phi) \qquad (1.23)$$

Demzufolge lässt sich z(t) durch eine reale und eine imaginäre Komponente beschreiben. Die reale Zeitfunktion x(t) erhält man aus dem Realteil von z(t).

$$z(t) = \hat{z} \cos(\phi) + j\ \hat{z} \sin(\phi) = \hat{z} \cos(\omega t + \phi_0) + j\ \hat{z} \sin(\omega t + \phi_0) \qquad (1.24)$$

$$x(t) = \mathrm{Re}\{ z(t) \} = \hat{z} \cos(\omega t + \phi_0) \qquad (1.25)$$

Diese Darstellung entspricht nun wieder der ursprünglich gewählten Darstellung in Abschnitt 1.1, siehe Gleichung (1.3). Der Konvention folgend, den Realteil auf die x-Achse zu

projizieren, wurde in Gleichung (1.25) für die reelle Zeitfunktion die Projektion $x(t) = \hat{z} \cos(\omega t + \phi_0)$ verwendet, statt $y(t) = \hat{y} \sin(\omega t + \phi`_0)$ in Gleichung (1.3). Beide Darstellungen sind völlig äquivalent, da cos() und sin() durch einen Unterschied von π/2 im Nullphasenwinkel aus einander hervorgehen ($\phi`_0 = \phi_0 + \pi/2$).

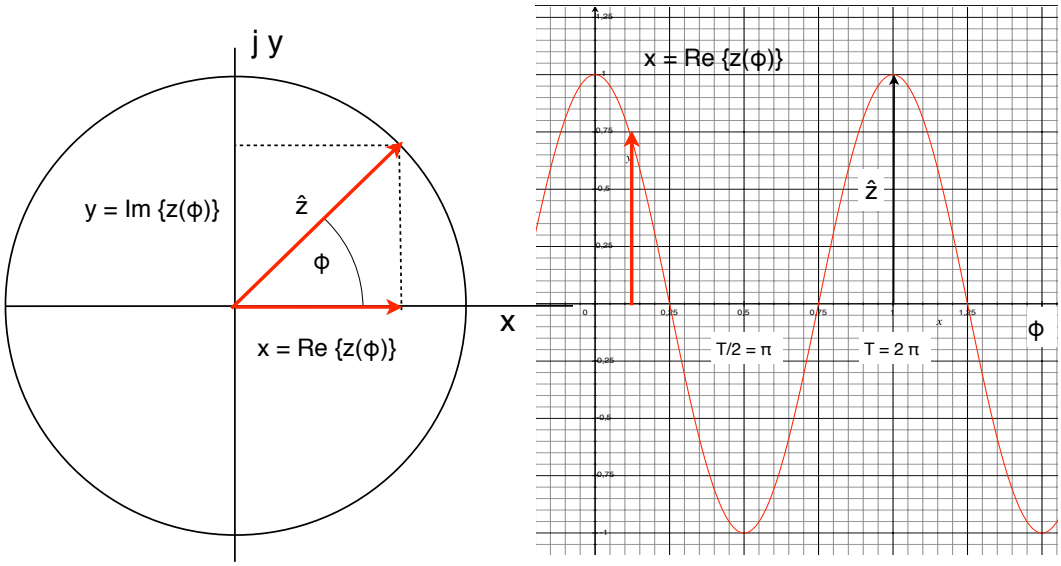


Bild 1.7 Zeigerdarstellung

Der Vorteil der Phasorenschreibweise besteht darin, dass sich für Differentialgleichungen die Kreisbewegung des Zeigers durch einen Faktor $e^{j\omega t}$ als invariante Größe mitführen lässt. Abgesehen von dieser Kreisbewegung ist die betrachtete Größe h als Zeiger nach Betrag und Phase dargestellt: $\underline{z} = \hat{z}\, e^{j\phi_0}$. Ableitungen nach der Zeit führen zu Faktoren jω, die sich in gewohnter Form für komplexwertige Netzelemente verwenden lassen (Ableitung $d/dt\, e^{j\omega t} = j\omega\, e^{j\omega t}$). Die Differentialgleichung (1.7) lautet in Phasorenschreibweise wie folgt.

$$z``(t) + 2\delta\, z`(t) + \omega_0^2\, z(t) = 0 \qquad (1.26)$$

Die Gleichung wird in Phasorenschreibweise durch Funktionen folgenden Typs gelöst:

$$z(t) = \hat{z}\, e^{-\delta t}\, e^{j(\omega t + \phi_0)} = \hat{z}\, e^{j\phi_0}\, e^{-\delta t}\, e^{j\omega t} = \hat{z}\, e^{j\phi_0}\, e^{(j\omega - \delta)\, t} \qquad (1.27)$$

Für die erste und zweite Ableitung erhält man somit:

$$z`(t) = (j\omega - \delta)\, z(t) \qquad (1.28)$$

$$z``(t) = (j\omega - \delta)^2\, z(t) \qquad (1.29)$$

Durch Einsetzen von (1.28) und (1.29) in die Differentialgleichung (1.26) erhält man den bereits in (1.9) genannten Zusammenhang zwischen der Eigenfrequenz ω des gedämpften Schwingkreises, dem Abklingkoeffizienten δ und der Eigenfrequenz ω_0 der ungedämpften Schwingung.

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2 \qquad (1.30)$$

Übung 1.4: Weise die Beziehung (1.30) durch Einsetzen von (1.28) und (1.29) in die Differentialgleichung (1.26) nach.

Der Anschaulichkeit halber sei die Differentialgleichung des gedämpften elektrischen Schwingkreis nochmals im Zeitbereich sowie in Phasorenschreibweise berechnet. Anwendung der Maschenregel ergibt die Differentialgleichung im Zeitbereich bzw. in Phasorenschreibweise, wie in der Tabelle unten aufgeführt. Die Spannung u_C an der Kapazität lässt sich aus dem Strom bestimmen und führt zu einer weiteren Gleichung.

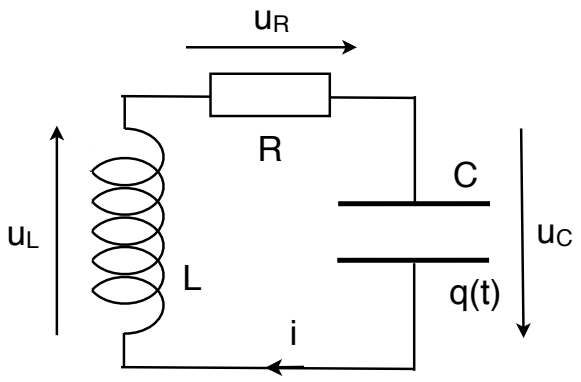


Bild 1.6 gedämpfter Schwingkreis

Beide Gleichungen lassen sich zu einer Gleichung zusammenführen. Bei der Differentialgleichung im Zeitbereich erfolgt dies durch erneutes Differenzieren nach der Zeit, einsetzen von du_C/dt und Erweiterung mit C zur übersichtlicheren Darstellung. In Phasorenschreibweise kann U_C direkt eingesetzt werden, die erneute Differenzierung erfolgt implizit durch Erweiterung mit $j\omega C$.

Differentialgleichung	Phasorenschreibweise
(1) $L\, di/dt + R\, i + u_C = 0$	(1) $j\omega L\, I + R\, I + U_C = 0$
(2) $i = C\, du_C/dt$	(2) $I = j\omega C\, U_C$
$LC\, d^2i/dt^2 + RC\, di/dt + i = 0$	$(j\omega)^2 LC\, I + j\omega RC\, I + I = 0$

2. Wellen

Unter Wellen versteht man sich örtlich ausbreitende Bewegungen. In der mathematischen Beschreibung ergibt sich dadurch eine örtliche Komponente in einen geeigneten Koordinatensystem. In ihrer Ausbreitungsrichtung bewegt sich die Welle in einem homogenen Medium mit konstanter Geschwindigkeit fort.

Die folgende Abbildung zeigt das Prinzip. Das Koordinatensystem y ruht im Ursprung O. Ein Koordinatensystem y´ bewegt sich mit der Welle mit gleichförmiger Geschwindigkeit v in Richtung der x-Achse und legt dabei die Entfernung x = v t zurück.

Bezogen auf das sich mitbewegendes Koordinatensystem y´mit Ursprung O´ kann die Wellenfunktion beschrieben werden durch y´= y´(x), wobei y´(x) den örtlichen Verlauf der Wellenfunktion beschreibt. Bezogen auf das ruhende Koordinatensystem y kann die Wellenfunktion beschrieben werden durch y = y(x - vt).

Die Wellenfunktion hängt somit vom Ort x und von der Zeit t ab: y = y (x, t). Eine nach rechts laufende Welle lässt sich im gezeigten Beispiel durch die Beziehung y = y (x - vt) beschreiben, eine nach links laufende Welle durch die Beziehung y = y (x + vt).

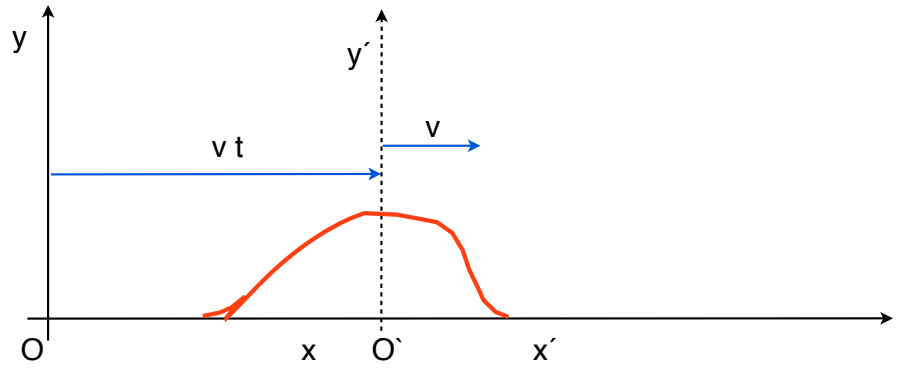


Bild 1.7 Wellenfunktion

Als Wellenfunktionen kommen natürlich auch harmonische Schwingungen in Frage. Während bei einer reinen Schwingung wie beispielsweise beim in Abschnitt 1.2 beschriebenen mechanischen Schwingung sich die Masse nur aufwärts oder abwärts y-Achse pendelt, kommt bei einer Welle eine zusätzliche Ausbreitung in einer weiteren Raumrichtung, wie beispielsweise der x-Achse hinzu. Die Gleichungen erhalten einen zusätzlichen ortsabhängigen Teil in Ausbreitungsrichtung.

Im mechanischen Beispiel könnte man hierfür das Federpendel zu einer Reihe gekoppelter Pendel erweitern und erhält somit ein Muster für eine transversale Welle bzw. Querwelle (die Massen schwingen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Welle). Sinngemäß wäre ein zum Hertzschen Dipol aufgebogener Schwingkreis ein Erzeuger für eine transversale elektromagnetische Welle: Die Ladungen schwingen in Richtung der Dipolachse, die radiale Welle breitet sich senkrecht zur Dipolachse aus.

2.1. Wellengleichung

Die Wellengleichung ist eine partielle Differentialgleichung der Form

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \qquad (2.1)$$

Die y-Achse gibt hierbei die Richtung der Auslenkung bzw. Schwingungsrichtung an. Gleichung (2.1) besagt, dass die zweite Ableitung der Auslenkung nach der Zeit proportional ist zur zweiten Ableitung der Auslenkung nach dem Ort. Hierbei kennzeichnet c die Ausbreitungsgeschwindigkeit. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist abhängig von den physikalischen Eigenschaften des Mediums, in dem sich die Welle ausbreitet, bei mechanischen Wellen beispielsweise von der Elastizität bzw. Dichte.

Eine Lösung der Wellengleichung ist jede Funktionen der Form

$$y = y\,(t \pm x/c) \qquad (2.2)$$

also jede beliebige Funktion, die zweimal differenzierbar nach Ort und Zeit ist. Beliebige Anregungen bzw. Störungen können sich als Welle durch ein Medium ausbreiten. Für den Fall harmonischer Schwingungen als Anregung der Welle ergibt sich eine Lösung der Form

$$y(t,x) = \hat{y} \sin \omega (t - x/c) \tag{2.3}$$

Die Schwingungsphase ist also ortsabhängig. Das Verhältnis der Laufstrecke x zur Ausbreitungsgeschwindigkeit c bestimmt die Laufzeit, um die eine Schwingungsphase am Ort x später ankommt. Die Zeit t zur Berechnung der Auslenkung y(t,x) ist für den Ort x um diese Laufzeit zu verkleinern.

Durch Einsetzen von $\omega = 2\pi / T$ und Einführung der Wellenlänge $\lambda = c * T$ (die Strecke, die während einer Periode T durchlaufen wird), ergibt sich für die harmonische Welle die Form

$$y(t,x) = \hat{y} \sin 2\pi (t/T - x/\lambda) \tag{2.4}$$

Die Form (2.4) zeigt, dass harmonische Wellen durch zeitliche und örtliche Periodizität gekennzeichnet sind (Periodendauer T und Wellenlänge λ). Das negative Vorzeichen in Gleichung (2.4) beschreibt die Ausbreitung in positiver x-Richtung, wie bereits eingangs erläutert. Für eine Ausbreitung in umgekehrter Richtung wäre das Vorzeichen zu wechseln.

2.2. Mechanische Wellen

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist bei mechanischen Wellen durch die Eigenschaften des Mediums gegeben, beispielsweise die Spannkraft und den Querschnitt einer Saite, bzw. durch die Elastizität und Dichte, bzw. Kompressibilität und Dichte. Durch unterschiedliche physikalische Eigenschaften in angrenzenden Medien ergeben sich somit unterschiedliche Ausbreitungsgeschwindigkeiten.

Bei der Ausbreitung einer Welle vom einem Medium ins benachbarte Medium ergeben sich daher gemäß Gleichung (2.4) Phasensprünge, die sich durch *Reflexionen* an den Grenzflächen bemerkbar machen. Bei Wellen auf einem Seil lassen sich diese Phänomene sehr anschaulich zeigen bzw. animieren (siehe Animationen im Web).

Beim Übergang von einem dünnen Seil auf ein dickeres Seil (geringere Ausbreitungsgeschwindigkeit) wird beispielsweise ein Teil der einlaufenden Welle mit umgekehrtem Vorzeichen reflektiert, ein anderer Teil weiter übertragen. Im extremen Fall, wenn man das Ende des dünnen Seils festbindet, wird die einlaufende Welle mit umgekehrtem Vorzeichen komplett reflektiert. Sinngemäß verhält sich der Übergang von einem dicken Seil auf ein dünneres Seil. An der Grenzfläche erfolgt eine Reflexion mit gleichem Vorzeichen, ein anderer Teil der Welle breitet sich weiter fort. Im Extremfall erhält man eine totale Reflexion, wenn man das Seil mit offenem Ende lässt (bzw. mit einem Ring an einem in Richtung der Auslenkung aufgestellten Stab führt).

Ineinander laufende Wellen überlagern sich (Prinzip der *Superposition*). Im Falle von total reflektierten harmonischen Wellen ergeben sich *stehende Wellen*. Diese Fälle sind aus der Akustik bestens bekannt und Grundlage der diesbezüglichen Musikinstrumente. Die mathematische Beschreibung erhält man aus der Addition der Beschreibungen für die hinlaufende Welle (2.5) und rücklaufende Welle (2.6).

$$y_1 = \hat{y} \sin 2\pi (t/T - x/\lambda) \tag{2.5}$$

$$y_2 = \hat{y} \sin 2\pi (t/T + x/\lambda) \tag{2.6}$$

$$y_1 + y_2 = \hat{y}\ (\sin 2\pi\,(t/T - x/\lambda)) + (\sin 2\pi\,(t/T + x/\lambda))$$

$$y_1 + y_2 = 2\hat{y}\cos(2\pi\, x/\lambda)\ \sin(2\pi\, t/T) \qquad (2.7)$$

Es ergibt sich eine harmonische Schwingung mit ortsabhängiger Amplitude. Die ortsabhängige Amplitude hat Maxima der Höhe $2\hat{y}$ an den Stellen, wo sich die gegeneinander laufenden Wellen verstärken, und Minima (Auslenkung = 0) an den Stellen, wo sich beide Wellen gegenseitig auslöschen. In Medien begrenzter Länge (z.B. Gitarrensaite, Orgelpfeife) bilden sich stehende Wellen so, dass diese Länge einem ganzzahligen Vielfachen der halben Wellenlänge entspricht. Grund hierfür ist, dass sich an der Grenzfläche entweder ein Maximum der stehenden Welle (offenes Ende) bzw. ein Minimum der stehenden Welle (festes Ende) befinden kann.

Mit der Wellenausbreitung wird Schwingungsenergie der Teilchen innerhalb des Mediums weitergegeben, die Wellenausbreitung ist also mit einem Transport von Energie verbunden. Die Energiedichte ist abhängig von der Dichte des Mediums (linear), sowie von der Geschwindigkeit der Teilchen (quadratisch). Energiestrom, Leistung bzw. Intensität sind proportional zur Energiedichte, sowie zur Ausbreitungsgeschwindigkeit. Das Produkt aus Dichte des Mediums ρ und der Ausbreitungsgeschwindigkeit c wird auch als Wellenwiderstand bezeichnet

$$Z = \rho\, c \sim \sqrt{\rho} \qquad (2.8)$$

Da die Ausbreitungsgeschwindigkeit wiederum von der Dichte abhängt, beschreibt der Wellenwiderstand die Härte bzw. Steifheit eines Mediums für Kraft und Bewegung bei mechanischen Wellen. Sinngemäß beschreibt der elektrische Wellenwiderstand die Eigenschaften des Mediums bzgl. Spannung und Strom bei Wellen auf elektrischen Leitungen, bzw. zwischen elektrischer und magnetischer Feldstärke bei elektromagnetischen Wellen.

2.3. Elektromagnetische Wellen

Für elektromagnetische Wellen wird man erwarten, dass sich durch Ersetzen der Auslenkung y(t,x) in der Differentialgleichung (2.1) durch die Spannung u(t,x) bzw. durch den Strom i(t,x) Lösungen der Form gemäß Gleichung (2.4) finden lassen, wobei dort ebenfalls die Auslenkung durch die Spannung bzw. den Strom zu ersetzen ist.

$$u(t,x) = \hat{u}\sin 2\pi\,(t/T - x/\lambda) \qquad (2.9)$$

$$i(t,x) = \hat{\imath}\sin 2\pi\,(t/T - x/\lambda) \qquad (2.10)$$

Die Wellenlänge wäre wiederum abhängig von der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle im Medium, und somit abhängig von den elektrischen Eigenschaften des Mediums.

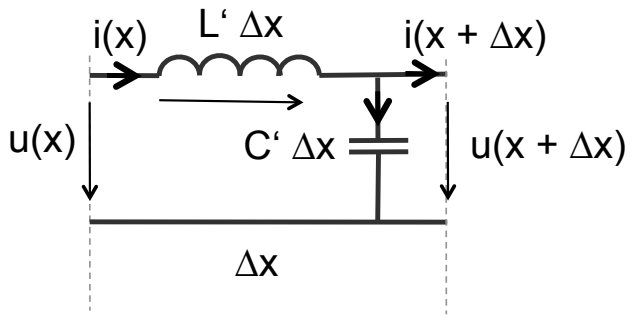


Bild 2.1 Ersatzschaltbild einer verlustlosen Leitung

Bei Wellen auf Leitungen lassen sich die elektrischen Eigenschaften im einfachsten Fall durch einen induktiven und kapazitiven Leitungsbelag beschreiben. Die Abbildung zeigt ein einfaches Leitungsmodell der Länge Δx. Hierbei erhält man du/dx aus dem Differenzenquotient $(u(x+\Delta x) - u(x))/ \Delta x$ für $\Delta x \to 0$. Mit den Zählpfeilen gemäß Abbildung 2.1 ergibt sich das negative Vorzeichen in Gleichung (2.11). Sinngemäß gilt die gleiche Vorgehensweise für den Strom $(i(x+\Delta x) - i(x))/\Delta x$.

Die Differentialgleichung der Welle lässt sich unmittelbar aus diesem Ersatzschaltbild herleiten. Für die differentielle Spannung und den differentiellen Strom aus dem Ersatzschaltbild gelten:

$$- du/ dx = L' di/ dt \tag{2.11}$$

$$- di /dx = C' du/ dt \tag{2.12}$$

Differenzieren der Gleichung (2.11) nach dem Ort und Einsetzen von Gleichung (2.12) für den Strom di/dx führt zur Wellengleichung.

$$d^2u /dx^2 = L'C' d^2u/ dt^2 \tag{2.13}$$

Vergleich mit der Wellengleichung (2.1) führt auf die Ausbreitungsgeschwindigkeit c der Welle auf der Leitung:

$$c = 1/ \sqrt{L'C'} \tag{2.14}$$

Als Lösungen der Wellengleichung (2.13) kommt der bereits in Gleichung (2.9) genannte Ansatz für die Spannung u(t,x) in Frage, bzw. Gleichung (2.10) als Ansatz für den Strom i(t,x). Aus Gleichung (2.11) erhält man einen Zusammenhang zwischen Spannung und Strom, aus der sich der Wellenwiderstand errechnen lässt. Hierzu wird der Ansatz (2.9) für Spannung nach dem Ort abgeleitet du/ dx, sowie der Ansatz (2.10) für den Strom nach der Zeit di /dt.

$$du /dx = d (\hat{u} \sin 2\pi (t/T - x/\lambda)) / dx = \hat{u}\, 2\pi/\lambda \cos 2\pi (t/T - x/\lambda) \tag{2.15}$$

$$di /dt = d (\hat{i} \sin 2\pi (t/T - x/\lambda)) / dt = \hat{i}\, 2\pi/T \cos 2\pi (t/T - x/\lambda) \tag{2.16}$$

Einsetzen von (2.15) und (2.16) in (2.11) ergibt $\hat{u}\, 2\pi/\lambda = L' \hat{i}\, 2\pi/T$ bzw.

$$\hat{u} = L'\lambda/T\ \hat{i} = R_W \hat{i} \tag{2.17}$$

Der Ausdruck $\lambda/T = \lambda f = c$ ist gleich der Ausbreitungsgeschwindigkeit. Berücksichtigung von Gleichung (2.14) ergibt für den Wellenwiderstand

$$R_W = L' \lambda/T = L' c = \sqrt{L'/ C'} \tag{2.18}$$

Der Vergleich mit mechanischen Wellen lässt erwarten, dass sich im Zusammenhang mit Reflexionen durch Überlagerung der rückläufigen Welle mit der einlaufenden Welle unter Umständen stehende Wellen für Strom und Spannung ergeben. Diese Effekte werden zusammen mit den praxisrelevanten Methoden für verlustlose und verlustbehaftete Leitungen in einem späteren Abschnitt näher betrachtet.

2.4. Phasorenschreibweise

In Phasorenschreibweise lassen sich die in Abschnitt 2.3 hergeleiteten Zusammenhänge noch etwas bequemer wiedergeben. Wie in dieser Schreibweise üblich, wird die Differenzierung nach der Zeit durch Verwendung der komplexen Widerstände und Leitwerte impliziert.

Die Abbildung zeigt nochmals das Ersatzschaltbild der verlustlosen Leitung mit dem Induktivitätsbelag L´(bzw. dem komplexen Widerstandsbelag jωL´), sowie dem Kapazitätsbelag C´ (bzw. dem komplexen Leitwert jωC´).

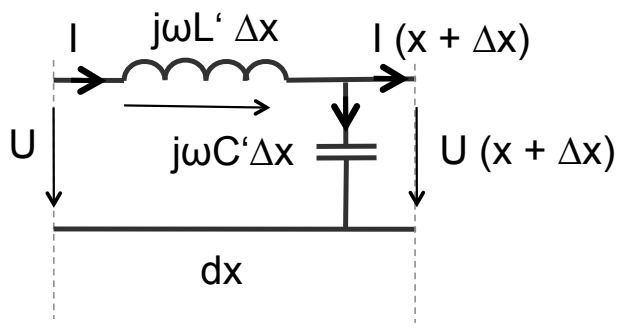


Bild 2.2 Ersatzschaltbild einer verlustlosen Leitung in Phasorenschreibweise

Die differentielle Spannung dU/dx erhält man aus dem Differenzenquotienten (U(x+ Δx) - U(x))/ Δx für Δx -> 0. Mit den Zählpfeilen gemäß Abbildung 2.2 ergibt sich das negative Vorzeichen in Gleichung (2.19). Sinngemäß gilt die gleiche Vorgehensweise für den Strom (I(x + Δx) - I(x))/ Δs. Für die differentielle Spannung und den differentiellen Strom aus dem Ersatzschaltbild gelten:

$$- dU/ dx = j\omega L' I \qquad (2.19)$$

$$- dI /dx = j\omega C' U \qquad (2.20)$$

Erneutes Differenzieren von (2.19) nach d/dx und anschliessendes Einsetzen von (2.20) in (2.19) ergibt die komplexe Form der Wellengleichung:

$$d^2U / dx^2 = j\omega L' \, j\omega C' U \qquad (2.21)$$

Diese Gleichung erfüllt ein Lösungsansatz der Form

$$U = e^{-\gamma x} \qquad (2.22)$$

Durch Einsetzen des Ansatzes (2.22) in die Differentialgleichung (2.21) erhält man

$$d^2U / dx^2 = \gamma^2 U \qquad (2.23)$$

Vergleich mit der Wellengleichung (2.21) ergibt für die Ausbreitungskonstante

$$\gamma = j\omega \sqrt{L'C'} \qquad (2.24)$$

Aus der Beziehung zwischen Spannung und Strom lässt sich aus Gleichung (2.19) unter Verwendung des Ansatzes (2.22) wiederum der Wellenwiderstand errechnen.

$$dU/ dx = \gamma U = j\omega L' I \qquad (2.25)$$

Einsetzen von γ aus (2.24) und Umformen ergibt den Wellenwiderstand

$$R_W = U/ I = \sqrt{L'/ C'} \qquad (2.26)$$

Zum Vergleich der beiden Schreibweisen für die Wellengleichung hier nochmals eine Gegenüberstellung der Differentialgleichung nach der Zeit mit der Phasorenschreibweise.

Differentialgleichung	Phasorenschreibweise
$du/dx = L' di/dt$	$dU/dx = j\omega L' I$
$di/dx = C' du/dt$	$dI/dx = j\omega C' U$
$d^2u/dx^2 = L'C' d^2u/dt^2$	$d^2U/dx^2 = j\omega L' j\omega C' U$

3. Wellenausbreitung auf Leitungen

3.1. Zweileitersysteme

Als Zweileitersysteme werden längshomogene Strukturen mit zwei Leitern betrachtet, also Leitungen mit konstantem Querschnitt. Hierbei wird angenommen, dass die Wellenlänge groß ist gegen die Querausdehnung der Leitung. Durch diese Forderung sollen Wellentypen wie bei Hohlleitern ausgeschlossen werden. Im längshomogenen Zweileiter pflanzt sich die Welle als reine transversale Welle in Richtung der Längsausdehnung der Leitung fort. Beispiele für längshomogene Zweileiter wären koaxiale Leitungen, Zweidraht-Leitungen, sowie Leiterbahnen.

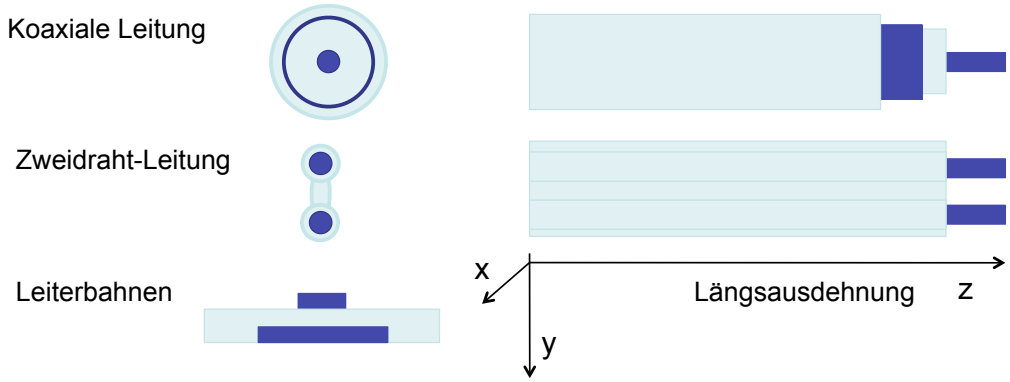


Bild 3.1 Beispiele für längshomogene Zweileiter

Bei einer Frequenz von 300 Megahertz beträgt die Wellenlänge unter Freiraumbedingungen etwa einem Meter. Somit wäre die Wellenlänge in der Größenordnung der Leitungslänge, jedoch groß in Verhältnis zu gängigen Leitungsquerschnitten. Zur Übersicht sind in der folgenden Abbildung einige Wellenlängen in Abhängigkeit der Frequenz dargestellt. Typische Effekte der Hochfrequenztechnik sind immer dann zu erwarten, wenn die Wellenlänge in die Größenordnung der Anordnung bzw. der Schaltung kommt.

Wellenlängen	Schall (Luft)	Licht (Freiraum)
Frequenz	300 m/s	300 * 10^6 m/s
1 kHz	300 mm	300 km
10 kHz	30 mm	30 km
1 MHz	300 µm	300 m
1 GHz	300 nm	300 mm

Audio

Ultraschall

Hochfrequenz

Bild 3.2 Wellenlängen

In der Übersicht wurde überschlägig mit einer Schallgeschwindigkeit von 300 m/s und einer Lichtgeschwindigkeit von 300 * 10^6 m/s gerechnet. Durch den großen Unterschied in der Ausbreitungsgeschwindigkeit ergeben sich Welleneffekte in der Akustik bereits innerhalb des

Hörbereiches von ca. 10 kHz. Die diesbezüglichen elektrischen Wellenlängen sind im Verhältnis zu gängigen Leitungslängen und Anordnungen groß. Anwendungen mit im Vergleich zur elektrischen Wellenlänge kurzen Leitungen können wie im statischen Fall behandelt werden. Welleneffekte bei elektrischen Wellen sind in der Regel erst bei Frequenzen oberhalb 100 kHz relevant, hier beginnt der Bereich der Hochfrequenztechnik.

Weiterhin werden zunächst nur verlustlose Leitungen betrachtet. Diese Einschränkung trifft für die meisten Anwendungen der Hochfrequenztechnik zu, da mit wachsender Frequenz die Einflüsse der kapazitiven und induktiven Anteile überwiegen.

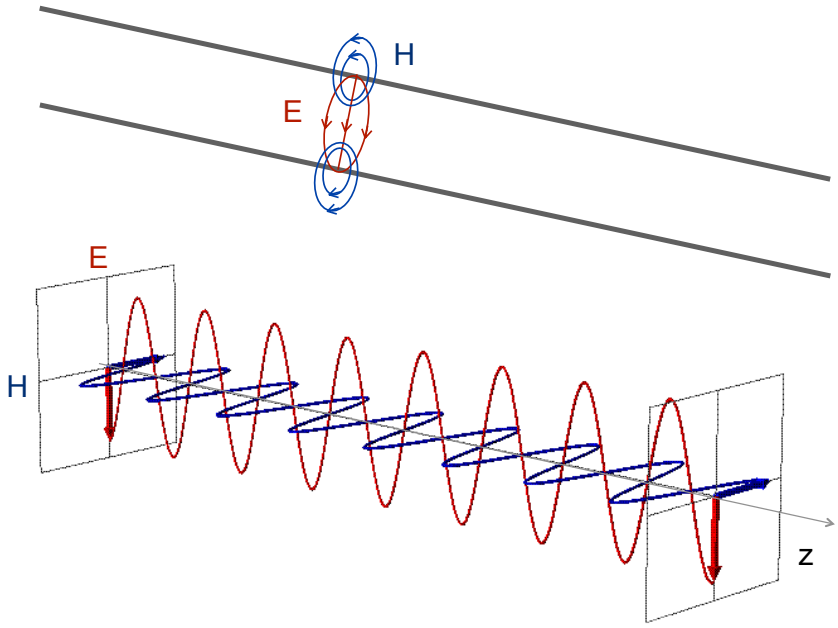


Bild 3.3 Transversale elektromagnetische Welle

In den betrachteten Zweileitersystemen sind die elektromagnetischen Wellen transversal. Sie breiten sich der Leitung entlang aus, wobei die elektrische und magnetische Felder senkrecht zur Ausbreitungsrichtung ausgerichtet sind. Die Abbildung zeigt die magnetischen und elektrischen Feldlinien in der Leiteranordnung. Das Koordinatensystem wurde so gewählt, dass sich der Querschnitt des Leiters in der (x,z) Ebene befindet, und die Länge der Leitung in z-Richtung zeigt. Der untere Teil der Abbildung zeigt eine Momentaufnahme der Amplituden der magnetischen und elektrischen Feldstärke über der Länge des Leitung zu einem gegebenen Zeitpunkt. Magnetisches und elektrisches Feld sind in Phase.

3.2. Leitungsmodell (verlustlose Leitung)

Die folgende Abbildung zeigt nochmals das Ersatzschaltbild der verlustlosen Leitung mit dem Blindwiderstand $j\omega L'$ (gegeben durch den Induktivitätsbelag), sowie dem Blindleitwert $j\omega C'$ (gegeben durch den Kapazitätsbelag). Wie bereits in Abschnitt 2 berechnet, gelten für die differentielle Spannung und den differentiellen Strom aus dem Ersatzschaltbild:

$$- dU/ dz = j\omega L' I \qquad (3.1)$$

$$- dI /dz = j\omega C' U \qquad (3.2)$$

Hierbei erhält man dU/dz aus dem Differenzenquotient $(U(z+\Delta z) - U(z))/\Delta z$ für $\Delta z \to 0$. Mit den Zählpfeilen gemäß Abbildung 3.4 ergibt sich das negative Vorzeichen in Gleichung (3.1). Sinngemäß gilt die gleiche Vorgehensweise für den Strom $(I(z + \Delta z) - I(z))/\Delta z$.

Durch erneutes Differenzieren von (3.1) nach d/dz und anschliessendes Einsetzen von (3.2) in (3.1) ergibt sich die komplexe Form der Wellengleichung:

$$d^2U / dz^2 = j\omega L' \, j\omega C' \, U \qquad (3.3)$$

Dieser Zusammenhang wurde in Abschnitt 2 bereits hergeleitet. Der in Abschnitt 2 gewählte Ansatz zur Lösung der Differentialgleichung sollte den Weg zur Berechnung der Ausbreitungskonstante und des Wellenwiderstandes zeigen. Für die Berechnung der Ausbreitungsgeschwindigkeit und des Wellenwiderstandes wird auf Abschnitt 2.4 verwiesen.

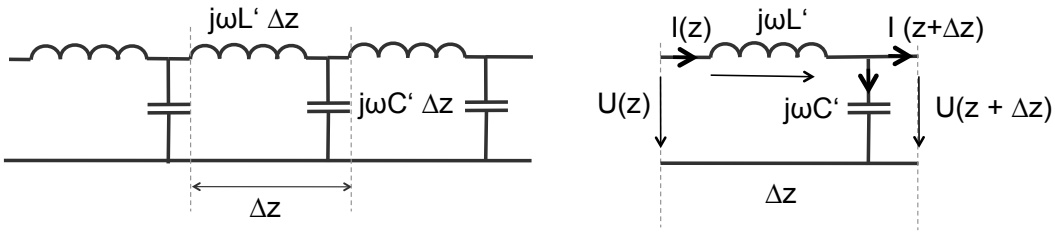


Bild 3.4 Ersatzschaltbild der verlustlosen Leitung

An dieser Stelle soll auf die Lösung in Bezug auf Spannung und Strom näher eingegangen werden. Hierzu wird ein etwas umfangreicherer Lösungsansatz gewählt, der mehr Möglichkeiten zur Interpretation bietet.

$$U(z) = U_h \, e^{-\gamma z} + U_r \, e^{\gamma z} \qquad (3.4)$$

Hierbei bedeutet der erste Ausdruck eine hinlaufende Welle, der zweite Ausdruck eine rücklaufende Welle. Die Lösung der Wellengleichung besteht aus der Überlagerung dieser beiden Anteile. Die komplexen Amplituden U_h und U_r lassen sich in Polarkoordinaten nach Betrag und Phase wie folgt darstellen.

$$U_h = |U_h| \, e^{j\varphi_h} = |U_h| \, e^{j(\omega t + \varphi_{0h})} \qquad (3.5)$$

$$U_r = |U_r| \, e^{j\varphi_r} = |U_r| \, e^{j(\omega t + \varphi_{0r})} \qquad (3.6)$$

Die Ausbreitungskonstante γ aus Gleichung (3.4) ist im verlustlosen Fall $\gamma = j\beta$, wobei β die Phasenkonstante darstellt mit $\beta = 2\pi / \lambda$. Somit ergibt sich der Ansatz (3.4) in vollständiger Form zu

$$U(z,t) = |U_h| \, e^{j(\omega t + \varphi_{0h})} \, e^{-j\beta z} + |U_r| \, e^{j(\omega t + \varphi_{0r})} \, e^{j\beta z} \qquad (3.7)$$

Hierbei entsprechen die Beträge $|U_h|$ und $|U_r|$ der Amplitude bzw. der Länge der Zeiger in Polarkoordinaten. Der erste Ausdruck der Summe in Gleichung (3.7) beschreibt die komplette hinlaufende Spannungswelle, der zweite die rücklaufende Welle. Den Verlauf der Spannung u(z,t) erhält man durch Bildung des Realteils. Diese Form entspricht dann wieder der Lösung der Differentialgleichung, wie in Abschnitt 2 hergeleitet.

$$u(z,t) = \mathrm{Re}\,\{U(z,t)\}$$

$$u(z,t) = |U_h| \cos(\omega t - \beta z + \varphi_{0h}) + |U_r| \cos(\omega t + \beta z + \varphi_{0r}) \qquad (3.8)$$

Der Strom I (z,t) lässt sich mit Hilfe der Beziehung (3.1) aus der Spannung U(z,t) durch Differenzieren nach d/dz gemäß Gleichung (3.7) berechnen. Der Strom ergibt sich daraus gemäß Gleichung (3.9), wobei R_W den Wellenwiderstand der Leitung bezeichnet.

$$I(z,t) = U(z,t) / R_W \tag{3.9}$$

Übung 3.1: Weise Gleichung (3.9) nach. Hinweis: Verwende die in Abschnitt 2 eingeführten Definitionen für die Ausbreitungsgeschwindigkeit c (2.14) und den Wellenwiderstand R_W (2.18).

Durch Bildung des Realteils erhält man daraus den Verlauf der Stromwelle.

$$i(z,t) = \mathrm{Re}\{I(z,t)\}$$

$$i(z,t) = |U_h| \cos(\omega t - \beta z + \phi_{0h}) / R_W + |U_r| \cos(\omega t + \beta z + \phi_{0r}) / R_W \tag{3.10}$$

Spannung und Strom sind also für die sich entlang der Leitung ausbreitenden Wellen in Phase, was sich mit der Erwartung der Ausbreitung der in Bild 3.1 gezeigten transversalen elektromagnetischen Welle deckt. Die Spannung als skalarer Wert entspricht hierbei der Amplitude der elektrischen Feldstärke, der Strom sinngemäß der magnetischen Feldstärke.

3.3. Wellenausbreitung

Die Ausbreitung der Spannungswelle in der Phasorenschreibweise gemäß Gleichung (3.7) und der daraus abgeleitete Realteil nach Gleichung (3.8) lässt sich in der Kreisprojektion veranschaulichen. Der Übersichtlichkeit halber beschränkt sich die unten gezeigte Darstellung hierbei auf die hinlaufende Welle und zeigt deren Ausbreitung zum Zeitpunkt t=0.

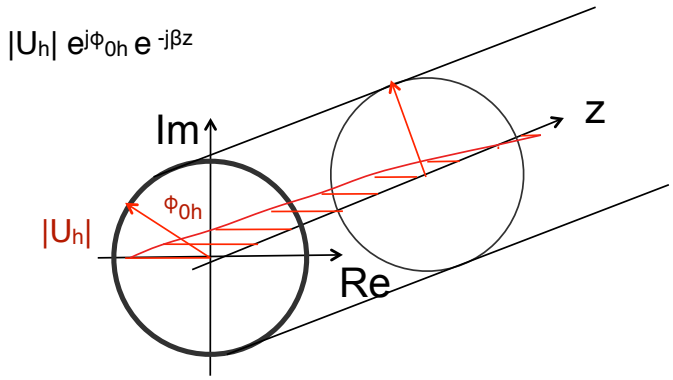


Bild 3.5 Ausbreitung der Spannungswelle zum Zeitpunkt t=0

Der verbleibende Ausdruck $U(z,0) = |U_h|\, e^{j\Phi_{0h}}\, e^{-j\beta z}$ besteht aus dem Zeiger $|U_h|\, e^{j\Phi_{0h}}$ mit dem Betrag $|U_h|$ dem Phasenwinkel ϕ_{0h}, sowie einem ortsabhängigen Anteil $e^{-j\beta z}$. Der Ausdruck $e^{-j\beta z}$ beschreibt in Abhängigkeit der Koordinate z eine Drehung des Zeigers $|U_h|\, e^{j\Phi_{0h}}$ in mathematisch negativer Richtung (im Uhrzeigersinn). Die Projektion auf die x-Achse ergibt den Realteil der Spannungswelle.

Der ortsabhängige Anteil $e^{-j\beta z}$ entspricht in seiner Form dem bereits bei der Phasorenschreibweise der Schwingung eingeführten zeitabhängigen Anteil $e^{j\omega t}$. Für jeden Zeitpunkt t beschreibt der in Gleichung (3.7) für die hinlaufende Spannungswelle $U_h(z,t)$ enthaltene Ausdruck $e^{j\omega t}$ eine Drehung des Zeigers $|U_h|\, e^{j\Phi_{0h}}$ in mathematisch positiver Richtung (gegen

den Uhrzeigersinn) um einen Winkel ωt. Die Welle ist also zu einem späteren Zeitpunkt auf der Ortsachse z weiter vorgerückt.

Die durch Projektion auf x-Achse erhaltenen Realteile der Spannungswelle und Stromwelle breiten sich also auf der Leitung aus, wie in der folgenden Abbildung dargestellt. Die gestrichelten Linien zeigen hierbei die zu einem späteren Zeitpunkt weiter fortgeschrittene Spannungswelle bzw. Stromwelle. Mit der Fortbewegung der Spannungswelle und Stromwelle transportiert die Welle Energie in Ausbreitungsrichtung.

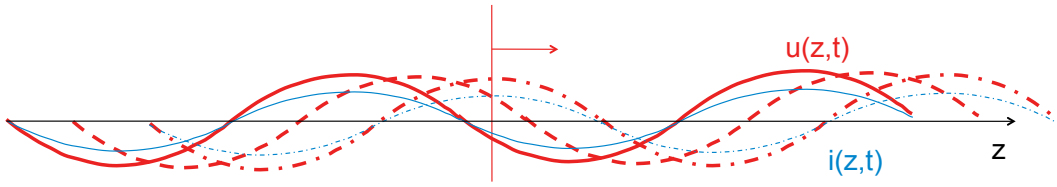


Bild 3.6 Ausbreitung der Spannungswelle und Stromwelle

Die bisher diskutierte Ausbreitung der Spannungswellen und Stromwellen gilt unter der idealen Annahme, dass das Ausbreitungsmedium unbegrenzt ist, also für unendlich lange Leitungen. In diesem Fall nimmt ein Generator, der wie in der Abbildung unten gezeigt, eine Spannung an den Anfang z=0 in die Leitung einspeist, den Wellenwiderstand der Leitung war.

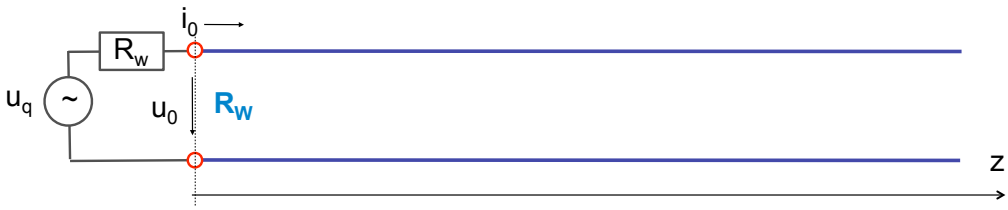


Bild 3.7 Gespeiste unendlich ausgedehnte Leitung

Der Idealfall einer unendlich langen Leitung lässt sich also durch die unten gezeigten Ersatzschaltbilder wiedergeben, wobei die unendlich lange Leitung durch ihren Wellenwiderstand repräsentiert ist. Als Folgerung sollten sich also auch ideale Verhältnisse dadurch nachbilden lassen, dass man eine endliche Leitung durch eine ohmsche Last der Grösse des Wellenwiderstandes der Leitung abschließt.

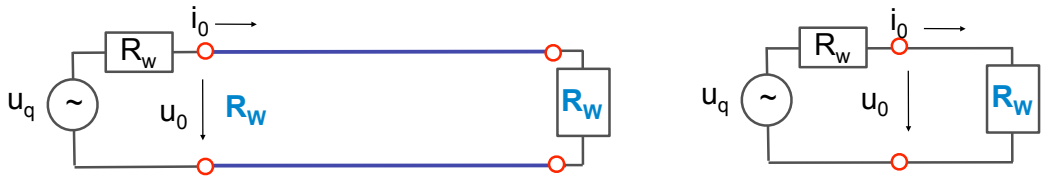


Bild 3.8 Ersatzschaltbild der angepassten Leitung

In diesem Fall wäre der Abschlusswiderstand an die Leitung angepasst. Idealerweise ist auch der Innenwiderstand der Einspeisung gleich dem Wellenwiderstand.

3.4. Reflexionsfaktor

Was geschieht jedoch unter nicht idealen Voraussetzungen am Ende einer endlichen Leitung? Unter der Voraussetzung, dass die die Länge der Leitungen für die Laufzeiten der Signale relevant ist, bzw. dass die Wellenlänge in der Größenordnung der Leitungslänge ist, lassen sich die aus der Akustik bekannten Phänomene beobachten, nämlich Echos (Reflexionen) und hierdurch überlagerte Signale.

Ohne besondere Maßnahmen stellt das Leitungsende eine Grenzfläche zwischen unterschiedlichen Medien dar. Die folgende Abbildung zeigt eine solche Anordnung. Wenn man am Anfang der Leitung (an der Stelle a) ein Signal einspeist, muss man mit Reflexionen des Signals am Leitungsende rechnen (an der Stelle b in der Abbildung).

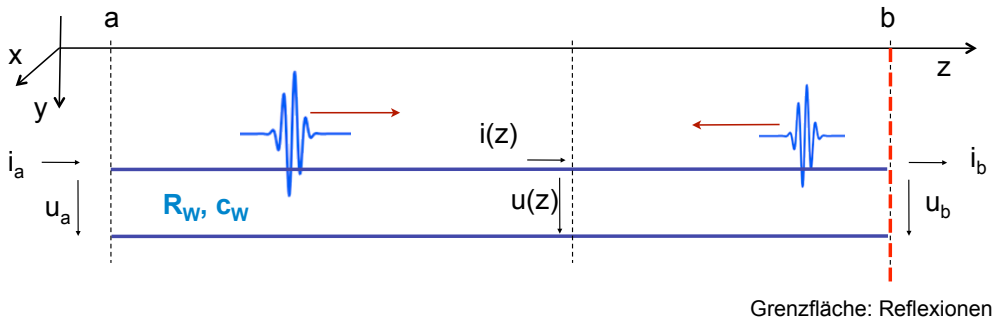


Bild 3.9 Reflexionen am Leitungsende

Für harmonische Signale entstehen an der Grenzfläche ebenfalls Reflexionen der Spannungswelle bzw. Stromwelle. Die Superposition der hin- und rücklaufende Welle verursacht Interferenzen in Form eines Anteils stehender Wellen, wie aus der Akustik bekannt. In der folgenden Abbildung werden folgende besonders einleuchtende Fälle betrachtet: Fall A: Kurzschluss am Leitungsende, Fall B: Leerlauf am Leitungsende (offenes Ende).

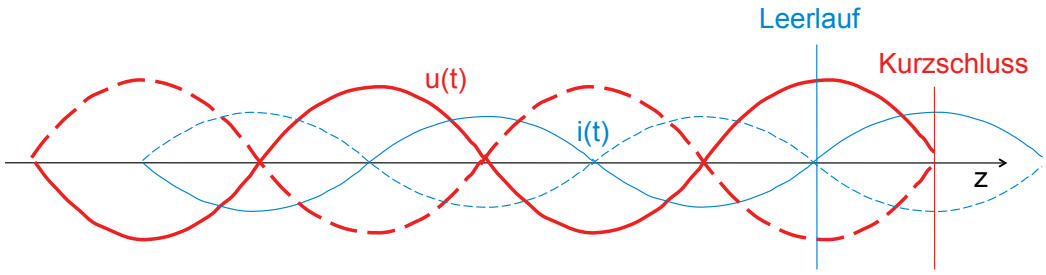


Bild 3.10 Reflexionen bei offener und kurzgeschlossener Leitung

In beiden Fällen treten totale Reflexionen auf. In Fall A (Kurzschluss) stellt sich am Leitungsende ein Spannungsminimum ein: Die Spannungswelle wird mit umgekehrten Vorzeichen zurück geworfen. Der Strom am kurzgeschlossenen Ende ist hingegen maximal, die Stromwelle wird also mit gleichem Vorzeichen reflektiert.

Im Fall B (Leerlauf) kann am offenen Ende kein Strom fließen, es gibt dort einen Stromminimum. Die Stromwelle wird also mit umgekehrtem Vorzeichen reflektiert. Die Spannung hingegen stellt sich am offenen Ende auf einen Maximalwert ein, die reflektierte Welle hat gleiches Vorzeichen und gleiche Amplitude wie die einlaufende Welle.

Durch die Überlagerung der Wellen entstehen stehende Spannungswellen und Stromwellen. Die Amplituden der Wellenbäuche entsprechen den doppelten Amplituden der Spannungswellen bzw. Stromwellen. An anderen Stellen gibt es Wellenknoten. Wellenbäuche und Wellenknoten wechseln sich im Abstand einer haben Wellenlänge ab. Die Schwingungen von Strom und Spannung sind stationär: es findet kein Energietransport statt.

Wegen der Totalreflexion am offenen bzw. kurzgeschlossenen Ende sind Strom und Spannung um eine Viertelwellenlänge zueinander versetzt. Für die Ausbildung stehender Wellen muss die Leitungslänge ein Vielfaches der halben Wellenlänge betragen, bzw. die Wellen stellen sich mit einer hierzu passenden Frequenz auf die Leitungslänge ein. Eben dieser Effekt dient bei Musikinstrumenten zur Erzeugung von Tönen.

Übung 3.2: Aus der Kurzschlussbedingung an der Stelle z=b am Ende der Leitung folgt für die reflektierte Spannungswelle $U_r(b,t) = - U_h(b,t)$. Berechne mit Hilfe des Lösungsansatzes (3.7) die resultierende stehende Welle.

Für den Fall, dass die Leitung am Ende mit ihrem Wellenwiderstand abgeschlossen ist, ist die Leitung dort reflexionsfrei. In allen anderen Fällen ist mit Reflexionen zu rechnen. Die folgende Abbildung zeigt eine Leitung mit einem beliebigen Abschlusswiderstand R_b am Ende der Leitung.

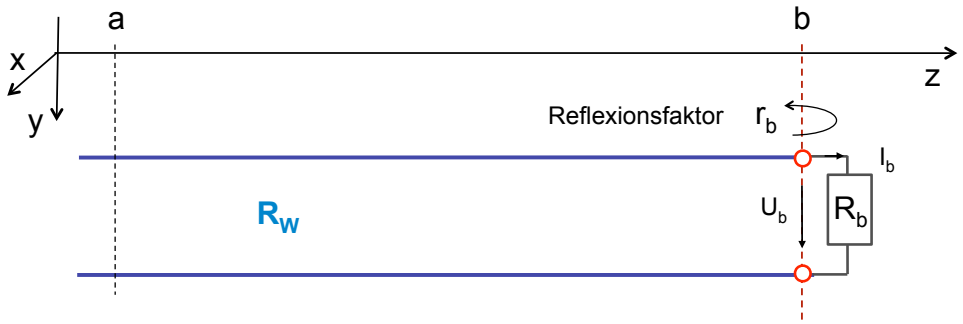


Bild 3.11 Reflexionen am Leitungsende

Durch den nicht an den Wellenwiderstand R_W der Leitung angepassten Abschluss durch R_b einstehen Reflexionen am Leitungsende. Das Verhältnis der Amplitude der rücklaufenden Welle zur hinlaufenden Welle wird als Reflexionsfaktor bezeichnet. Am Ende der Leitung gilt:

$$r_b = U_r / U_h \tag{3.11}$$

Der Reflexionsfaktor ist abhängig von der Wahl des Lastwiderstandes. Mit den Spannungen U_b und dem Strom I_b am Leitungsende gelten folgende Beziehungen am Leitungsende.

$$U_b = R_b \; I_b \tag{3.12}$$

$$U_b = U_h + U_r \tag{3.13}$$

$$I_b = I_h + I_r \tag{3.14}$$

Wegen der Stetigkeit an der Grenzfläche gelten ausserdem

$$I_h = U_h / R_W \,, \quad I_r = - U_r / R_W \tag{3.15}$$

Hieraus ergibt sich der Reflexionsfaktor am Leitungsende zu

$$r_b = \frac{R_b - R_W}{R_b + R_W} \tag{3.16}$$

Übung 3.3: Berechne den Reflexionsfaktor am Leitungsende gemäß (3.16) durch Verwendung der Beziehungen (3.12) bis (3.15).

Übung 3.4: Welcher Reflexionsfaktor gemäß (3.16) ergibt sich für die Spezialfälle (a) offene Leitung, (b) mit dem Wellenwiderstand abgeschlossene Leitung, (c) kurzgeschlossene Leitung? Welchen Einfluss hat der jeweils resultierende Reflexionsfaktor auf die reflektierte Spannung U_r, beziehungsweise auf den reflektierten Strom I_r? Hinweis: siehe (3.11).

In der bisherigen Betrachtung war der Reflexionsfaktor am Ende der Leitung an der Stelle z=b von Interesse. Man kann den Reflexionsfaktor jedoch an jeder beliebigen Stelle z der Leitung betrachten. Für diese Betrachtung ist es zweckmässig, den Koordinatenursprung ℓ=0 ans Leitungsende zu verlegen, da der Reflexionsfaktor am Leitungsende bereits definiert ist. Betrachtet wird nun der Reflexionsfaktor in der Entfernung ℓ von dieser Stelle aus.

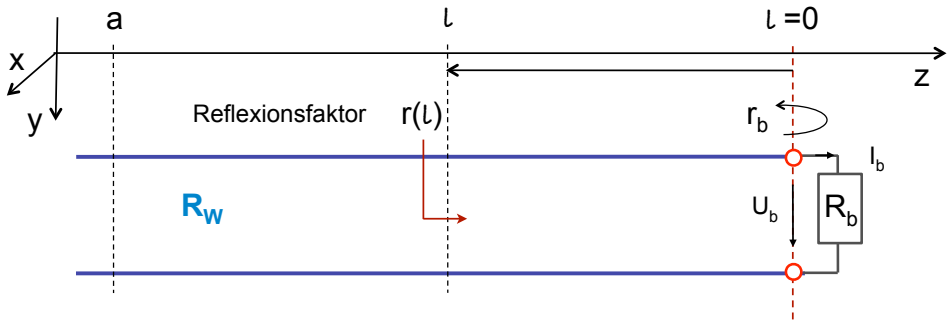


Bild 3.12 Reflexionsfaktor an der Stelle ℓ

Der Reflexionsfaktor r an der Stelle ℓ ist definiert durch das Verhältnis der rücklaufenden Spannungswelle zur hinlaufenden Spannungswelle an dieser Stelle.

$$r(\ell) = U_r(\ell) / U_h(\ell) \tag{3.17}$$

Mit Blick auf die Lösung der Wellengleichung (3.7) ist der Betrag des Reflexionsfaktors |r| gegeben durch das Verhältnis der Beträge $|U_r|/|U_h|$. Jedoch sind U_r und U_h ortsabhängig wegen der Anteile $U_r = |U_r|\, e^{-j\beta z}$ und $U_h = |U_h|\, e^{j\beta z}$. Die zeitabhängigen Anteile in (3.7) spielen für die Betrachtung des Reflexionsfaktors keine Rolle. Der Reflexionsfaktor r(z) ist also eine komplexe Größe mit ortsabhängigem Phasenwinkel.

$$r(z) = U_r / U_h = (|U_r|\, e^{j\beta z}) / (|U_h|\, e^{-j\beta z}) = (|U_r|/|U_h|)\, e^{j2\beta z} \tag{3.18}$$

Mit dem gewählten Bezugspunkt am Ende der Leitung mit $r(b) = r_b$ ergibt sich für den Reflexionsfaktor $r(\ell) = r(b-\ell)$ an der Stelle ℓ

$$r(\ell) = r_b\, e^{-j2\beta\ell} \tag{3.19}$$

Der Reflexionsfaktor in der Entfernung ℓ ist also um den Phasenwinkel $\psi = -2\beta\ell$ in verschoben gegenüber dem Reflexionsfaktor am Ende der Leitung. Hierbei bedeutet $\beta=2\pi/\lambda$ die Phasenkonstante der Welle. Der Faktor 2 in der Phasenverschiebung kommt daher, dass die zunächst die hinlaufende Welle die Strecke ℓ vom Ausgangspunkt aus durchläuft. Im Anschluss an die Reflexion am Ende der Leitung durchläuft die reflektierte zurücklaufende Welle erneut die Strecke ℓ zurück zum Ausgangspunkt. Dadurch benimmt sich bezüglich der Reflexion beispielsweise eine Leitung der Länge $\ell = \lambda/4$ wie eine Leitung der Länge $\lambda/2$.

Da der Reflexionsfaktor komplex ist und bezogen auf den Abschlusswiderstand eine Phasenverschiebung in Abhängigkeit der Leitungslänge erzeugt, ist auch der an beliebiger Stelle auf der Leitung gemessene Widerstand komplex. Ebenso gibt es keine Einschränkungen für den Abschlusswiderstand am Ende der Leitung. Statt des Wirkwiderstandes R_b am Leitungsende gelten die in diesem Abschnitt behandelten Beziehungen für jeden komplexen Abschlusswiderstand Z_b. In Verallgemeinerung von (3.16) gilt dann (3.20).

$$r_b = \frac{Z_b - R_W}{Z_b + R_W} \tag{3.20}$$

3.5. Leitungstransformation

Bei bekanntem Reflexionsfaktor an einer gegeben Stelle auf der Leitung kann man umgekehrt auf den komplexen Widerstand an dieser Stelle schließen. Durch Umformen der Gleichung (3.20) erhält man so einen Ausdruck für die Abschlussimpedanz Z_b in Abhängigkeit von r_b.

$$Z_b = \frac{1+ r_b}{1- r_b} \; R_W \tag{3.21}$$

Ist am Anfang der Leitung (an der Stelle a) der Reflexionsfaktor r_a gegeben, erhält man sinngemäß so für den Eingangsimpedanz R_a folgende Beziehung.

$$Z_a = \frac{1+ r_a}{1- r_a} \; R_W \tag{3.22}$$

Die folgende Abbildung zeigt die Anordnung. Durch die Leitung der Länge a wird die Abschlussimpedanz Z_b in die Eingangsimpedanz Z_a transformiert. Den Reflexionsfaktor r_b am Ende der Leitung ermittelt man gemäß Gleichung (3.20). Der Reflexionsfaktor r_a an der Stelle $\ell = a$ ergibt sich aus Gleichung (3.19) zu

$$r_a = r_b \, e^{-j2\beta a} \tag{3.23}$$

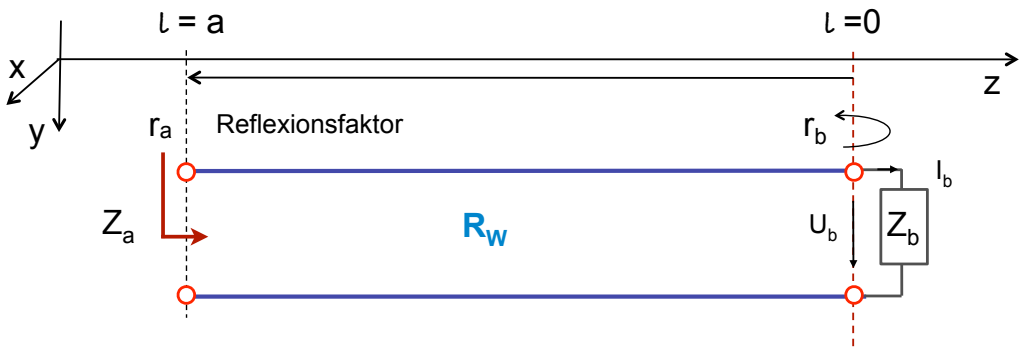


Bild 3.13 Eingangsimpedanz aus dem Reflexionsfaktor ermitteln

Auf diese Art lässt sich eine Leitung einer vorgegeben Länge zur Transformation von Impedanzen verwenden. Als spezielle Anwendungsfälle werden der Viertelwellentransformator (eine Leitung der Länge $\ell = \lambda/4$) und der Halbwellentransformator (eine Leitung der Länge $\ell = \lambda/2$) näher betrachtet.

Viertelwellenleitung

Für den Viertelwellentransformator führt Einsetzen von $\ell = \lambda/4$ in Gleichung (3.19) zu

$$r_a = r(\lambda/4) = r_b\, e^{-j2\beta\lambda/4} = r_b\, e^{-j\pi} = -\, r_b \qquad (3.24)$$

Die Viertelwellentransformation führt also zu einer Umkehr des Vorzeichens des Reflexionsfaktors am Leitungsanfang. Da die Leitung von der einlaufenden und rücklaufenden Welle durchlaufen wird, erscheint dieser Effekt auch unmittelbar plausibel.

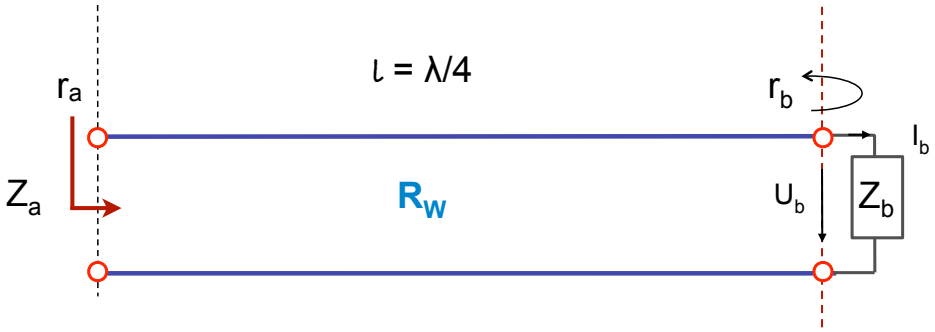


Bild 3.14 Viertelwellentransformation

Mit Blick auf die Gleichungen für den Abschlussimpedanz Z_b (3.21) und die Eingangsimpedanz Z_a (3.22) erkennt man, dass für sich für $r_a = -\, r_b$ für Z_a die Ausdrücke in Zähler und Nenner im Vergleich zu Z_b vertauschen. Multiplikation der beiden Gleichungen nach Einsetzen von $r_a = -\, r_b$ führt also zu folgender Beziehung zwischen Z_a und Z_b.

$$Z_a = R_W^2 / Z_b \qquad (3.25)$$

Ein praktischer Anwendungsfall der Viertelwellentransformation besteht darin, eine Last mit vorgegebenen Ausgangswiderstand R_a an eine Einspeisung mit dem Innenwiderstand R_b mit Hilfe einer geeigneten Viertelwellenleitung anzupassen. Hierzu muss der Wellenwiderstand

der Leitung, der sich aus der Geometrie des Leiters ermittelt, geeignet gewählt werden, eben gemäß Gleichung (3.25) zu $R_W = \sqrt{(R_a R_b)}$.

Übung 3.5: Eine Quelle mit Innenwiderstand R_a = 200 Ohm soll eine Last von R_b = 50 Ohm speisen. Zur Anpassung der Impedanzen soll ein Viertelwellentransformator verwendet werden. Wie ist der Wellenwiderstand R_W der Viertelwellenleitung zu bemessen?

Übung 3.6: Berechne den Reflexionsfaktor r_b zur Lösung von Übung 3.5 und stelle den Reflexionsfaktor in der komplexen Ebene dar. Bestimme hieraus den Reflexionsfaktor r_a am Eingang grafisch. Was ist für die Viertelwellentransformation charakteristisch?

Halbwellenleitung

Für den Halbwellentransformator wird eine Anordnung wie in der folgenden Abbildung verwendet. Die verlustlose Leitung mit dem Wellenwiderstand R_W ist mit einer Abschlussimpedanz Z_b terminiert. Da die Leitung fehlangepasst ist, ergeben sich am Leitungsende Reflexionen.

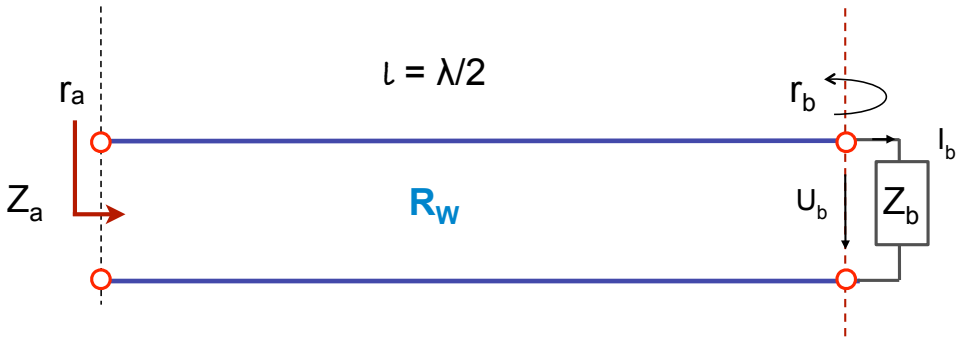


Bild 3.15 Halbwellenleitung

Übung 3.7: Berechne den Reflexionsfaktor r_a am Eingang des Halbwellenleiters in Abhängigkeit von r_b. Welche Eingangsimpedanz Z_a ergibt sich? Welchen Einfluss haben Leitungen der Länge einer halben Wellenlänge bzw. Vielfachen einer halben Wellenlänge in einer Anordnung?

Übung 3.8: Stelle den Reflexionsfaktor r_b am Ende der Leitung in der komplexen Zahlenebene dar. Bestimme den Reflexionsfaktor r_a am Leitungsanfang grafisch. Was ist für die Halbwellenleitung charakteristisch? Welchen Effekt ergeben Vielfache der Leitungslänge?

3.6. Smith-Diagramm

Der Reflexionsfaktor ist als Verhältnis der Amplituden von rücklaufender Welle zur hinlaufenden Welle definiert (siehe Gleichung 3.11). Definitionsgemäß ist der Reflexionsfaktor eine komplexe Zahl mit Betrag kleiner 1 (da die Amplitude der reflektierten Welle nicht größer sein kann als die der einlaufenden Welle). Bezogen auf den Reflexionsfaktor am Leitungsende (bzw. am Leitungsanfang) bewirkt eine verlustlose Leitung eine reine Phasenverschiebung des Reflexionsfaktors $r(\ell)$ in Abhängigkeit der Entfernung (siehe Gleichung 3.19).

In der komplexen Ebene lässt sich eine Leitungstransformation daher gut grafisch interpretieren: die Leitung bewirkt eine Phasenverschiebung des Reflexionsfaktors, d.h. eine Drehung des Zeigers r um den Ursprung. Die Richtung ist davon abhängig, ob man sich vom Bezugspunkt weg bewegt, bzw. auf den Bezugspunkt zubewegt. Die Phasenverschiebung insgesamt ist abhängig von der Leitungslänge und beschreibt einen Halbkreis für λ/4, bzw. eine volle Kreisbewegung bei λ/2.

Zur Vereinheitlichung der Schreibweise werden die Werte der gegebenen Impedanz an einem Ende der Leitung auf den Wellenwiderstand normiert ($z = Z/R_W$). Die normierten Koordinaten der komplexen Impedanz-Ebene werden ebenfalls gleich ins Diagramm übernommen. Auf diese Weise kann die Lösung der Transformation komplett grafisch erfolgen. Vor allen Dingen bleibt auf diese Weise gegenüber einem rein numerischen Verfahren der Überblick über den physikalischen Effekt erhalten.

Die folgende Abbildung zeigt den Einheitskreis des komplexen Reflexionsfaktors zusammen mit den Koordinaten der auf den Wellenwiderstand der Leitung normierten Impedanzen. Diese Darstellung wird nach seinem Urheber als Smith-Diagramm bezeichnet. Ein Smith-Diagramm für Übungsaufgaben findet sich im Web beispielsweise im Archiv der Wikimedia unter Creative Commons Lizenz bei: Archiv Wikimedia.

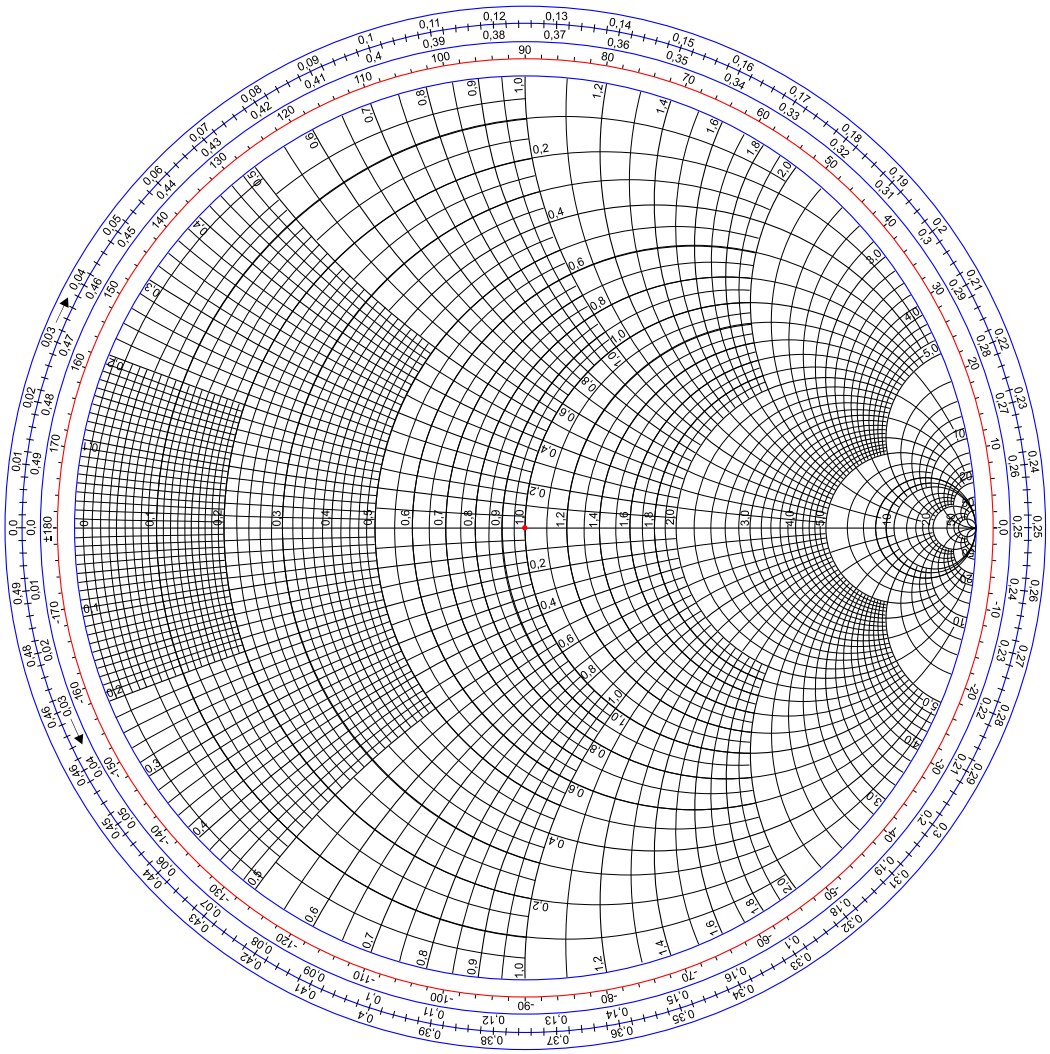


Bild 3.16 Smith-Diagramm (Quelle: Archiv Wikimedia)

Übungen 3.9: Verwende für Übungen 3.6 und 3.8 das Smith Diagramm aus der Abbildung. Hinweis: Normiere hierzu die gegebene Impedanz am Leitungsende auf den Wellenwiderstand ($z_b = Z_b / R_W$) und übertrage die Werte anschließend ins Diagramm.

Übung 3.10: Wo finden sich folgende Punkte im Smith-Diagramm: (a) offene Leitung, (b) mit dem Wellenwiderstand abgeschlossene Leitung, (c) kurzgeschlossene Leitung? Was bewirkt eine Viertelwellentransformation einer offenen Leitung?

Übung 3.11: Eine Leitung der Länge $\ell = 0{,}2\ \lambda$ mit Wellenwiderstand $R_W = 50$ Ohm ist mit einer komplexen Impedanz $Z_b = (25 + j75)$ Ohm abgeschlossen. Berechne die Eingangsimpedanz.

Die innerhalb des Einheitskreises des Reflexionsfaktors wiedergegebenen Koordinaten der komplexen Impedanz-Ebene im Smith-Diagramm kommen durch die Transformation gemäß Gleichung (3.20) zustande. In normierter Schreibweise mit $z_b = Z_b / R_W$ bzw. allgemein für $z = Z / R_W$ lautet Gleichung (3.20) wie folgt.

$$r = \frac{z - 1}{z + 1} \tag{3.26}$$

Der Ursprung der z-Ebene (Impedanz-Ebene) wird somit in den Punkt r = -1 abgebildet. Die x-Achse (Abszisse) der z-Ebene mit dem Realteil der Impedanz bleibt in der r-Ebene erhalten. Der angepasste Zustand mit z=1 bildet dabei in den Koordinatenursprung der r-Ebene ab. Mit wachsendem Abschlusswiderstand (bis offene Leitung) bewegt sich die Abbildung in der r-Ebene weiter nach rechts (bis r=1).

Die imaginäre Achse der z-Ebene (Ordinate) startet ebenfalls von der Abbildung des Koordinatenursprungs bei r = -1 aus und bildet die äußere Begrenzung des Einheitskreises in der r-Ebene. Große positive bzw. negative Imaginärteile treffen sich mit großen Realteilen im Punkt r = 1. Parallelen zur imaginären Achse in der z-Ebene (konstanter Realteil) sind in der r-Ebene ebenfalls zu Kreisen im Inneren des Einheitskreises verbogen.

Die Kreise innerhalb des Smith-Diagramms stellen also Orte (Impedanzen) mit konstantem Realteil dar. Umgekehrt stellen die Parallelen zur positiven reellen Achse in der z-Ebene, die in der r-Ebene von der auf den Einheitskreis gebogenen imaginären z-Achse aus zum Punkt r = 1 verlaufen, Orte mit konstantem Imaginärteil der Impedanz z dar.

Übung 3.12: Die z-Halbebene mit negativem Realteil wird im Smith Diagramm nicht abgebildet. Welche Einschränkungen ergeben sich dadurch?

Übung 3.13: Durch Spiegelung am Ursprung der r-Ebene lässt sich im Smith-Diagramm der Kehrwert einer Impedanz ermitteln. Prüfe diesen Zusammenhang nach.

3.7. Verlustbehaftete Leitung

Im allgemeinen Fall kann man davon ausgehen, dass eine Leitung zusätzlich zum Induktivitätsbelag einen Widerstandsbelag aufweist (bedingt durch ohmsche Verluste), sowie

zusätzlich zum Kapazitätsbelag einen Leitwertbelag (bedingt durch Verluste im Dielektrikum). Die folgende Abbildung zeigt das Ersatzschaltbild eines solchen Leitungsabschnitts.

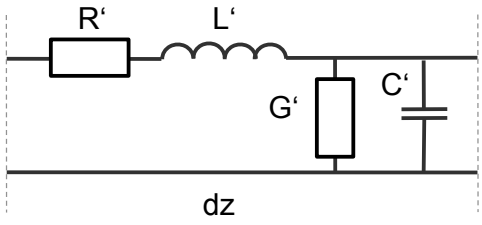


Bild 3.17 Ersatzschaltbild der verlustbehafteten Leitung

Die Differentialgleichung der verlustbehafteten Leitung wird auch als *Telegraphengleichung* bezeichnet. Der Name deutet auf die Relevanz der Leitungsverluste im niederfrequenten Bereich (10kHz) und lange Leitungen (ca. 5 km) hin. Die Herleitung der Differentialgleichung geschieht auf die gleiche Weise wie eingangs in Abschnitt 3.1 gezeigt. Für die differentielle Spannung und den differentiellen Strom ergeben sich aus dem Ersatzschaltbild folgende Beziehungen.

$$- dU/ dz = (R` + j\omega L´) I \tag{3.27}$$

$$- dI /dz = (G`+ j\omega C´) U \tag{3.28}$$

Durch erneutes Differenzieren von (3.27) nach d/dz und anschliessendes Einsetzen von (3.28) in (3.27) ergibt sich die Telegraphengleichung:

$$d^2U / dz^2 = (R`+ j\omega L´) (G`+ j\omega C´) U \tag{3.29}$$

Als Lösungsansatz kommt wiederum eine Kombination aus hinlaufender und rücklaufender Wellen in Frage, wie bereits in Abschnitt 3.1 in Gleichung (3.4) eingeführt.

$$U(z) = U_h e^{-\gamma z} + U_r e^{\gamma z} \tag{3.30}$$

Allerdings ist die Ausbreitungskonstante γ jetzt eine komplexe Größe der Form

$$\gamma = \alpha + j \beta = \sqrt{((R`+ j\omega L´) (G`+ j\omega C´))} \tag{3.31}$$

Hierbei bezeichnet $\alpha = Re\{\gamma\}$ die Dämpfungskonstante und $\beta = Im\{\gamma\}$ die Phasenkonstante der Welle. Aus diesem Ansatz heraus lassen sich die Gleichungen für Spannung und Strom wiederum berechnen. Gegenüber der Berechnung aus Abschnitt 3.1 kommt jetzt die ein exponentieller Ausdruck $e^{-\alpha z}$ mit der Dämpfungskonstante α dazu. Bei Beschränkung auf die die hinlaufende Welle ergibt sich folgender Ausdruck.

$$U(z) = U_h e^{-\gamma z} = U_h e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \tag{3.32}$$

Den Spannungsverlauf u(z,t) nach Ort und Zeit erhält man wie gewohnt durch Ergänzung des zeitabhängigen Anteils $e^{-j\omega t}$ und Bildung des Realteils, wobei $U_h = |U_h| e^{j\Phi_{0h}}$ verwendet wird.

$$u(z,t) = Re \{ U_h e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} e^{j\omega t}\}$$

$$u(z,t) = |U_h| e^{-\alpha z} \cos (\omega t - \beta z + \Phi_{0h}) \tag{3.33}$$

Je länger die Spannungswelle die Leitung durchläuft, desto stärker wird sie gedämpft. Das übrige Verhalten entspricht dem der verlustlosen Leitung. Durch Differenzieren der Spannung in Gleichung (3.32) nach dz und Einsetzen der Lösung in Gleichung (3.27) lässt sich

der Strom ermitteln, sowie aus dem Verhältnis von Spannung und Strom dann der Wellenwiderstand der verlustbehafteten Leitung. Für den komplexen Wellenwiderstand erhält man:

$$Z_w = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}} \tag{3.34}$$

Übung 3.14 : Berechne Gleichung (3.34) unter Verwendung von (3.27), (3.31) und (3.32)

Übung 3.15: Wie verhält sich der komplexe Wellenwiderstand (3.34) für hohe Frequenzen?

Ob ein komplexer Wellenwiderstand zu berücksichtigen ist, kann man bei gegebener Frequenz und gegebenen Impedanzen und Admittanzen entscheiden. In der Regel überwiegt bei Frequenzen oberhalb 100 kHz der frequenzabhängige induktive und kapazitive Anteil, so dass man sich auf den reellen Wellenwiderstand $Z_W = R_W = \sqrt{(L'/C')}$ beschränken kann.

In der Praxis der Hochfrequenztechnik überwiegt daher die verlustlose Leitung. Als Spezialfall kann man Leitungen mit geringen Verlusten betrachten, d.h. $R' \ll j\omega L'$ und $G' \ll j\omega C'$. Hierbei belässt man den Wellenwiderstand als reelle Größe gemäß $R_W = \sqrt{(L'/C')}$, führt jedoch eine Dämpfungskonstante ein, die sich aus folgender Vereinfachung ergibt.

$$\gamma^2 = (R' + j\omega L')(G' + j\omega C')$$

$$\gamma^2 = (j\omega)^2 C'L' \left(1 + R'/j\omega L' + G'/j\omega C' + R'G'/(j\omega)^2 C'L'\right) \tag{3.35}$$

Der letzte Ausdruck mit den quadratischen Anteilen kann hierbei vernachlässigt werden. Unter Verwendung der Näherung $\sqrt{(1+x)} \approx 1 + x/2$ für $x \ll 1$ ergibt sich folgender Wert.

$$\gamma = (j\omega)\sqrt{C'L'} + 1/2\,(R'/R_W + G'R_W) \tag{3.36}$$

Somit wären

$$\alpha = \mathrm{Re}\{\gamma\} = 1/2\,(R'/R_W + G'R_W) \tag{3.37}$$

$$\beta = \mathrm{Im}\{\gamma\} = \omega\sqrt{C'L'} \tag{3.38}$$

Die Dämpfungskonstante α enthält einen Anteil für die ohmschen Verluste (R´) im Leiter, sowie einen Anteil (G´) für die Verluste im Dielektrikum. Die Phasenkonstante β verbleibt in der bekannten Form wie bei der verlustlosen Leitung.

4. Streuparameter

Mit Hilfe der Streuung von Wellen lassen sich die Eigenschaften von Schaltungen mit mehreren Eingängen oder Ausgängen beschreiben. Diese sogenannten Streuparameter haben die Eigenschaft, dass sie sich messtechnisch leichter erfassen lassen als Impedanzen oder Admittanzen. Schaltungen mit zwei Toren (z.B. einem Eingangstor und Ausgangstor) bezeichnet man als Zweitore. Die Abbildung zeigt ein Zweitor, das an jedem Tor mit einer Leitung beschaltet ist.

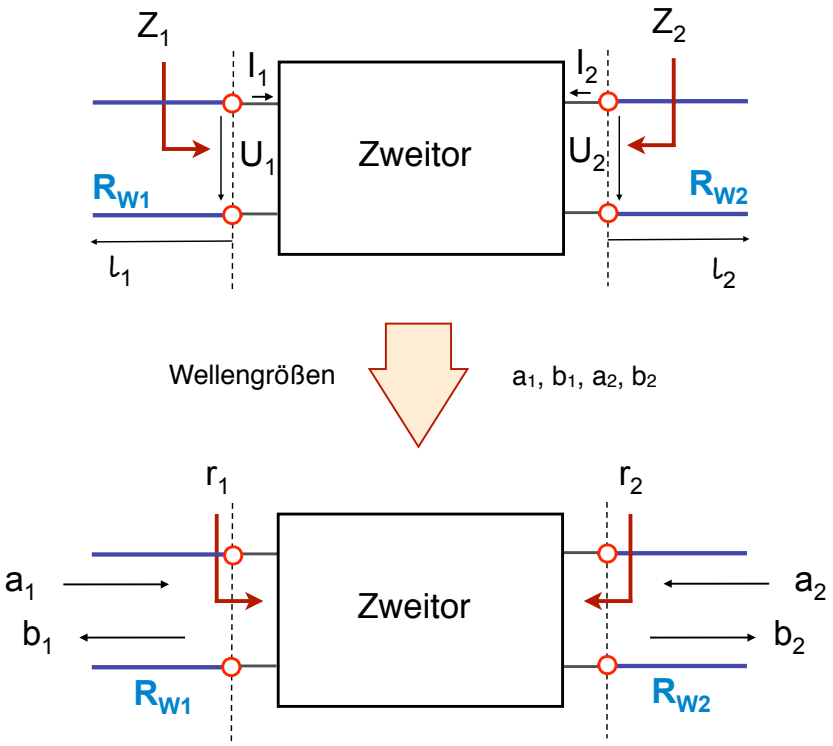


Bild 4.1 Zweitor mit Anschlussleitungen und Wellengrößen

Die Eigenschaften des Zweitors lassen sich mit Hilfe der Spannungswellen bzw. Stromwellen an jedem Tor beschreiben. Jedes Tor für sich betrachtet stellt einen Abschluss der jeweils angeschlossenen Leitung dar. Die beiden Tore sind mit 1 und 2 indiziert. Für die Beschreibung des Zweitors durch Streuparameter werden zunächst Wellengrößen als normierte Spannungswellen eingeführt.

4.1. Einführung von Wellengrößen

Als Wellengrößen a und b werden folgende normierte Spannungswellen eingeführt, wobei i den Torindex bezeichnet.

$$a_i = U_{hi} / \sqrt{R_{Wi}} \tag{4.1}$$

$$b_i = U_{ri} / \sqrt{R_{Wi}} \tag{4.2}$$

Somit stellt a_1 die am Tor 1 einlaufende normierte Spannungswelle dar, b_1 die von Tor 1 reflektierte, zurücklaufende normierte Spannungswelle. Die Normierung erfolgt an jedem Tor auf den Wellenwiderstand der jeweiligen Anschlussleitungen, ist also für die beiden Tore

unterschiedlich. Die jeweiligen Reflexionsfaktoren r_1 bzw. r_2 erhält man wie gewohnt aus dem Verhältnis der rücklaufenden zur hinlaufenden Spannungswelle, wobei sich hierzu auch die normierten Größen a_i und b_i verwenden lassen.

Die physikalische Einheit der Wellengrößen ist $V/\sqrt{\Omega}$. Die Normierung auf die Wurzel der Wellenwiderstände verfolgt den Zweck, dass sich aus den Wellengrößen recht einfach die Leistung berechnen lässt. So ergeben sich für die auf das Tor i zulaufende Wirkleistung bzw. vom Tor i reflektierte Wirkleistung auf der Anschlussleitung:

$$P_{ai} = (a_i\, a_i^*)/2 = |a_i|^2 / 2 \tag{4.3}$$

$$P_{bi} = (b_i\, b_i^*)/2 = |b_i|^2 / 2 \tag{4.4}$$

Hierbei bezeichnen a_i^* und b_i^* die konjugiert komplexen Größen zu a_i und b_i (der Imaginärteil der konjugiert komplexen Größe hat jeweils das umgekehrte Vorzeichen des Imaginärteils der Größe).

Übung 4.1 : Prüfen Sie die Beziehungen (4.3) und (4.4) mit Hilfe der Spannungswellen und Stromwellen gemäß Abbildung 4.1 nach. Hinweis: U_h und U_r besitzen komplexe Amplituden, keine Effektivwerte.

Die Wellengrößen stellen nur eine normierte Schreibweise dar. Alls bisher mit Hilfe der Spannungswellen, Stromwellen hergeleiteten Zusammenhänge bleiben weiterhin gültig. Aus den Wellengrößen lassen sich unmittelbar die Spannungswellen und Stromwellen berechnen. Hierfür werden folgende Zusammenhänge benutzt:

$$U_i = U_{hi} + U_{ri} \tag{4.5}$$

$$I_i = (U_{hi} - U_{ri}) / R_{Wi} \tag{4.6}$$

Durch Einsetzen der Beziehungen (4.1) und (4.2) erhält man hieraus die Spannungen und Ströme an den Toren.

$$U_i = (a_i + b_i)\, \sqrt{R_{Wi}} \tag{4.7}$$

$$I_i = (a_i - b_i) / \sqrt{R_{Wi}} \tag{4.8}$$

Übung 4.2: Zeigen Sie, dass sich umgekehrt die Wellengrößen aus den Spannungen und Strömen an den Toren mit folgendem Ergebnis berechnen lassen:

$$a_i = (U_i + R_{Wi}\, I_i) / (2\, \sqrt{R_{Wi}}) \tag{4.9}$$

$$b_i = (U_i - R_{Wi}\, I_i) / (2\, \sqrt{R_{Wi}}) \tag{4.10}$$

4.2. Beschreibung eines Zweitors durch Streuparameter

Die Streuparameter geben das Verhalten des Zweitors bzgl. der Wellengrößen wieder, d.h. welche reflektierten Wellengrößen bzw. transmittierten Wellengrößen sich aus den einlaufenden Wellengrößen an beiden Toren ergeben. Die Wellengrößen werden durch die Streuparameter miteinander verknüpft. Für die Reflexionsfaktoren r_1 und r_2 an Tor 1 bzw. Tor 2 ist das nichts Neues. Jedoch zeigen die Streuparameter auch Abhängigkeiten zwischen beiden Toren, d.h. den jeweils transmittierten Teil.

Wie in der Abbildung gezeigt, ergibt sich die an Tor 1 zurücklaufende Wellengröße b_1 aus dem an Tor 1 reflektierten Anteil von a_1, sowie aus dem an Tor 2 transmittierten Anteil von a_2. Ebenso ergibt sich die an Tor 2 zurücklaufende Wellengröße b_2 aus dem an Tor 2 reflektierten Anteil von a_2, sowie dem an Tor 1 transmittierten Anteil von a_1.

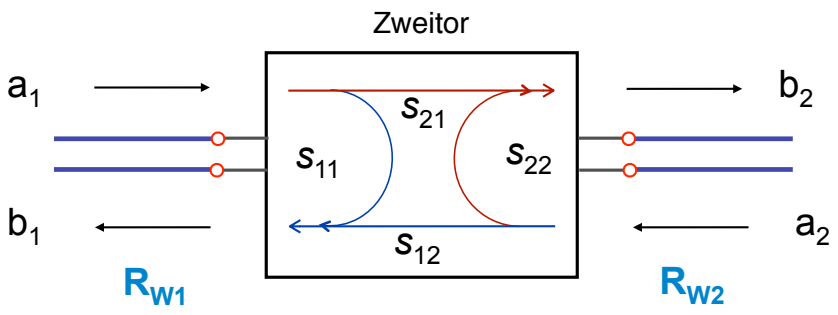


Bild 4.2 Streuparameter des Zweitors

Es ergeben sich also die Gleichungen:

$$b_1 = s_{11}\, a_1 + s_{12}\, a_2 \tag{4.11}$$

$$b_2 = s_{21}\, a_1 + s_{22}\, a_2 \tag{4.12}$$

In Matrixform ergibt sich mit Hilfe der Streumatrix S der gleiche Zusammenhang in folgender Schreibweise:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}}_{S} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \tag{4.13}$$

Die einzelnen Streuparameter lassen sich mit Hilfe spezieller Randbedingungen für a_1 bzw. a_2 interpretieren.

$s_{11} = b_1 / a_1$ für $a_2 = 0$: Eingangsreflexionsfaktor bei angepasstem Ausgang (4.14)

$s_{12} = b_1 / a_2$ für $a_1 = 0$: Rückwärtstransmissionsfaktor bei angepasstem Eingang (4.15)

$s_{21} = b_2 / a_1$ für $a_2 = 0$: Vorwärtstransmissionsfaktor bei angepasstem Ausgang (4.16)

$s_{22} = b_2 / a_2$ für $a_1 = 0$: Ausgangsreflexionsfaktor bei angepasstem Eingang (4.17)

Dass s_{11} und s_{22} Reflexionsfaktoren am Eingang bzw. Ausgang darstellen, ergibt sich unmittelbar durch Einsetzen von (4.1) und (4.2) in die Gleichungen (4.14) und (4.17).

Übung 4.3: Weisen Sie nach, dass s_{11} und s_{22} Reflexionsfaktoren am Eingang bzw. Ausgang darstellen.

Da die speziellen Randbedingungen jeweils Anpassung an der gegenüberliegenden Seite bedeuten, sind die Streuparameter näher am gewünschten Arbeitspunkt und messtechnisch ebenfalls erfassbar. Bei Impedanzmatrizen bzw. Admittanzmatrizen hätte man als Rand-

bedingungen Kurzschlüsse bzw. Leerlauf. Solche Randbedingungen sind bei hochfrequenztechnischen Schaltungen bzw. bei Verstärkern wesentlich ungünstiger realisierbar.

4.3. Eigenschaften aus Streuparametern ablesen

Leistungsbilanz

Der Eingangsreflexionsfaktor (bzw. Ausgangsreflexionsfaktor) gestattet unmittelbar die Berechnung der am Eingang (bzw. Ausgang) reflektierten Wirkleistung (siehe Gleichungen (4.3) und (4.4)), wenn die jeweils andere Seite angepasst ist. Aus der reflektierten Leistung lässt sich unmittelbar die vom Zweitor aufgenommene Leistung bestimmen.

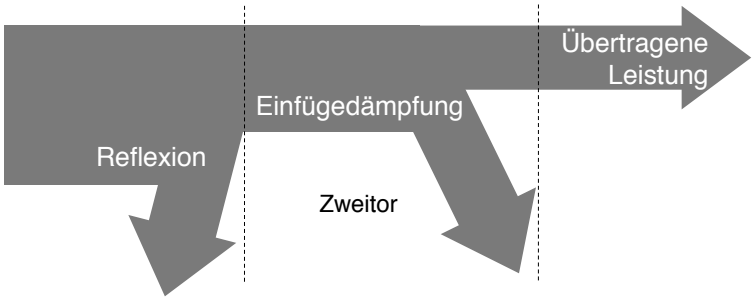


Bild 4.3 Leistungsbilanz

So betrachtet verursacht die Reflexion eine Reduktion der Leistung, bzw. eine Reflexionsdämpfung (engl. Return Loss). Sinngemäß ergibt sich aus den Transmissionsfaktoren die Einfügedämpfungen (engl. Insertion Loss), bzw. bei Verstärkern die Einfügeverstärkung. In logarithmischer Schreibweise lassen sich aus den Streuparameter unmittelbar Leistungsfaktoren bzw. Dämpfungen ablesen.

Verlustfreiheit

Ein passives Zweitor ist verlustfrei, wenn in keinem Betriebszustand Energie verloren geht. Aufgenommene Leistung muss also wieder zum Vorschein kommen, bzw. die Summe der zulaufenden und ablaufenden Wirkleistung muss konstant sein.

Für ein mit a_1 gespeistes Zweitor bedeutet das: $P_{a1} = P_{b1} + P_{b2}$. Für ein mit a_2 gespeistes Zweitor gilt sinngemäß: $P_{a2} = P_{b2} + P_{b1}$. Für ein verlustloses Zweitor ergibt sich hieraus für die Streuparameter:

$$|s_{11}|^2 + |s_{21}|^2 = 1 \tag{4.18}$$

$$|s_{22}|^2 + |s_{12}|^2 = 1 \tag{4.19}$$

Übung 4.4: Weisen Sie (4.18) nach. Hinweis: Verwenden Sie $P_{a1} = P_{b1} + P_{b2}$, sowie die Gleichungen (4.3) und (4.4).

Übertragungssymmetrie

Sofern bei einem Zweitor $s_{12} = s_{21}$ gilt, ist das Zweitor übertragungssymmetrisch (bzw. reziprok). In diesem Fall können Ort von Ursache und Wirkung vertauscht werden, ohne dass sich die Beziehungen zwischen Ursache und Wirkung ändern. Mit anderen Worten spielt es

keine Rolle, ob das Zweitor vorwärts oder rückwärts herum eingebaut wird, sofern seine Bezugswiderstände an beiden Toren gleich sind.

Übertragunssymmetrie (Reziprozität) ist bei Zweitoren gegeben, die aus Widerständen, Kapazitäten und Induktivitäten bestehen. In der Regel also dann, wenn passive und verlustlose Komponenten und Materialien verwendet werden, die keine richtungsabhängigen (anisotrope) Eigenschaften haben.

Vollständige Symmetrie

Eine vollständigen Symmetrie ist dann gegeben, wenn nicht nur die Transmissionsfaktoren in beiden Richtungen gleich sind (Übertragungssymmetrie, $s_{12} = s_{21}$), sondern zusätzlich die Reflexionsfaktoren, also $s_{11} = s_{21}$. Eine solche Symmetrie ist beispielsweise bei symmetrischem Schaltungsaufbau gegeben.

Rückwirkungsfreiheit

Ein Zweitor ist rückwirkungsfrei, wenn es in einer Richtung überträgt, in der umgekehrten Richtung jedoch nicht. Rückwirkungsfreiheit ist mit Symmetrie natürlich nicht vereinbar. Ein rückwirkungsfreies Verhalten besitzen beispielsweise Verstärker, die in Vorwärtsrichtung ideal übertragen, in Rückwärtsrichtung jedoch eine hohe Isolation (möglichst geringe Rückwärtsübertragung) aufweisen. Für die Streuparameter ergibt sich bei Rückwirkungsfreiheit dann $s_{12} = 0$ (keine Rückwärtsübertragung) und $s_{21} \neq 0$ (=1 bei idealer Vorwärtsübertragung)).

4.4. Streuparameter berechnen

Die in der folgenden Abbildung gezeigte Schaltung zeigt ein Zweitor mit Eingangsimpedanzen Z_1 und Z_2, sowie mit den Bezugswiderständen R_{W1} und R_{W2}. Für die Bestimmung der Streuparameter ist das Zweitor definitionsgemäß an Tor 2 mit einer Last R_{W2} beschaltet, sowie an Tor 1 mit einer Last R_{W1}.

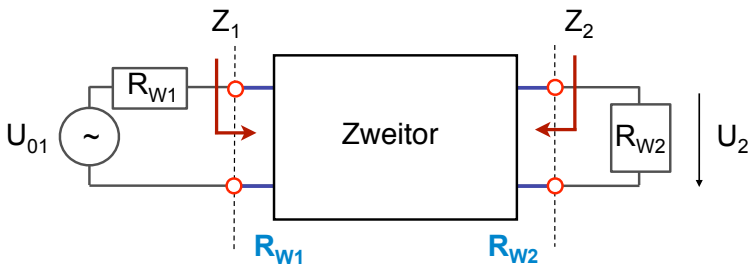


Bild 4.4 Ermittlung der Reflexionsfaktoren und Transmissionsfaktoren am Zweitor

Die Reflexionsfaktoren ergeben sich unmittelbar aus den Eingangsimpedanzen Z_i und den Bezugswiderständen R_{Wi}. Man erhält mit den Randbedingungen gemäß (4.14) und (4.17):

$$s_{11} = (Z_1 - R_{W1}) / (Z_1 + R_{W1}) \tag{4.20}$$

$$s_{22} = (Z_2 - R_{W2}) / (Z_2 + R_{W2}) \tag{4.21}$$

Die Transmissionsfaktoren erhält man aus der ans andere Tor transmittierten Spannung, indem man das Zweitor an einem Tor mit einer angepassten Spannungsquelle speist. Die Abbildung oben gibt die Anordnung zur Bestimmung von s_{21} wieder (Vorwärtstransmissionsfaktor bei angepasstem Ausgang). Man erhält für die Transmissionsfaktoren:

$$s_{21} = (2\ U_2 / U_{01}) * \sqrt{(R_{W1}/R_{W2})} \tag{4.22}$$

$$s_{12} = (2\ U_1 / U_{02}) * \sqrt{(R_{W2}/R_{W1})} \tag{4.23}$$

Für s_{12} ist die Anordnung aus Abbildung 4.4 sinngemäß mit Einspeisung U_{02} an Tor 2 und Berechnen von U_1 an Tor 1 umzuändern.

Übung 4.5: Weisen Sie die Berechnungsformel (4.22) nach. Verwenden Sie hierzu die Definitionen (4.16), (4.1) und (4.2) sowie die Beziehung (4.5) jeweils am Eingangstor und Ausgangstor in Bezug auf die Anordnung gemäß Bild 4.4.

Als Beispiel seien die Streuparameter einer verlustlosen, angepassten Leitung berechnet. Die folgende Abbildung zeigt die Anordnung. Die Leitung der Länge hat den Wellenwiderstand R_W. Die Reflexionsfaktoren sind in diesem Fall beide Null, da die Leitung eingangsseitig und ausgangsseitig angepasst ist (Innenwiderstand bzw. Abschlusswiderstand = Wellenwiderstand).

$$s_{11} = s_{22} = 0 \tag{4.24}$$

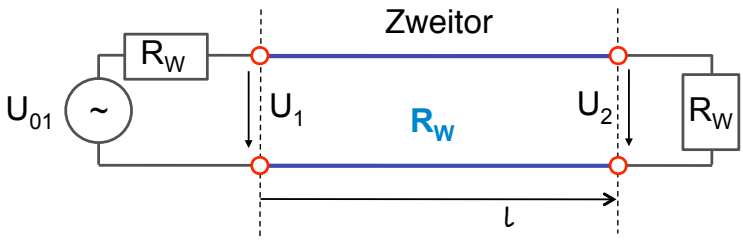


Bild 4.5 Verlustlose, angepasste Leitung

Aus Gründen der Symmetrie sind auch die Transmissionsfaktoren gleich, d.h. $s_{21} = s_{12}$. Der Vorwärtstransmissionsfaktor ergibt sich gemäß Gleichung (4.22) zu

$$s_{21} = (2\ U_2 / U_{01}) \tag{4.25}$$

Aus den Betrachtungen zur Leitungstransformation aus Abschnitt 2 ist bekannt, dass es im angepassten Fall für die Anordnung nach Bild 4.5 nur eine fortschreitende Spannungswelle in Vorwärtsrichtung gibt. Wenn man Die Leitung eingangsseitig durch ihren Wellenwiderstand ersetzt, ergibt sich die Spannung U_1 am Eingang aus der Spannungsteilerregel zu $U_1 = U_{01}/2$, beziehungsweise umgekehrt $U_{01} = 2\ U_1$. Zwischen U_2 und U_1 bewirkt die Leitungstransformation über eine Länge ℓ gemäß der Lösung der Wellengleichung (hinlaufende Welle) lediglich eine Phasenverschiebung gemäß

$$U_2 = U_1\ e^{-j\beta\ell} \tag{4.26}$$

Durch Einsetzen in Gleichung (4.25) erhält man $s_{21} = U_2 / U_1 = e^{-j\beta\ell}$. Hieraus ergibt sich die Streumatrix zu

$$S = \begin{pmatrix} 0 & e^{-j\beta\ell} \\ e^{-j\beta\ell} & 0 \end{pmatrix} \tag{4.27}$$

5. Freie Wellen

Dieser Abschnitt löst sich von den leitungsgebundenen Wellen. Im Fernfeld der Leitungen und Antennen erhält man freie Wellen, die sinngemäß die Echos der beschleunigten Ladungen darstellen.

5.1. Vom Schwingkreis zum Dipol

Im elektrischen Schwingkreis findet ein periodischer Wechsel zwischen der im elektrischen Feld (Kapazität) gespeicherten Energie statt, und der im magnetischen Feld (Induktivität) gespeicherten Energie, wie in den Abschnitt 1 gezeigt. Wenn man den Schwingkreis zu einem Dipol aufbiegt, bleiben die Eigenschaften des Schwingkreises erhalten. Die Felder um den Dipol breiten sich im gesamten Raum aus.

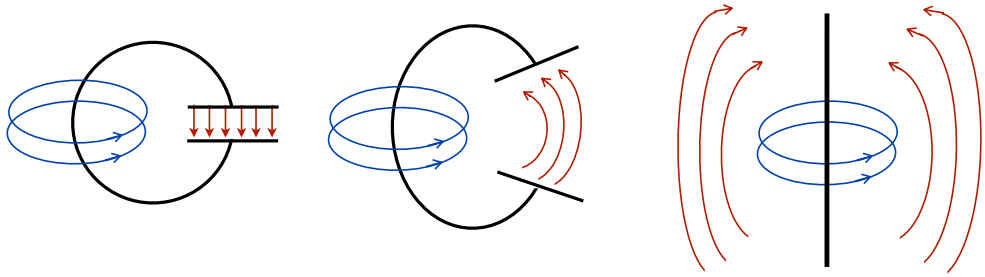


Bild 5.1 Vom Schwingkreis zum Dipol

Die Verbreitung der Felder im Raum ist mit Abstrahlung von Energie verbunden, die durch Zufuhr von Energie an die Antenne aufrecht erhalten wird. Die Antenne folgt so einer erzwungen Schwingung mit der Frequenz der Einspeisung. Die elektrischen und magnetischen Felder verhalten sich bei niedrigen Frequenzen ähnlich statischen Feldern. Die Maxima der elektrischen Felder und magnetischen Felder wechseln sich ab, wie in Abschnitt 1 gezeigt.

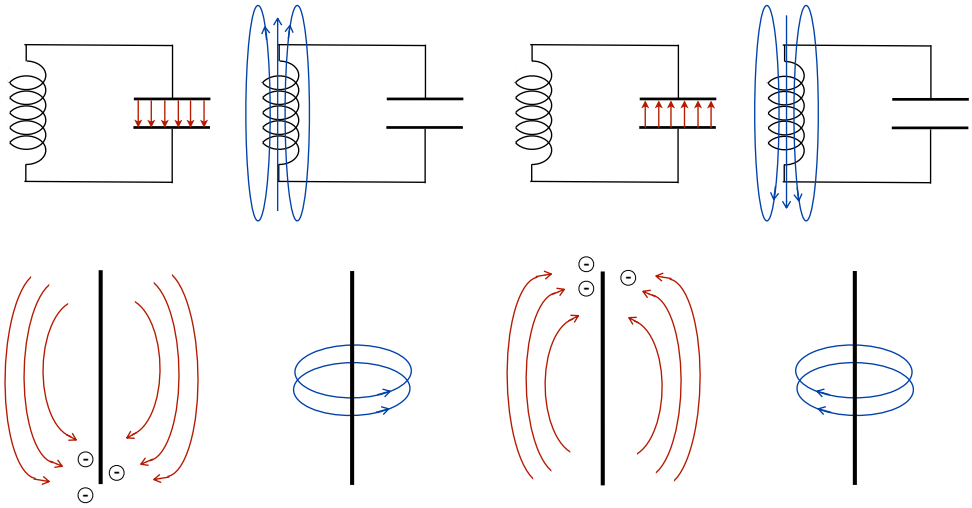


Bild 5.2 Felder bei kleinen Frequenzen

Die magnetischen Feldlinien umschließen den Strom (bewegte Ladungen, das Maximum des Stroms befindet sich in der Mitte des Dipols zum Zeitpunkt des Maximums des

magnetischen Feldes). Die elektrischen Felder entspringen und enden an ihren Quellen, den Ladungen (maximal an den Enden des Dipols zum Zeitpunkt des Maximums des elektrischen Feldes).

Mit wachsender Frequenz machen sich Laufzeiteffekte in Bezug auf die Ausdehnung der Anordnung bemerkbar. Während der Ausbreitung der Felder im Raum findet auch ein Wechsel der Ladungen im Dipol statt. Wenn eine Halbwelle der Schwingung der Länge des Dipols entspricht, hat sich der Dipol während der Laufzeit der Halbwelle gerade umgepolt.

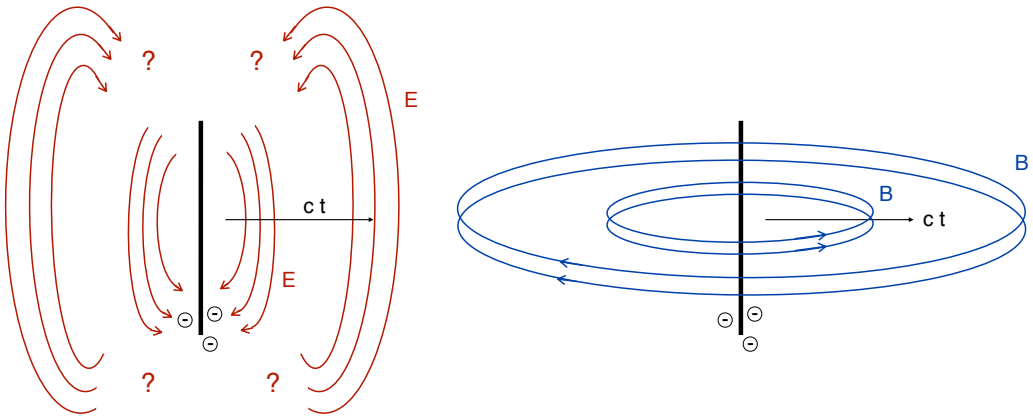


Bild 5.3 Abschnürung der Feldlinien bei höheren Frequenzen

Bezüglich der Abstrahlung des Dipols unterscheidet man zwischen Nahfeld und Fernfeld. Im Nahfeld bestimmen Ladungen und Ströme das Feld, wie im Inneren der Abbildung oben zu erkennen. Wie beim Schwingkreis sind Magnetfeld und elektrisches Feld hier nicht in Phase, sondern wechseln ihre Maxima im Abstand einer Viertelperiode. Die Feldstärken des Nahfeldes klingen jedoch mit wachsender der Entfernung rasch ab (mit $1/r^2$ bzw. $1/r^3$, ohne Beweis).

Im Fernfeld spielen die Ströme und Ladungen des Dipols keine unmittelbare Rolle mehr. Elektrische und magnetische Felder sind miteinander verkoppelt und bedingen sich gegenseitig. Der Beitrag der Feldstärken im Fernfeld dominiert mit wachsender Entfernung, da er weniger rasch abklingt als die Beiträge aus dem Nahfeld (mit 1/r, ohne Beweis).

5.2. Elektromagnetische Wellen im Fernfeld

Elektromagnetische Phänomene lassen sich mit Hilfe der Maxwellschen Gleichung auf sehr allgemeine Art beschreiben. In folgenden beschreiben die Feldstärken Vektoren, wobei in der Schreibweise auf die Kennzeichnung durch einen überstrichenen Pfeil verzichtet wurde.

$$\text{rot } E = -\,\partial B/\partial t \qquad \text{(Induktionsgesetz)} \qquad (5.1)$$

$$\text{rot } B = \mu_0 J + \mu_0\varepsilon_0\, \partial E/\partial t \qquad \text{(Durchflutungsgesetz)} \qquad (5.2)$$

Das Induktionsgesetz besagt, dass Änderungen der magnetischen Induktion elektrische Felder erzeugen können. Dieser Zusammenhang wurde bereits beim Schwingkreis bzw. bei leitungsgebundenen Wellen verwendet, wobei eine Änderung des Strom an einer Induktivität eine Spannung erzeugt. In Gleichung (5.1) beschreibt den allgemeinen Fall.

Die mathematische Konstruktion der Rotation (rot) sollte qualitativ als Indikator für Wirbel des elektrischen Feldes verstanden werden (bzw. genauer für die Wirbeldichte eines Vektor-

feldes). Die Entstehung solcher Wirbel der elektrischen Feldstärke ist in Abbildung 5.3 zu erkennen. Die Anwendung dieser mathematischen Operation wird später bei der Berechnung der Wellengleichung gezeigt.

Das Durchflutungsgesetz besagt, dass ein Strom (Stromdichte J) ein Magnetfeld erzeugt (erster Ausdruck in Gleichung (5.2), sowie dass auch eine Änderung der elektrischen Feldstärke ein Magnetfeld erzeugen kann (zweiter Ausdruck in Gleichung (5.2). Die Rotation kennzeichnet die Gestalt des Magnetfeldes in Form von Wirbeln (geschlossenen Feldlinien).

Zwei weitere Gleichungen beschreiben die Quellen der elektrischen und magnetischen Felder. Die mathematische Konstruktion der Divergenz (div) sollte hierbei qualitativ als Indikator für Quellen verstanden werden.

$$\text{div } E = \rho/\varepsilon_0 \qquad \text{(Ladungen als Quellen elektr. Felder)} \qquad (5.3)$$

$$\text{div } B = 0 \qquad \text{(magnet. Felder sind quellenfrei)} \qquad (5.4)$$

Die bisher beschriebenen Gleichungen beschreiben den allgemein gültigen Fall.

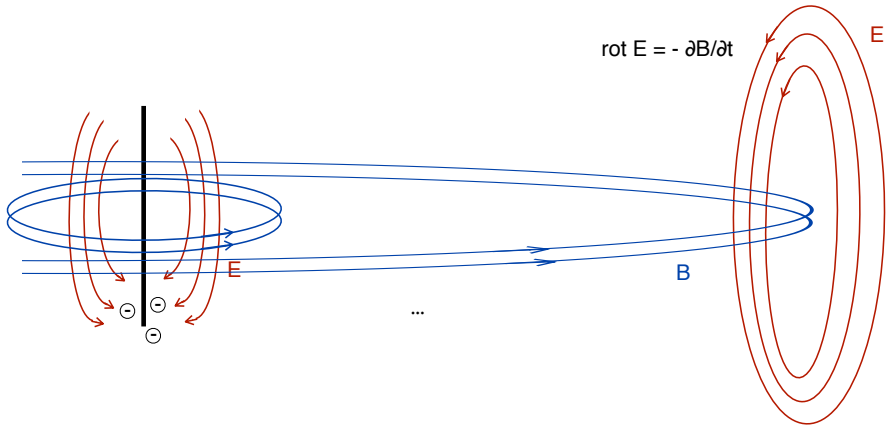


Bild 5.5 Fernfeld

Im Fernfeld des Dipols lassen sich die folgenden Vereinfachungen treffen: (1) Der Strom spielt fern des Dipols spielt keine Rolle. Hierdurch entfällt der erste Ausdruck auf der rechten Seite im Durchflutungsgesetz. (2) Fern des Dipols sind auch die elektrischen Felder quellenfrei. Hierdurch entfällt der Ausdruck (Ladungsdichte ρ) auf der rechten Seite der Gleichung (5.3).

Zusammengefasst gelten für Wellen im Fernfeld folgende Bedingungen:

$\text{rot } E = -\,\partial B/\partial t$	(Induktionsgesetz)	(5.5)
$\text{rot } B = \mu_0\varepsilon_0\, \partial E/\partial t$	(Durchflutungsgesetz)	(5.6)
$\text{div } E = 0$	(elektr. Felder sind quellenfrei)	(5.7)
$\text{div } B = 0$	(magnet. Felder sind quellenfrei)	(5.8)

Diese Gleichungen beschreiben auf allgemeine Weise die Spielregeln für elektromagnetische Wellen im Fernfeld einer Antenne. Lösungen dieser Gleichungen sind elektromagnetische Wellen, bei denen das elektrische und magnetische Feld miteinander

verkoppelt ist, d.h. beide Felder treten gemeinsam auf und Richtung und Phase der Felder stehen in fester Beziehung zueinander.

Es ist auch unmittelbar zu erkennen, dass die Kopplung der Felder im statischen Fall nicht funktioniert: Falls E = konstant (d.h. im elektrostatischen Fall) ergibt sich sich kein magnetisches Feld. Falls B = konstant (d.h. für statische magnetische Felder) ergibt sich kein elektrisches Feld.

Beispiele für die Lösungen der Gleichungen für Wellen im Fernfeld sind ebene Wellen (mit Wellenfront in Ausbreitungsrichtung), Kugelwellen, linear polarisierte Wellen, zirkular polarisierte Wellen und viele andere Wellentypen. Überlagerungen einzelner Wellen sind ebenfalls Lösungen der Gleichungen.

5.3. Ebene Wellen als Lösung

Als Bespiel für eine Lösung des Gleichungssystems für Wellen im Fernfeld (d.h. ohne Ladung und Strom) wird eine linear polarisierte, ebene Welle betrachtet. Die elektrische Feldstärke und magnetische Flussdichte der Welle lassen sich in vektorieller Form wie folgt beschreiben. Dabei wird angenommen, dass die elektrische Welle in der x-Ebene schwingt und sich in Richtung der z-Achse ausbreitet. Die magnetische Welle schwingt in der y-Ebene.

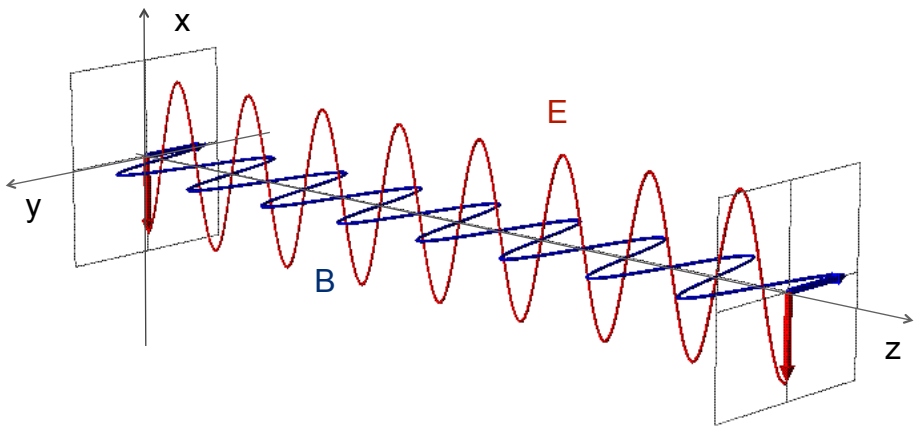


Bild 4.6 Feldstärken der ebenen linear polarisierte Welle

Elektrisches Feld:

$$E_x\,(x,y,z,t) = E_0 \sin(\omega t - \beta z) \tag{5.9}$$

$$E_y\,(x,y,z,t) = 0 \tag{5.10}$$

$$E_z\,(x,y,z,t) = 0 \tag{5.11}$$

Magnetisches Feld:

$$B_x\,(x,y,z,t) = 0 \tag{5.12}$$

$$B_y\,(x,y,z,t) = B_0 \sin(\omega t - \beta z) \tag{5.13}$$

$$B_z\,(x,y,z,t) = 0 \tag{5.14}$$

Der Ansatz lässt sich nun durch Einsetzen in die Maxwellgleichungen überprüfen. Komponentenweise ergibt sich für rot E = - ∂B/∂t gemäß Gleichung (5.5):

$$\partial E_z/\partial y - \partial E_y/\partial z = - \partial B_x/\partial t \quad (5.15)$$

$$\partial E_x/\partial z - \partial E_z/\partial x = - \partial B_y/\partial t \quad (5.16)$$

$$\partial E_y/\partial x - \partial E_x/\partial y = - \partial B_z/\partial t \quad (5.17)$$

Für die ebene Welle liefern hierzu gemäß Gleichungen (5.9) bis (5.11) nur die x-Komponente von E einen Beitrag, sowie die y-Komponente von B gemäß Gleichungen (5.13). Einsetzen in die Gleichungen (5.15) und (5.17) ergeben auf beiden Seiten 0. Für (5.16) erhält man:

$$- \beta E_0 \cos(\omega t - \beta z) = - \omega B_0 \cos(\omega t - \beta z) \quad (5.18)$$

Komponentenweise ergibt sich für Gleichung (5.6) rot B = $\mu_0\varepsilon_0 \partial E/\partial t$:

$$\partial B_z/\partial y - \partial B_y/\partial z = \mu_0\varepsilon_0 \partial E_x/\partial t \quad (5.19)$$

$$\partial B_x/\partial z - \partial B_z/\partial x = \mu_0\varepsilon_0 \partial E_y/\partial t \quad (5.20)$$

$$\partial B_y/\partial x - \partial B_x/\partial y = \mu_0\varepsilon_0 \partial E_z/\partial t \quad (5.21)$$

Einsetzen der Lösung (5.9) bis (5.14) in die Gleichungen (5.20) und (5.21) ergibt auf beiden Seiten 0. Für (5.19) erhält man:

$$\beta B_0 \cos(\omega t - \beta z) = \omega \mu_0\varepsilon_0 E_0 \cos(\omega t - \beta z) \quad (5.22)$$

Überprüfen der Quellenfreiheit gemäß Gleichungen (5.7) und (5.8) ergibt:

$$\text{div } E = \partial E_x/\partial x + \partial E_y/\partial y + \partial E_z/\partial z = 0 \quad (5.23)$$

$$\text{div } B = \partial B_x/\partial x + \partial B_y/\partial y + \partial B_z/\partial z = 0 \quad (5.24)$$

Somit wäre gezeigt, dass die ebene Welle gemäß Vorgabe (5.9) bis (5.14) eine Lösung der Maxwellgleichungen ist. Die Maxwellgleichungen (5.5) bis (5.8) verlangen, dass E und B senkrecht aufeinander stehen und nicht phasenverschoben zueinander sind. Ein Ansatz, der diese Bedingungen nicht erfüllt, würde der Überprüfung nicht standhalten.

Außerdem liefern die für die ebene Welle abgeleiteten Gleichungen (5.18) und (5.22) folgende Bedingungen:

$$\beta E_0 = \omega B_0 \quad (5.25)$$

$$\beta B_0 = \omega \mu_0\varepsilon_0 E_0 \quad (5.26)$$

Hieraus ergibt sich durch Auflösen nach β und Gleichsetzen:

$$B_0^2/E_0^2 = \mu_0\varepsilon_0 \quad (5.27)$$

Durch Einsetzen in (5.25) erhält man:

$$\omega/\beta = c = 1/\sqrt{(\mu_0\varepsilon_0)} \quad (5.28)$$

Das Verhältnis der Kreisfrequenz zur Phasenkonstante (Wellenzahl) entspricht der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle, in diesem Fall unter Freiraumbedingungen also der Licht-geschwindigkeit c.

Zusammengefasst ist die ebene Welle eine Lösung der Maxwellgleichungen, da

- E und B als senkrecht zur Ausbreitungsrichtung orientiert sind (transversale Welle)
- E und B senkrecht aufeinander stehen
- die Amplituden der Felder E und B sich verhalten wie $B_0/E_0 = \sqrt{(\mu_0\varepsilon_0)}$
- E und B in Phase sind zueinander

- Kreisfrequenz und Wellenzahl sich verhalten wie $\omega/\beta = 1/\sqrt{(\mu_0\varepsilon_0)}$.

Die Wellen im Beispiel war linear polarisiert, d.h.die Feldstärke E verblieb stets in einer Richtung (x-Achse). Wenn E die Polarisationsrichtung vorgibt und B dem Vektor E folgt, sind unter Einhaltung der genannten Bedingungen auch andere Fälle denkbar, wie z.B. zirkulare bzw. elliptische Polarisation.

5.4. Wellengleichungen

Aus den Maxwellgleichungen lassen sich auch Wellengleichungen für E und B herleiten. Die Vorgehensweise entspricht hierbei ganz dem in den Abschnitten 2 und 3 für leitungsgebundenen Wellen. Hierbei geht man aus von den Beziehungen aus Abschnitt 5.2:

$\text{rot } E = -\,\partial B/\partial t$	(Induktionsgesetz)	(5.5)
$\text{rot } B = \mu_0\varepsilon_0\, \partial E/\partial t$	(Durchflutungsgesetz)	(5.6)

Erneute Anwendung der Operation rot auf beide Seiten von (5.5) ergibt

$$\text{rot rot } E = -\,\text{rot } \partial B/\partial t = -\,\partial/\partial t \text{ rot } B \tag{5.29}$$

Durch Einsetzen von (5.6) ergibt sich

$$\text{rot rot } E = -\,\mu_0\varepsilon_0\, \partial^2/\partial t^2\, E \tag{5.30}$$

Der Ausdruck auf der linken Seit verlangt hierbei noch nach mathematischer Pflege:

$$\text{rot rot } E = \text{grad (div } E) - \Delta E \tag{5.31}$$

Wegen der Quellenfreiheit nach Gleichung (5.7) ist div E = 0. Somit ergibt sich die Wellengleichung für die elektrische Feldstärke in vektorieller Form.

$$\Delta E = \mu_0\varepsilon_0\, \partial^2/\partial t^2\, E \tag{5.32}$$

Hierbei bezeichnet Δ den Laplace Operator. Gleichung (5.32) bedeutet komponentenweise ausgeschrieben:

$$\partial^2 E_x/\partial t^2 = 1/(\mu_0\varepsilon_0)\ \left(\partial^2 E_x/\partial x^2 + \partial^2 E_x/\partial y^2 + \partial^2 E_x/\partial z^2\right) \tag{5.33}$$

$$\partial^2 E_y/\partial t^2 = 1/(\mu_0\varepsilon_0)\ \left(\partial^2 E_y/\partial x^2 + \partial^2 E_y/\partial y^2 + \partial^2 E_y/\partial z^2\right) \tag{5.34}$$

$$\partial^2 E_z/\partial t^2 = 1/(\mu_0\varepsilon_0)\ \left(\partial^2 E_z/\partial x^2 + \partial^2 E_z/\partial y^2 + \partial^2 E_z/\partial z^2\right) \tag{5.35}$$

Aus der Wellengleichung lässt sich die Ausbreitungsgeschwindigkeit direkt ablesen, nämlich $c = 1/\sqrt{(\mu_0\varepsilon_0)}$. Für das Magnetfeld erhält man auf die gleiche Weise ebenfalls eine Wellengleichung. Ohne weitere Herleitung ergibt sich:

$$\Delta B = \mu_0\varepsilon_0\, \partial^2/\partial t^2\, B \tag{5.36}$$

Auch hier ergibt sich als Ausbreitungsgeschwindigkeit die Lichtgeschwindigkeit. Die Anwendung des Laplace Operators erfolgt sinngemäß wie für den Vektor der elektrischen Feldstärke. Als abgeleitete Größen sind die Wellengleichungen jedoch weniger aussagekräftig als die Maxwellgleichungen. Die Wellengleichungen liefern beispielsweise nicht mehr die Kopplung zwischen E und B. Zusammenhänge wie am Ende von Abschnitt 5.3 aufgezählt, sind

nicht aus den einfacheren Wellengleichungen abzuleiten, sondern aus den Maxwellgleichungen gemäß (5.5) bis (5.8).

5.5. Kugelwellen

Während ebene Wellen eine ebene Wellenfront aufweisen und mit konstanter Feldstärke in ihrer Ausbreitungsrichtung den Raum durchwandern, gehen Kugelwellen radial von einem Punkt aus. Kugelwellen haben in alle Richtungen die gleiche Amplitude. Allerdings nimmt die Feldstärke mit der Entfernung ab, da sich die Welle ja in den Raum verteilt.

Mathematisch lassen sich Kugelwellen beschreiben durch

$$E(r, t) = (E_0 / |r|) \sin(\omega t - \beta z) \tag{5.37}$$

Hierbei ist E der Vektor der elektrischen Feldstärke, und r der Vektor der Ortskoordinate in Kugelkoordinaten. Die Feldstärke ist in bei gegebener Entfernung $|r|$ zum Ursprung in allen Richtungen konstant und nimmt mit der Entfernung ab.

Da die Energie der Welle, die durch die gesamte Kugeloberfläche hindurchgeht, konstant ist, die Kugeloberfläche jedoch mit dem Quadrat der Entfernung (des Radius) zunimmt, nimmt die Energie der Welle bezogen auf die Fläche im Quadrat der Entfernung ab. Da die Energie eine quadratische Funktion des Amplitude der Feldstärke ist, nimmt die Feldstärke linear mit der Entfernung ab, d.h. im Verhältnis $1/|r|$.

6. Übungen

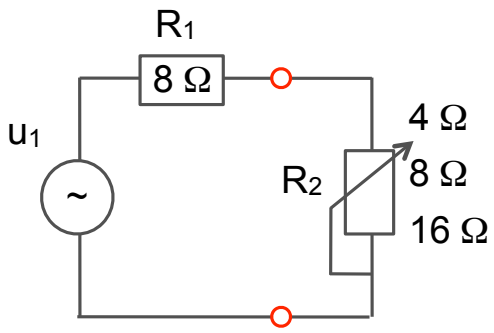
6.1. Leistungsanpassung

Eine Spannungsquelle mit Innenwiderstand 8 Ω versorgt eine Last R_2.

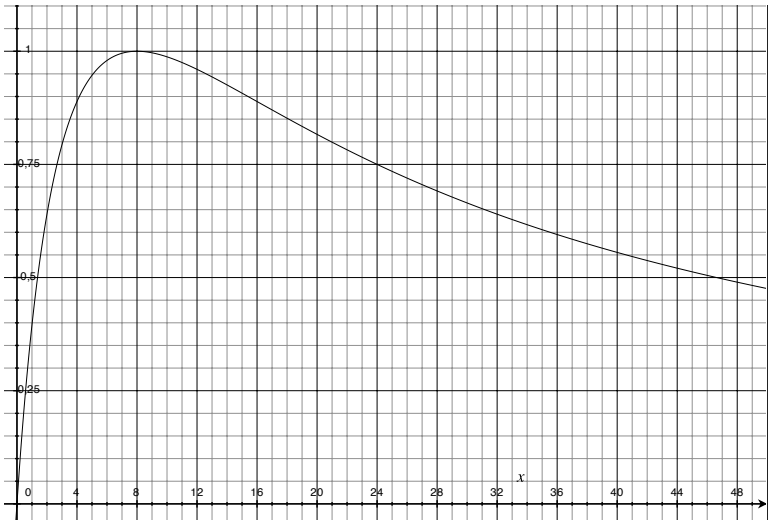
(1) Berechne die von der Last aufgenommene Leistung.

(2) Wann ist die aufgenommene Leistung maximal?

(3) Wie groß ist die aufgenommene Leistung im Maximum (in Abhängigkeit der Quellspannung u_1)?



(4) Berechne die in R_2 umgesetzte Leistung P_{2an} im angepassten Fall in Abhängigkeit von R_1. Setze die in R_2 im allgemeinen Fall umgesetzte Leistung P_2 ins Verhältnis zu P_{2an}. Hinweis: Bezeichnet man das Maximum als angepassten Fall (R_2=R_1), so ergibt sich für das Verhältnis aus der an R_2 umgesetzten Leistung P_2 zur an R_2 im angepassten Fall umgesetzten Leistung P_{2an} die folgende Beziehung: $P_2/P_{2an} = 4R_1R_2 / (R_1 + R_2)^2$.



6.2. Hochfrequenzanwendungen

Welche Anschlüsse aus der Rechnerwelt bzw. Haushalt fallen nach überschlägiger Berechnung der Wellenlänge unter die Kategorie „Hochfrequenztechnik“:

(1) serielle Schnittstelle mit 9600 Baud?

(2) USB 2.0 mit Datenrate von ca. 300 Mbit/s über Kabel von ca. 1 m Länge?

(3) VGA Anschluss für Datenprojektor mit 1024 x 768 Bildpunkten Auflösung und 75 Hz Bildfrequenz über 5 m Kabel?

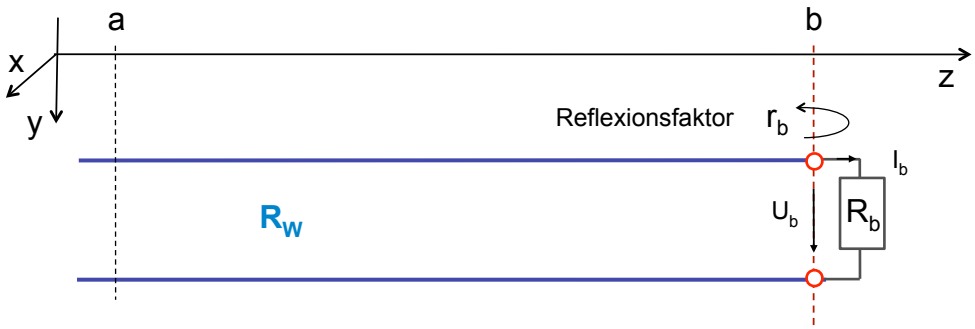
(4) Prozessorkarten und Motherboards mit 2 GHz Taktfrequenz?

(5) Feldbusse in der industriellen Fertigung mit Fast Ethernet (100 Mbit/s) über 20 Meter?

(6) DCF77 Empfänger mit 77,5 kHz zur Uhrensynchronisation in Geräten?

6.3. Leitungstransformation

Der Abschlusswiderstand R_b=8Ω aus Aufgabe 1.1 wird und über ein 10 Meter langes Koaxialkabel mit 75 Ω Wellenwiderstand und Verkürzungsfaktor v/c = 0,66 angeschlossen (RG-59 Antennenkabel). Die Einspeisung befindet sich an der Stelle a.



(7) Berechne das Verhältnis l/λ bei folgenden Frequenzen: (a) 10 kHz, (b) 100 kHz, (c) 1 MHz, (d) 3 MHz.

(8) Berechne den Reflexionsfaktor r_b am Ende der Leitung.

(9) Berechne den Reflexionsfaktor r_a am Anfang der Leitung zu den gegebenen Frequenzen (numerisch, bzw. grafische Darstellung des Effektes im Smith-Diagramm).

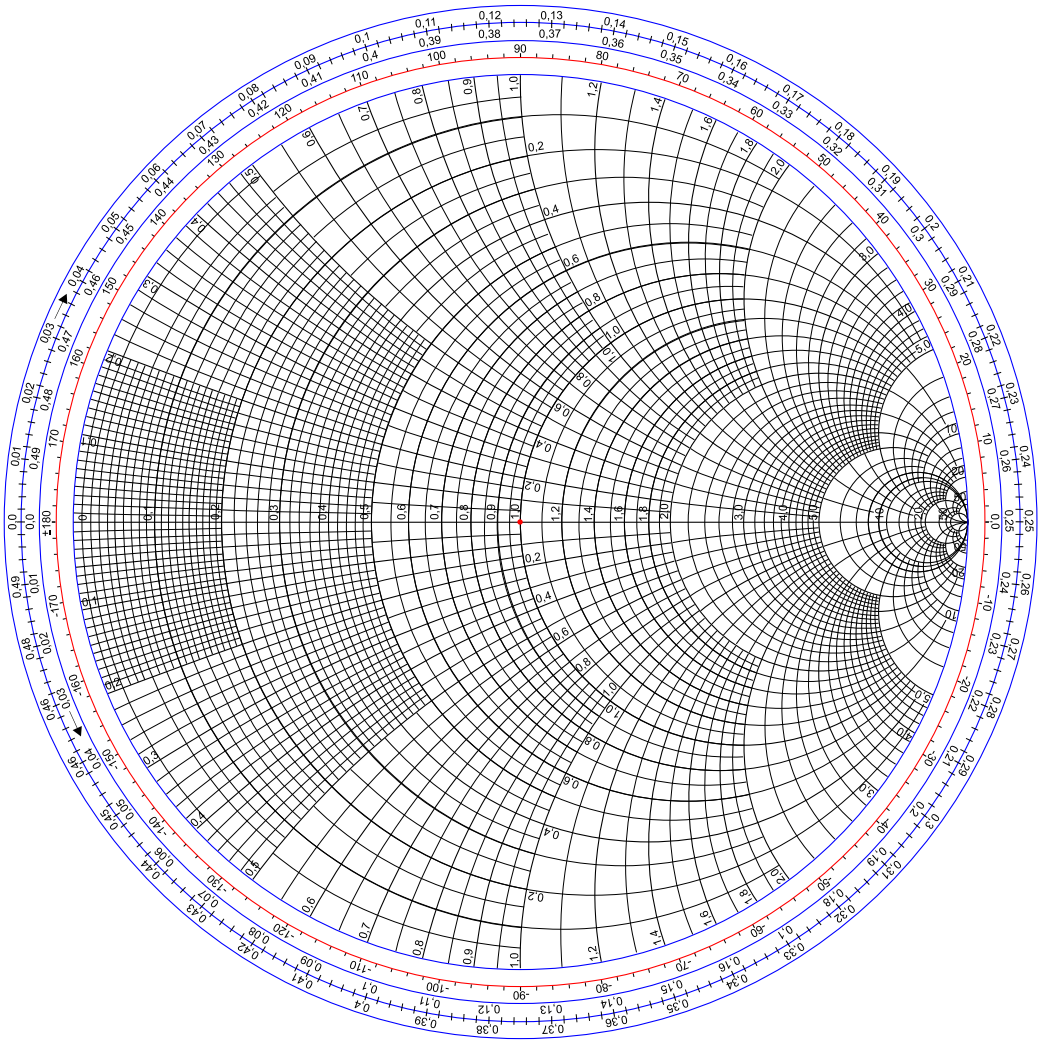
(10) Berechne den Eingangswiderstand Z_a bei den gegebenen Frequenzen (mit Smith-Diagramm).

(11) Wie würde sich ein Viertelwellentransformator auf Z_a auswirken? Bei welcher Frequenz ergibt sich dieser Effekt?

(12) Welcher Anteil der Leistung im Vergleich direkten Anschluss von R_b an der Einspeisung wird beim Viertelwellentransformator von der Leitung noch aufgenommen?

(13) Mit welchem Abschlusswiderstand müsste man die Viertelwellenleitung abschließen, um den Eingang an die Quelle anzupassen?

(14) Die Kapazität des Kabels ist mit 68 pF pro Meter angegeben. Berechne mit Hilfe des Wellenwiderstandes und des Kapazitätsbelags die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle auf dem Kabel. Welcher Verkürzungsfaktor ergibt sich?



6.4. Leistungsaufnahme bei komplexen Abschlusswiderständen

Ein 50 Ω Kabel wird mit den folgenden Widerständen abgeschlossen. Welche Leistung wird bezogen auf 1 W Eingangsleistung aufgenommen? Bemerkung: Die aufgenommene Leitung ist aus der reflektierten Leistung zu berechnen ($P_{ref} = |r|^2 * P_{in}$).

(1) $R_b = 10\ \Omega$
(2) $R_b = 25\ \Omega$
(3) $Z_b = j\ 25\ \Omega$ (reine Induktivität)
(4) $Z_b = -j\ 100\ \Omega$ (reine Kapazität)
(5) $Z_b = 10\ \Omega - j\ 100\ \Omega$ (verlustbehaftete Kapazität)
(6) offene Leitung
(7) kurzgeschlossene Leitung

6.5. Stehwellenverhältnis

Während die Totalreflexion zu stehenden Wellen auf einer Leitung führt, führt eine teilweise Reflexion zu einer „Welligkeit“ der Spannungswellen und Stromwellen auf der Leitung. Die lokalen Minima und Maxima lassen sich messtechnisch gut erfassen. Das sogenannte Stehwellenverhältnis s (bzw. auf englisch SWR - standing wave ratio) gibt das Verhältnis der

Maxima zu den Minima an. Da die Maxima aus der positiven Überlagerung von hinlaufender und rücklaufender Welle entstehen (für die Spannung also $U_{max} = |U_h| + |U_r|$), die Minima aus der negativen Überlagerung von hinlaufender und rücklaufender Welle ($U_{min} = |U_h| - |U_r|$), ergibt sich das Stehwellenverhältnis zu

$$s = U_{max} / U_{min} = (|U_h| + |U_r|) \ / \ (|U_h| - |U_r|)$$

(1) Stehwellenverhältnis s und der Betrag des Reflexionsfaktors $|r|$ lassen sich ineinander umrechnen. Zeige, dass folgende Beziehungen gelten:

$$s = (1 + |r|)/(1 - |r|)$$

$$|r| = (s - 1)/(s + 1)$$

(2) Wie lassen sich mit Hilfe des Smith-Diagramms s und $|r|$ ineinander umrechnen?

Lösung: Da die Gleichung

$$|r| = (s - 1)/(s + 1)$$

in ihrer Form der Gleichung

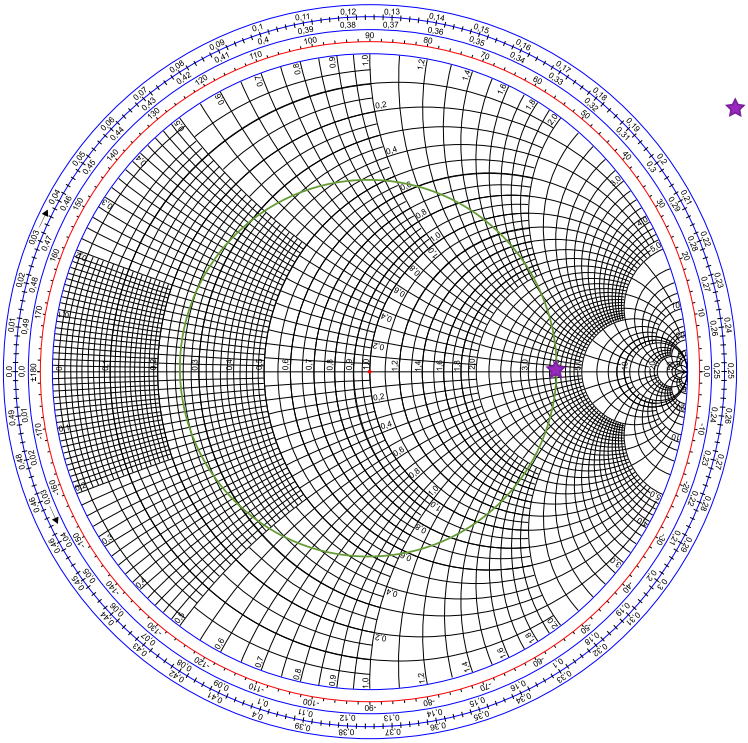
$$r = (z - 1)/(z + 1)$$

für normierte Impedanzen entspricht, lässt sich s direkt in Smith-Diagramm einzeichnen.

Das Stehwellenverhältnis lässt sich wie eine Impedanz auf der Projektion der reellen z-Achse im Smith-Diagramm ablesen.

Beispiel: Es wird ein Stehwellenverhältnis von s = 3,8 gemessen.

Der zugehörige Reflexionsfaktor ist durch Vermessung des Radius (Betrag $|r|$) zu ermitteln. Hierzu sind geeignete Smith-Diagramme mit einer Skala für r ausgestattet, an der der Betrag unmittelbar per Zirkel abgelesen werden kann.



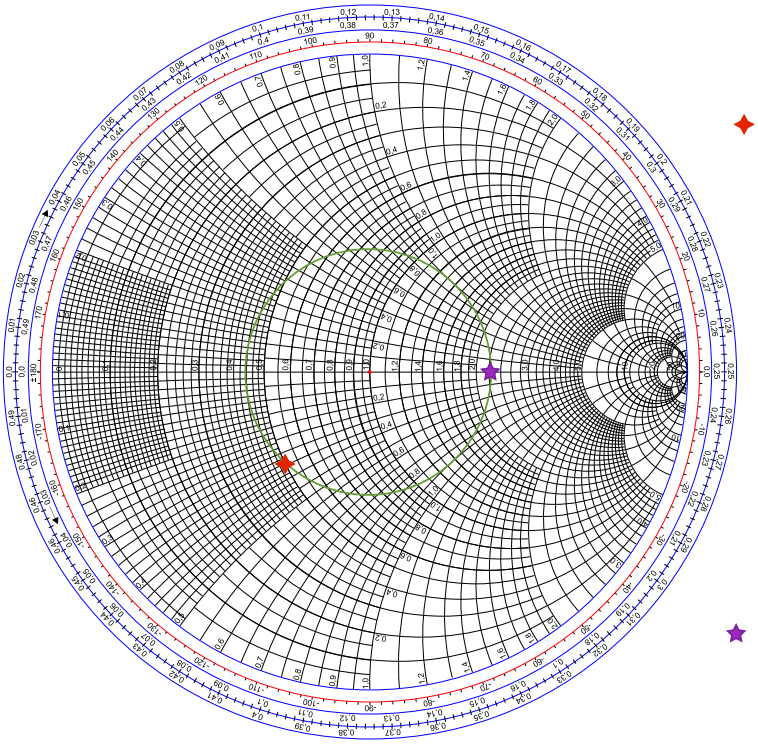
★ Stehwellenverhältnis

s = 3,8

zugehöriger Reflexionsfaktor

Beispiel: z_b = 0,5 - i 0,33

Umrechnung von s und |r|: (1) s wie eine Impedanz eintragen, zugehörigen Betrag |r| im Diagramm ablesen. (2) Z_b Repräsentant für r ins Diagramm eintragen, s ergibt sich auf dem Kreis mit |r| auf der reellen Achse und wird wie Re (z) an dieser Stelle abgelesen.



✦ Startpunkt:

z_b = 0,5 - j 0,33

zugehöriger Reflexionsfaktor

★ Stehwellenverhältnis

s = 2,2

6.6. Blindwiderstände und Blindleitwerte im Smith-Diagramm

Blindwiderstände (Reaktanzen) bzw. Blindleitwerte (Suszeptanzen) bilden auf die imaginäre Achse eines komplexen Widerstands (Impedanz) bzw. eines komplexen Leitwertes (Admittanz) ab. Transformationen durch Blindwiderstände bzw. Blindleitwerte sind daher leicht im Smith-Diagramm abzubilden.

(1) Wählen Sie als Startpunkt den Realteil eines Abschlusswiderstandes Z_b im Smith-Diagramm (z.B. z_b=0,5 bzw. z_b=2 oder einen anderen Wert) und ergänzen Sie als Imaginärteil eine Induktivität ($jX_b = j\omega L$).

(2) Welcher Weg im Diagramm ergibt sich durch Vergrössern der Induktivität?

(3) Welcher Weg im Diagramm ergibt sich durch Verkleinern der Induktivität?

(4) Wohin führt der Weg für sehr große Induktivitäten (L->), bzw. für sehr kleine Induktivitäten (L->0)?

(5) Wie lässt sich aus der im Diagramm abgelesenen Reaktanz X_b (in Ω) die benötigte Induktivität in H (bzw. nH) bestimmen?

(6) Wählen Sie als Startpunkt den Realteil eines Abschlusswiderstandes Z_b im Smith-Diagramm und ergänzen Sie als Imaginärteil eine Kapazität ($jX_b = 1/ j\omega C = -j/\omega C$).

(7) Welcher Weg im Diagramm ergibt sich durch Vergrössern der Kapazität?

(8) Welcher Weg im Diagramm ergibt sich durch Verkleinern der Kapazität?

(9) Wohin führt der Weg für sehr große Kapazitäten (C->) bzw. für sehr kleine Kapazitäten (C->0)?

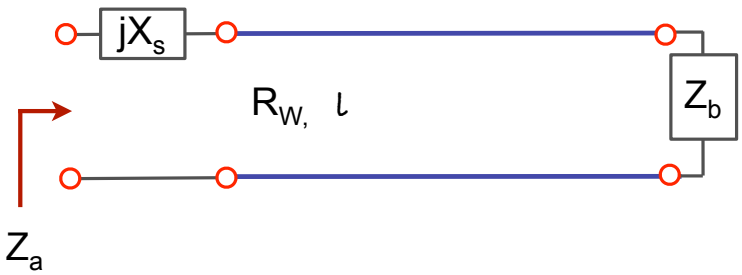
(10) Wie lässt sich aus der im Diagramm abgelesenen Reaktanz X_b (in Ω) die benötigte Kapazität in F (bzw. pF) bestimmen?

6.7. Anpassschaltung

Folgende Aufgaben sollen mit Hilfe des Smith-Diagramms gelöst werden.

(1) Anpasskreis: Ist der Abschlusswiderstand $R_b = R_W$ gleich dem Wellenwiderstand, so ist die Leitung reflexionsfrei abgeschlossen. Bestimme die Lage des Anpasskreises, für den gilt Re $\{Z_b\} = R_W$.

(2) Anpassschaltung: Die Abschlussimpedanz Z_b soll wie in der folgenden Abbildung gezeigt mit Hilfe einer Leitung der Länge ℓ und einer Serienreaktanz jX_s auf die Eingangsimpedanz Z_a angepasst werden.

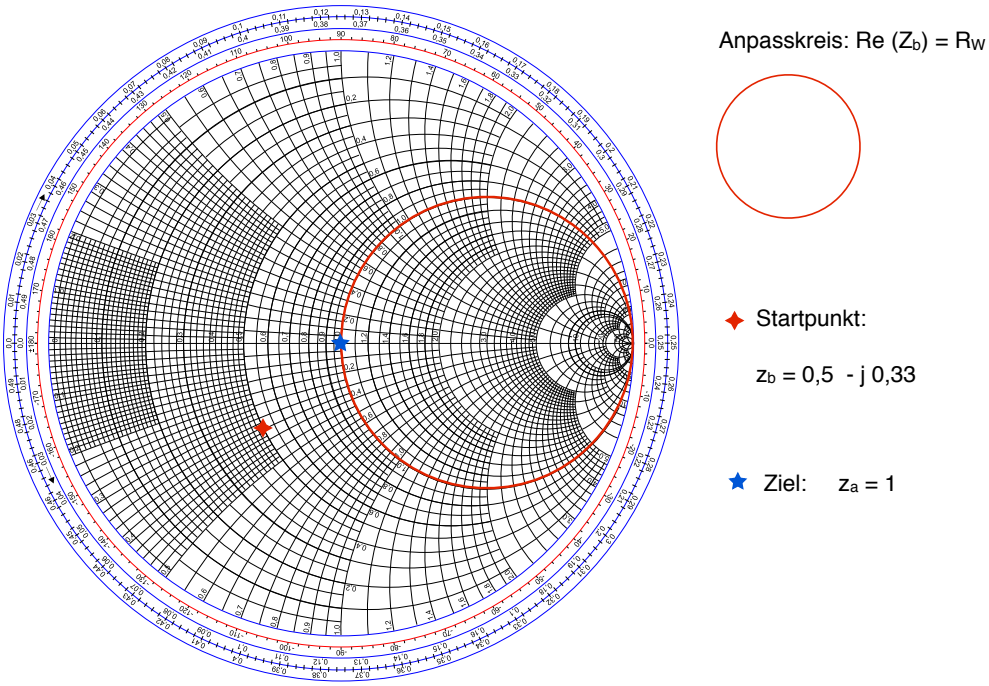


Gegeben sind folgende Werte: R_W = 75 Ω, Z_b = (37,5 - j25) Ω, Z_a = 75 Ω. Zur Anpassung ist eine Leitung der Länge ℓ, sowie ein konzentriertes reaktives Bauteil bei einer Frequenz von 300 MHz zu verwenden. Berechnen Sie die Leitungslänge und Reaktanz. Hinweis: Bestimmen Sie Startpunkt und Ziel der Transformation im Diagramm. Tragen Sie die Abschlussimpedanz Z_b ins Diagramm ein und transformieren

Sie durch Vergrössern der Leitungslänge bis zu einem der Schnittpunkte zum Anpasskreis. Von dort transformieren Sie mit Hilfe der Reaktanz zum Zielpunkt der Transformation. Die Frequenz wird anschliessend zum Umrechnen von Ω in pF bzw. in nH bzw. benötigt.

Lösung:

Frage 1: Für den Anpasskreis gilt Re $\{Z_b\} = R_W$. Der Anpasskreis entspricht also einer Parallelen zur imaginären Z-Achse im Punkt R_W auf der reellen Z-Achse. In normierter Schreibweise gilt Re $\{z_b = Z_b / R_W\} = 1$. Lage siehe Smith-Diagramm unten.

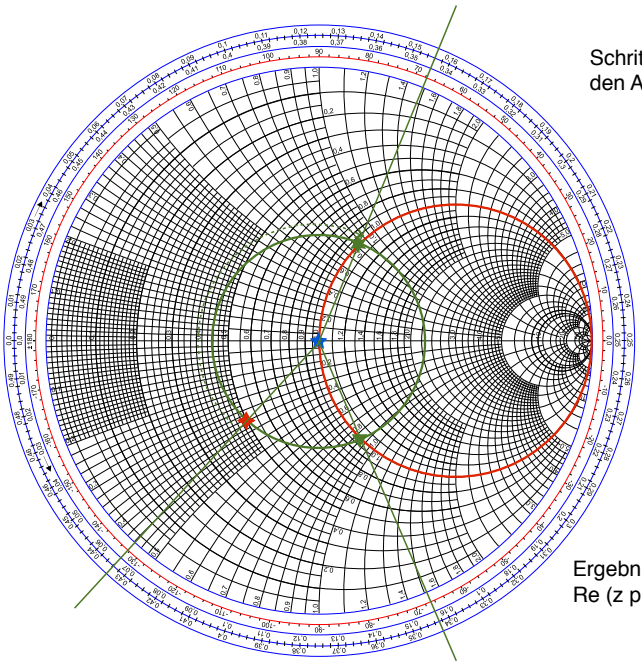


Frage (2): Lösungsweg: Als Anpassregel lässt sich das Vorgehen folgendermassen formulieren: Wirkwiderstände transformieren, Blindwiderstände kompensieren.

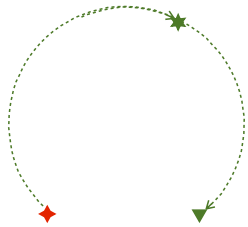
In Schritt (1) transformiert man z_b mit Hilfe einer Leitung auf den Anpasskreis. Dadurch wird der Realteil von z_b auf den gewünschten Eingangswiderstand gebracht. Die Leitung in Kombination mit z_b hat eine Eingangsimpedanz mit Re $(z_{e1} = 1)$.

In Schritt (2) kann man dann den Imaginärteil von z_b mit Hilfe einer Serienreaktanz annullieren, so dass die Eingangsimpedanz reell wird und dem Wellenwiderstand entspricht, d.h. $z_{e2} = 1$..

Schritt 1: siehe folgendes Smith Diagramm.



Schritt (1): durch Leitungstransformation auf den Anpasskreis



Leitungslängen:

✸ l/λ = 0,066 + 0,156

▼ l/λ = 0,066 + 0,343

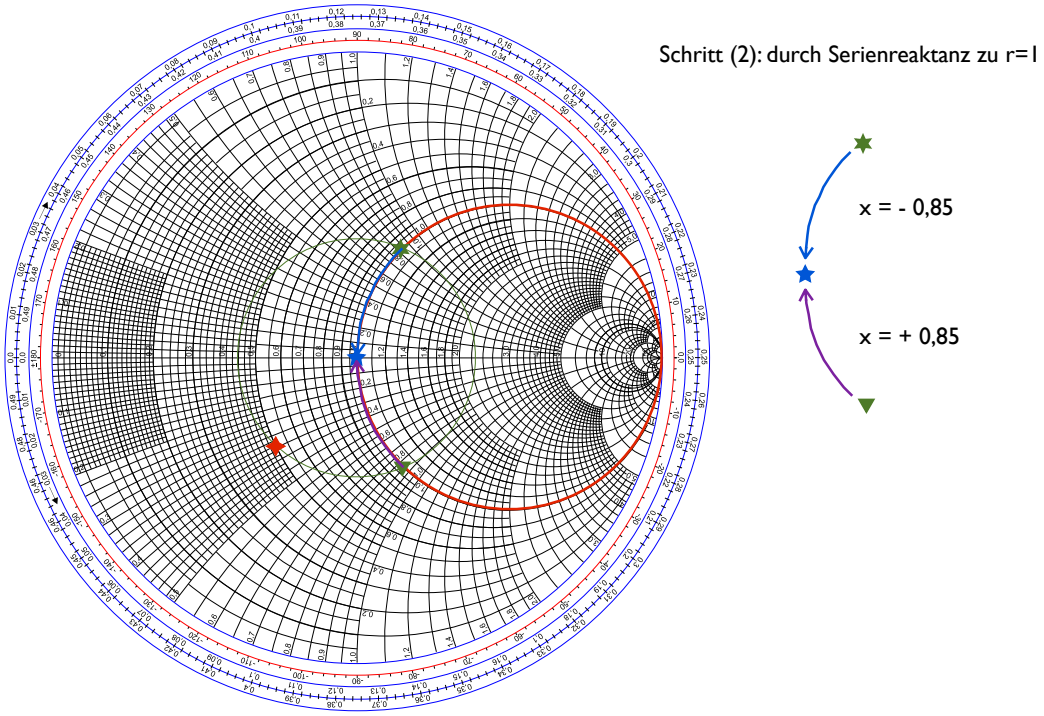
Ergebnis:
Re (z plus Leitungstransformation) = 1

Für den ersten Schnittpunkt erhält man durch Ablesen der normierten Leitungslänge: l_1/λ = 0,222, für den zweiten Schnittpunkt erhält man l_2/λ = 0,409.

Bei f = 300 MHz und mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit von v = 300 $*10^6$ m/s ergibt sich eine Wellenlänge von λ = 1m. Somit sind l_1 = 0,222 m bzw. l_2 = 0,409 m. (Bemerkung: Realistisch, jedoch ohne Einfluss auf die Vorgehensweise, wäre ein Verkürzungsfaktor von z.B. v/c = 0,66).

Schritt 2: Von Schnittpunkt 1 aus kann man den Zielpunkt mit einer negativen Reaktanz X_s erreichen, siehe folgendes Smith-Diagramm. Durch Ablesen erhält man z_s = -j 0,85. Durch Entnormieren (Multiplikation mit R_W) erhält man Z_s = - j 63,8 Ω. Mit $X_s = 1/\omega C$ ergibt sich die Kapazität $C = 1/ X_s\omega$ = 8,3 pF.

Vom Schnittpunkt 2 aus erreicht man den Zielpunkt mit einer positiven Reaktanz. Durch Ablesen erhält man z_s = j 0,85. Durch Entnormieren (Multiplikation mit R_W) erhält man Z_s = j 63,8 Ω. Mit $X_s = \omega L$ ergibt sich die Induktivität $L = X_s / \omega$ = 213 nH.



6.8. Berechnung komplexer Impedanzen

Das Smith-Diagramm soll für Impedanztransformationen verwendet werden. Starte für die folgenden Fälle jeweils mit einer beliebigen Abschlussimpedanz Z_b und ergänze.

(1) Paralleler reeller Widerstand zu Z_b. Hinweis: Transformiere den Startpunkt Z_b durch Spiegelung am Ursprung in die Admittanz Y_b. Ergänze dann den Leitwert des parallel geschalteten Widerstands. Transformiere das Ergebnis durch Spiegelung zurück in eine Impedanz.

(2) Serielle Induktivität jX_p zu Z_b.

(3) Parallele Induktivität jX_p zu Z_b.

(4) Serielle Kapazität $-jX_p$ zu Z_b.

(5) Parallele Kapazität $-jX_p$ zu Z_b.

(6) Parallele Induktivität jX_p zu einer Serienschaltung von Z_b und einer Induktivität jX_s. Hinweis: Zweistufige Transformation, ausgehend von Z_b mit der Serienschaltung beginnen.

(7) Parallele Kapazität $-jX_p$ zu einer Serienschaltung von Z_b und einer Induktivität jX_s.

(8) Parallele Induktivität jX_p zu einer Serienschaltung von Z_b und einer Kapazität $-jX_s$.

(9) Parallele Kapazität $-jX_p$ zu einer Serienschaltung von Z_b und einer Kapazität $-jX_s$.

(10) Serielle Kapazität $-jX_p$ zu einer Parallelschaltung von Z_b und einer Induktivität jX_s.

(11) Serielle Induktivität jX_p zu einer Parallelschaltung von Z_b und einer Induktivität jX_s.

(12) Serielle Schaltung von Z_b und Induktivität jX_s mit anschliessender Viertelwellentransformation

(13) Serielle Schaltung von Z_b und Kapazität $-jX_s$ mit anschliessender Viertelwellentransformation

6.9. Frequenzgänge im Smith-Diagramm

Da sich Reaktanzen $jX_b = j\omega L$ auch durch Erhöhen der Kreisfrequenz ω vergrössern lassen (bzw. Blindleitwerte $jY_b = j\omega C$), lassen sich mit dem Smith-Diagramm grundsätzlich auch der Verlauf des Frequenzganges darstellen, beispielsweise der des Eingangswiderstandes einer Schaltung. Betrachte den Frequenzgang für die folgenden Fälle.

(1) Serielle Induktivität jX_p zu Z_b.
(2) Parallele Induktivität jX_p zu Z_b.
(3) Serielle Kapazität $-jX_p$ zu Z_b.
(4) Parallele Kapazität $-jX_p$ zu Z_b.

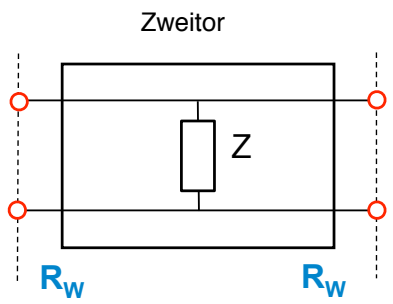
6.10. Verhalten kurzer Leitungen

Betrachte das Verhalten folgender kurzer Leitungen im Smith Diagramm (bei vorgegebener Frequenz). Verhalten sich die Leitungen induktiv oder kapazitiv? Wie wirkt sich eine Vergrösserung bzw. Verringerung der Leitungslänge aus?

(1) kurzgeschlossene kurze Leitung ($\ell < \lambda/4$)
(2) offene kurze Leitung ($\ell < \lambda/4$)
(3) kurzgeschlossene kurze Leitung ($\ell > \lambda/4$)
(4) offene kurze Leitung ($\ell > \lambda/4$).

6.11. Berechnung der Streuparameter

Ein Zweitor auf konzentrierten Bauteilen (keine Leitungen und Leitungseffekte) besteht aus einer Impedanz Z wie in der Abbildung gezeigt.



Frage 1.1: Berechnen Sie die S-Parameter des Zweitors mit der Bezugsgröße R_W an beiden Toren.

Frage 1.2: Überprüfen Sie die Plausibilität des Ergebnisses mit Hilfe folgender Grenzfälle: (1) Kurzschluss (Z = 0), (2) Leerlauf (Z -> unendlich).

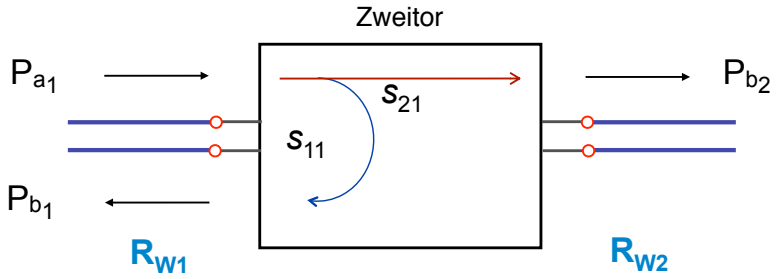
6.12. Streuparameter und Wirkleistung

Aus den Streuparametern lassen sich direkt Wirkleistungen für die Leistungsbilanz ablesen. So erhält man im logarithmischen Massstab

$s_{11}^{log} = 20 \lg |s_{11}|$ Reflexionsdämpfung (engl. Return Loss)

$s_{21}^{log} = 20 \lg |s_{21}|$ Einfügedämpfung (engl. Insertion Loss)

Die logarithmischen Werte werden durch die Pseudo-Einheit dB gekennzeichnet. Dadurch kann ein spezieller Index für logarithmische Werte entfallen. Der Begriff der Dämpfung bei der Reflexionsdämpfung ist hierbei insofern etwas unglücklich gewählt, da ja keine Dämpfung stattfindet, sondern dieser Anteil durch Reflexion verloren geht. Reflexionsverlust wäre ein zutreffender Ausdruck (siehe englische Begriffswahl).



Gemäß Definition der Wellengrößen erhält man für den Eingangsreflexionsfaktor:

$$|s_{11}|^2 = |b_1|^2 / |a_1|^2 = P_{b1} / P_{a1}$$

Das Betragsquadrat des Eingangsreflexionsfaktors gibt das Verhältnis der von Tor 1 reflektierten Wirkleistung zur auf Tor 1 zulaufenden Wirkleistung wieder. Demnach lässt sich aus dem Vorwärtstransmissionsfaktor auf das Verhältnis der am Tor 2 auslaufenden Wirkleistung zur an Tor 1 zulaufenden Wirkleistung schließen.

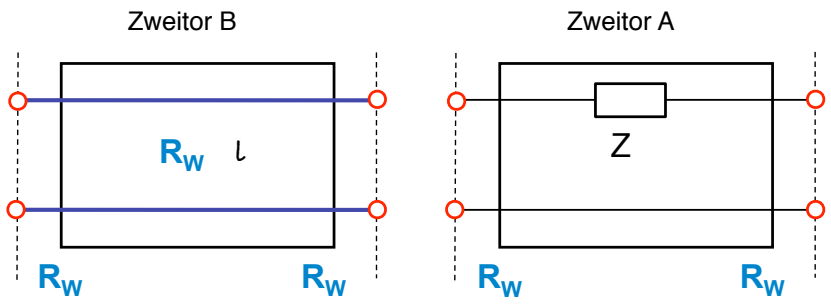
$$|s_{21}|^2 = |b_2|^2 / |a_1|^2 = P_{b2} / P_{a1}$$

Frage 2.1: Ein Zweitor hat einen Eingangsreflexionsfaktor von $s_{11} = 0{,}1$. Berechnen Sie die Reflexionsdämpfung im logarithmischen Massstab. Welcher Anteil der Wirkleistung wird reflektiert?

Frage 2.2: Berechnen Sie die Leistungsbilanz (oben genannte Wirkleistungen) für das Zweitor aus Aufgabe 1 für $Z = R_W$. Ist das Zweitor verlustlos? Wie groß ist die Einfügedämpfung?

6.13. Verkettung von Zweitoren

Ein Zweitor aus konzentrierten Bauelementen (Zweitor A mit Serienimpedanz Z) wird mit einem Zweitor bestehend aus einer verlustlosen Leitung mit Wellenwiderstand R_W und Leitungslänge ℓ verkettet.



Frage 3.1: Berechnen Sie die Streuparameter für Zweitor A mit der Bezugsgröße R_W an beiden Toren.

Frage 3.2: Prüfen Sie die Plausibilität Ihrer Berechnung für die Grenzfälle: (1) Z = 0, (2) Z -> unendlich.

Frage 3.3: Berechnen Sie die Streuparameter für Zweitor B mit der Bezugsgröße R_W an beiden Toren.

Frage 3.4: Es seien $Z = R_W$ und $\ell = \lambda/4$. Wie lauten die Streumatrizen der Zweitore A und B?

Wie sind die Leistungsbilanzen von Zweitor A bzw. Zweitor B?

Frage 3.5: Kette von B und A für den Fall $Z = R_W$ und $\ell = \lambda/4$: Berechnen Sie die Streuparameter der Kette bestehend aus Zweitor B und Zweitor A.

6.14. Polarisation

Durch Überlagerung zweier Wellen, die in unterschiedlichen Richtungen schwingen, entstehen polarisierte Wellen. Gegeben seinen zwei ebene Wellen E_1 und E_2, wobei E den Vektor des elektrischen Feldes beschreibt:

$$E_1(z) = E_1 \; e^{-j(\beta z + \phi 1)} \, e^{j(\omega t)} \, e_y \qquad \text{Welle 1 in der y-Ebene}$$

$$E_2(z) = E_2 \; e^{-j(\beta z + \phi 2)} \, e^{j(\omega t)} \, e_x \qquad \text{Welle 2 in der x-Ebene}$$

Beide Wellen breiten sich in Richtung der z-Achse aus. Beide Wellen sind transversale Wellen, wobei die Schwingungsrichtung im ersten Fall in der y-Ebene, im zweiten Fall in der x-Ebene verläuft. Die Ausdrücke e_y und e_x bedeuten Einheitsvektoren in y-Richtung bzw. x-Richtung. Durch Überlagerung ergibt sich die Welle

$$E(z) = E_1(z) + E_2(z) = (E_1 \; e^{-j(\beta z + \phi 1)} \, e_y + E_2 \; e^{-j(\beta z + \phi 2)} \, e^{j(\omega t)} \, e_x) \, e^{j(\omega t)}$$

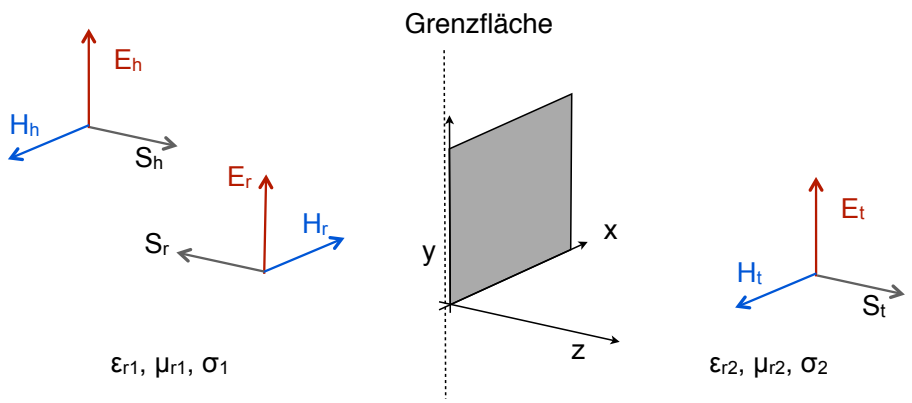
Je nach Phasenwinkel ϕ_1 und ϕ_2 und Amplituden E_2 und E_2 stellen sich unterschiedliche Arten der Polarisation ein:

(1) lineare Polarisation: $\phi_1 = \phi_2$
(2) zirkulare Polarisation: $\phi_1 = \phi_2$ +- 90^0 und $E_1 = E_2$
(3) elliptische Polarisation: $\phi_1 = \phi_2$ +- 90^0 und $E_1 \neq E_2$

Frage: Stellen Sie mit Hilfe der Wellen 1 und 2 die Arten der Polarisation in einer Skizze dar.

6.15. Reflexionen an Grenzflächen

Freie Wellen werden beim Übergang von einem Medium in in anderes Medium ebenfalls an der Grenzfläche reflektiert.



Die Abbildung beschreibt den senkrechten Einfall einer ebenen transversalen elektromagnetischen Welle vom Medium 1 ε_{r1}, μ_{r1}, σ_1 auf das angrenzende Medium 2 mit den Eigenschaften ε_{r2}, μ_{r2}, σ_2, wobei ε_r die relative Dielektrizitätskonstante, μ_r die relative Permeabilität, sowie σ die Leitfähigkeit beschreibt (sofern es sich um ein leitfähiges Medium handelt). Der Vektor S beschreibt die Ausbreitungsrichtung der Welle (hier: entlang der z-Achse).

Aus dem Materialeigenschaften lassen sich wiederum Wellenwiderstände ableiten. In verlustlosen Medium gilt:

$$R_{Wi} = \sqrt{(\mu_0\, \mu_{ri} / \varepsilon_0\, \varepsilon_{ri})} = R_{W0} \sqrt{(\mu_{ri}/\varepsilon_{ri})}$$

wobei $R_{W0} = \sqrt{(\mu_0/\varepsilon_0)}$ den Wellenwiderstand des freien Raumes bezeichnet.

Sofern ein Medium leitfähig ist (d.h. verlustbehaftet), wird der Wellenwiderstand komplex:

$$Z_{Wi} = \sqrt{(\mu_0\, \mu_{ri} / (\sigma_1 + \varepsilon_0\, \varepsilon_{ri}))}$$

Gemäß den Wellengleichungen für Felder ergibt sich in Medium 1 die Überlagerung der einfallenden Welle mit der reflektierten Welle:

$$E_1(z) = E_{h0}\ (e^{-j\beta z}\, e_y + r\ e^{j\beta z}\, e_y)\, e^{j(\omega t)}$$

$$H_1(z) = (E_{h0}/Z_{Wi})\ (-e^{-j\beta z}\, e_x + r\ e^{j\beta z}\, e_x)\, e^{j(\omega t)}$$

Hierbei beschreibt E_{h0} die Amplitude der hinlaufenden Welle in Medium 1, und r den Reflexionsfaktor an der Grenzfläche der Medien. Der Reflexionsfaktor beschreibt die Amplitude der reflektierten Welle im Verhältnis zur Amplitude der einlaufenden Welle. Hinter der Grenzfläche findet sich der transmittierte Teil der Welle.

$$E_2(z) = t\, E_{h0}\, e^{-j\beta z}\, e_y\, e^{j(\omega t)}$$

$$H_2(z) = t\, (E_{h0}/Z_{Wi})\ (-e^{-j\beta z}\, e_x)\, e^{j(\omega t)}$$

Hierbei beschreibt t den Transmissionsfaktor. Der Transmissionsfaktor ist als Verhältnis der Amplitude der ins Medium 2 transmittierten Welle zur Amplitude der einlaufenden Welle definiert.

An der Grenzfläche gelten folgende Stetigkeitsbedingungen für die Amplituden:

$$E_{2h} = E_{1h} + E_{1r} \qquad (5.1)$$

$$E_{2h}/R_{W2} = (E_{1h} - E_{1r})\ /R_{W1} \qquad (5.2)$$

Frage 5.1: Berechnen Sie aus (5.1) und (5.2) den Reflexionsfaktor r in Abhängigkeit der Wellenwiderstände beider Medien. Der Reflexionsfaktor ist definiert als: $r = E_{1r}/E_{1h}$.

Frage 5.2: Berechnen Sie aus (5.1) und (5.2) den Transmissionsfaktor t in Abhängigkeit der Wellenwiderstände beider Medien. Der Transmissionsfaktor ist definiert als: $t = E_{2h}/E_{1h}$.

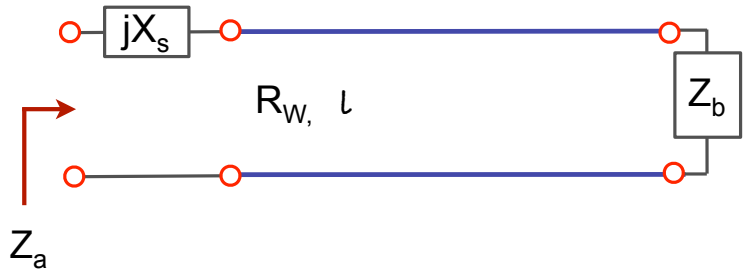
Frage 5.3: Beweisen Sie folgende Beziehungen: (1) $1+ r = t$, (2) $r = (R_{W2} - R_{W1})/ (R_{W2} + R_{W1})$, (3) $t = 2\, R_{W2} / (R_{W2} + R_{W1})$

Frage 5.4: Während die relativen Permeabilitätszahlen bei den meisten Materialen μ_r sich nicht unterscheiden und etwas $\mu_r = 1$ betragen, variieren die relativen Dielektrizitätszahlen ε_r deutlich. Welchen Einfluss hat ein Unterschied von ε_r im angrenzenden Medium auf die Reflexion und Transmission?

Frage 5.5: Eine ebene Welle trifft senkrecht auf ein ideal leitendes Medium (σ_2 -> unendlich). Welcher Reflexionsfaktor und welcher Transmissionsfaktor ergibt sich? Welche Werte haben die elektrische Feldstärke und die magnetische Feldstärke an der Grenzfläche?

6.16. Anpassschaltung

Die Aufgabe soll mit Hilfe des Smith-Diagramms gelöst werden. Anpassschaltung: Die Abschlussimpedanz Z_b soll wie in der folgenden Abbildung gezeigt mit Hilfe einer Leitung der Länge ℓ und einer Serienreaktanz X_s auf die Eingangsimpedanz Z_a angepasst werden.

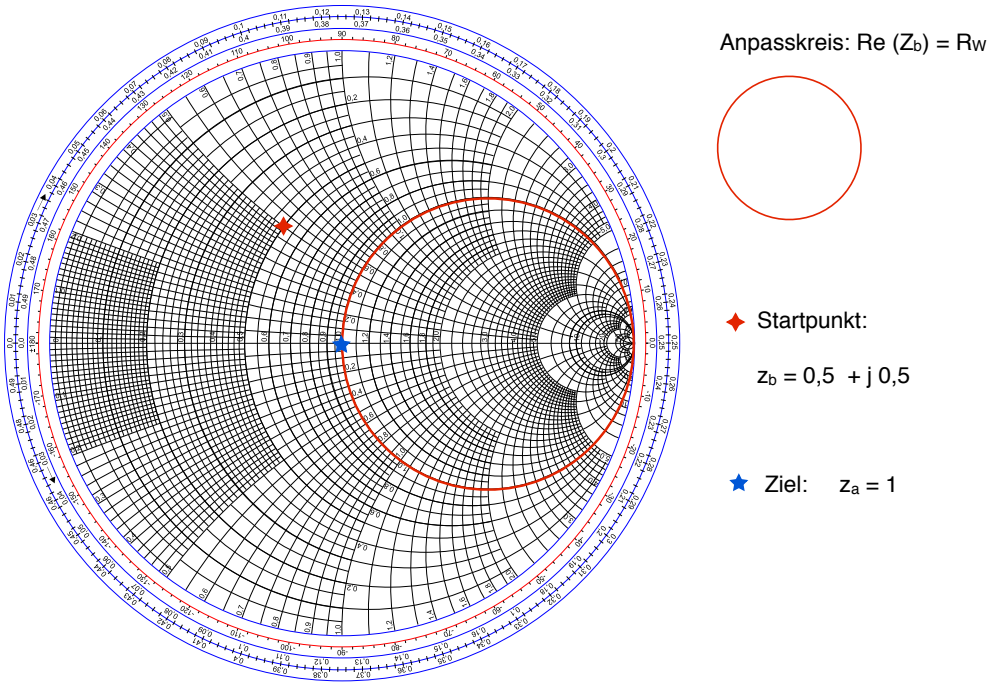


Gegeben sind folgende Werte: R_W = 50 Ω, Z_b = (25 + j25) Ω, Z_a = 50 Ω. Zur Anpassung soll eine Leitung der Länge ℓ , sowie ein konzentriertes Bauteil verwendet werden.

Die Schaltung wird einer Frequenz von 36,6 MHz betrieben. Der Verkürzungsfaktor der Leitung beträgt v/c = 0,66.

Frage 1.1: Erläutern Sie den Lösungsweg. Beschreiben Sie hierzu Startpunkt und Ziel der Transformation, sowie den Weg der Transformation im Smith Diagramm und die Lösungsmöglichkeiten. Wählen Sie eine Lösung aus.

Startpunkt ist die Abschlussimpedanz Z_b, in normierter Schreibweise z_b= 0,5 + j 0,5. Ziel der Transformation ist eine angepasste Eingangsimpedanz Z_a = R_W, bzw. in normierter Schreibweise z_a = 1.

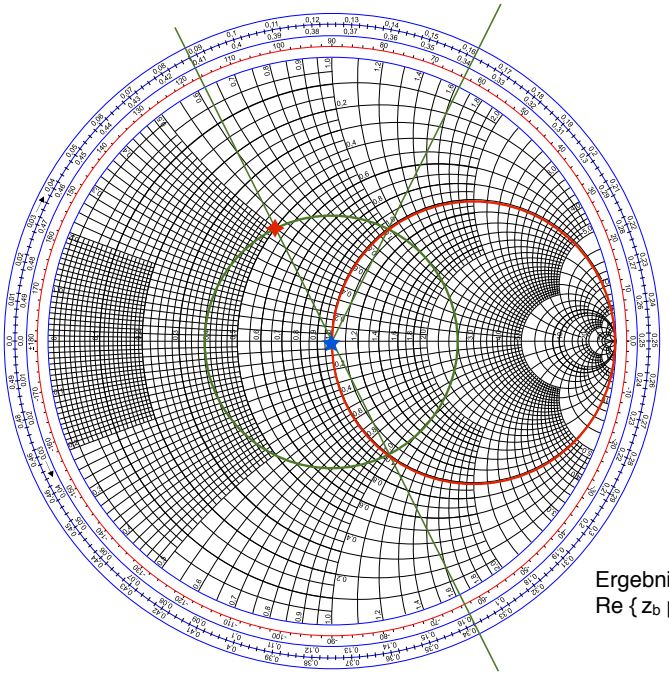


Diese Werte lassen sich direkt ins Smith Diagramm eintragen. Der Lösungsweg führt über 2 Schritte: (1) mit Hilfe einer Leitung wird z_b auf den Anpasskreis transformiert. Auf dem Anpasskreis gilt Re {z_b‘ = 1}. (2) der Imaginärteil kann nun mit Hilfe einer Reaktanz X_S kompensiert werden. Der Wert der Reaktanz lässt sich im Smith-Diagramm auf der imaginären Achse ablesen (Entfernung vom Schnittpunkt z_b‘ zum Zielpunkt z_a).

Da es zwei Schnittpunkte der Leitungstransformation mit dem Anpasskreis gibt, gibt es zwei Lösungen für X_S: zum einen mit negativem Imaginärteil, zu realisieren mit einer Kapazität, zum anderen mit einem positiven Imaginärteil, zu realisieren mit einer Induktivität.

Frage 1.2: Berechnen Sie die Leitungslänge ℓ und Reaktanz X_S für die gewählte Lösung. Berechnen Sie die benötigte Kapazität bzw. Induktivität.

Vom Startpunkt z_b zum ersten Schnittpunkt wird eine Leitungslänge von ℓ/λ = 0,074 benötigt, zum zweiten Schnittpunkt eine Leitungslänge von ℓ/λ = 0,25.



Anpasskreis: Re (Z_b) = R_W

Leitungslängen:

(1) l/λ = 0,162 - 0,088

(2) l/λ = 0,338 - 0,088

Ergebnis:
Re { z_b plus Leitungstransformation} = 1

Die zur Kompensation benötigten Reaktanzen erhält man aus den Impedanzen an den Schnittpunkten: -j x_S= -j (also -jX_S= -j50 Ω) für den ersten Schnittpunkt, bzw. j x_S = j (also jX_S = j50 Ω) im zweiten Schnittpunkt. Die zugehörigen Reaktanzen berechnen sich aus X_S = ωL, bzw. X_S = 1/ωC.

Berechnete Werte:

- λ = c * v/c / f = 5,41 m
- ℓ /λ = 0,074, ℓ = 0,40 m
- C = 87 pF

- ℓ /λ = 0,25, ℓ = 1,35 m
- L = 217 nH

Frage 1.3: Wie wirken sich Ungenauigkeiten in der Leitungslänge aus? Erläutern Sie den Einfluss einer zu langen bzw. zu kurzen Leitung auf die Anpassung.

Der Anpasskreis wird nicht genau getroffen, d.h. (1) es verbleibt für z_a ein Realteil ungleich dem Wellenwiderstand, (2) die Kompensation des Imaginärteils mit der berechneten Reaktanz funktioniert ebenfalls nicht mehr genau, es verbleibt ein Imaginärteil..

Im ersten Schnittpunkt: Zu lange Leitung: Realteil wird größer als der Wellenwiderstand, die Kompensation mit der berechneten Reaktanz reicht nicht ganz aus (es verbleibt ein positiver Imaginärteil). Zu kurze Leitung: Realteil wird kleiner als der Wellenwiderstand, es wird überkompensiert (es verbleibt ein negativer Imaginärteil).

Im zweiten Schnittpunkt: Zu lange Leitung: Realteil wird kleiner als der Wellenwiderstand, die Kompensation mit der berechneten Reaktanz fällt zu groß aus (es verbleibt ein positiver Imaginärteil). Zu kurze Leitung: Realteil wird größer als der Wellenwiderstand, es wird unterkompensiert (es verbleibt ein negativer Imaginärteil).

Frage 1.4: Welche Wirkleistung im Verhältnis zur eingespeisten Leistung im angepassten Fall nimmt die Schaltung auf in den folgenden Fällen: (1) ohne Anpass-schaltung (Z_b direkt an der Quelle angeschlossen), (2) mit Anpassschaltung. Hinweis: Verwenden Sie den Reflexionsfaktor.

Ohne Anpassschaltung:

- Reflexionsfaktor: Betrag aus dem Smith-Diagramm ermitteln, $|r_b| = 0{,}45$ (durch Vermessen mit Hilfe eines Zirkels bzw. durch Ablesen von z auf der reellen Achse und errechnen aus $|r_b| = |(z-1)/(z+1)|$.
- reflektierte Wirkleistung: $P_r = |r_b|^2 P_{in}$. Anteil $P_r / P_{in} = |r_b|^2 = 0{,}2$. Es werden also 20% der Wirkleistung reflektiert und somit 80% der Wirkleistung aufgenommen.

Mit Anpassschaltung:

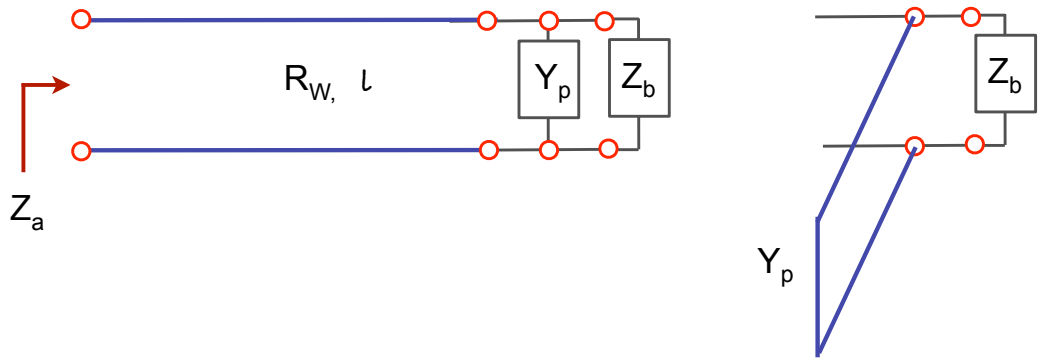
- Reflexionsfaktor: $r_a=0$
- reflektierte Wirkleistung: Null, somit wird die gesamte Wirkleistung aufgenommen.

Frage 1.5: Die Leitungslänge für eine der beiden möglichen Lösungen hätte man unmittelbar aus der Lage des Startpunktes ablesen können. Warum? Erläutern Sie den Zusammenhang.

Der Startpunkt $z_b = 0{,}5 + j\,0{,}5$ wird durch einen Viertelwellentransformator in $z_b' = 1/z_b$. transformiert. In diesem speziellen Fall ist $z_a' = 1/z_a = 1 - j$, wobei der Realteil bereits auf dem Anpasskreis liegt. Diesen Zusammenhang kann man im Diagramm aus der Verlängerung der Geraden durch z_b und z_a erkennen, bzw. als Zahlenfreund aus dem Startwert interpretieren.

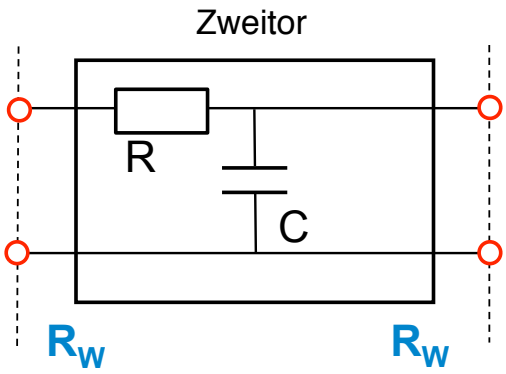
Frage 1.6: Als Alternative zur Anpassung durch Leitungstransformation und Kompensation mit der Serienreaktanz X_S hätte man auf mit Hilfe einer parallelen Admittanz Y_P (komplexer Leitwert) direkt an der Last anpassen können, wie in der folgenden Abbildung gezeigt. Wie muss die parallele Admittanz Y_p bemessen werden? Hinweis: Verwenden Sie das Smith-Diagramm.

Frage 1.7: Da die Admittanz Y_p einen reinen Blindleitwert darstellt, kann die Admittanz $Y_p = jB$ anstatt durch ein konzentriertes Bauelement auch durch eine Stichleitung nachgebildet werden, wie in der Abbildung rechts gezeigt. Berechnen Sie die Leitungslänge für Y_P.



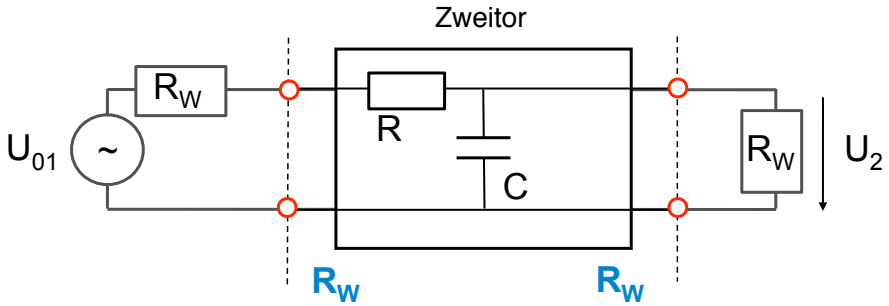
6.17. Berechnung der Streuparameter

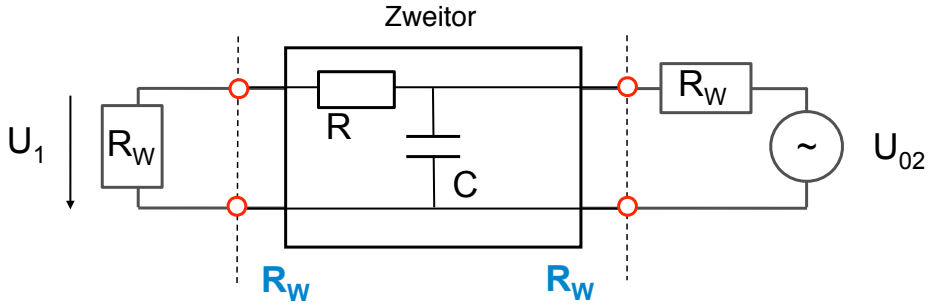
Ein Zweitor aus konzentrierten Bauteilen (keine Leitungen und Leitungseffekte) besteht aus einem Widerstand und einem Kondensator, wie in der Abbildung gezeigt. Die Komponenten haben folgende Werte: R=50Ω, C=40pF. Die Bezugsgröße R_W beträgt 50 Ω.



Frage 2.1: Geben Sie die Beschaltung zur Ermittlung der Streuparameter an (Skizze).

Lösung:





Frage 2.2: Ist das Zweitor symmetrisch ($s_{22} = s_{11}$)? Geben Sie bitte eine qualitative Begründung an.

Das Zweitor ist nicht symmetrisch, was an der Beschaltung zu erkennen ist. Für den Eingangsreflexionsfaktor ist C parallel zu R_W, für den Ausgangsreflexionsfaktor ist C parallel zu ($R+R_W$). Hieraus ergeben sich unterschiedliche Reflexionsfaktoren.

Frage 2.3: Ist das Zweitor übertragungssymmetrisch (reziprok, d.h. $s_{21} = s_{12}$)? Geben Sie bitte eine qualitative Begründung an.

Das Zweitor ist reziprok, da nur konzentrierte Bauelemente in Form von Widerständen und Reaktanzen verwendet werden. Es gibt keine richtungsabhängigen Komponenten.

Frage 2.4: Berechnen Sie die Streumatrix für die Frequenz f = (500/2π) MHz mit den weiter oben angegebenen Werten für R, C und R_W. Hinweis: Beschreiben Sie bitte kurz den Lösungsweg, z.B. durch eine Skizze bzw. Formel.

Lösungsweg:

- Eingangsreflexionsfaktor s11 und Ausgangsreflexionsfaktor s22 gemäß Formel r = $(Z/R_W - 1) / Z/R_W + 1)$, wobei sich Z jeweils aus der Beschaltung ergibt
- Vorwärtstransmissionsfaktor S_{21} und Rückwärtstransmissionsfaktor S_{12} aus der Formel $s_{21}=2U_2/U_{01}$ bzw. $s_{12}=2U_1/U_{02}$ aus Spannungsteiler mit den gegebenen Werten
- Für die Berechnung gilt: $R=R_W=50\ \Omega$, $X_C=1/\omega C=50\ \Omega$, $b=\omega RC=R/X_C=1$
- für s_{11}: $Z = R + R_W//Z_C$ mit $Z_C=1/j\omega C$; $Z/R_W = 1 + 1/(1 + j\omega RC)$
- für s_{22}: $Z = (R+R_W)//Z_C$ mit $Z_C=1/j\omega C$; $Z/R_W = 2 / (1 + j\omega 2RC)$
- für $s_{21}=s_{12}$: aus Spannungsteiler $U_2/U_{01} = (R_W//Z_C) / (R_W + R + R_W//Z_C)$

Lösung:

- $s_{11}= (1/13) * (3 - j\ 2)$,
- $s_{22}=(-1/13) * (1 + j\ 8)$,
- $s_{12}=s_{21}= (2/13) * (3 - j\ 2)$

Frage 2.5: Wie lautet die Streumatrix für folgende Fälle: (1) sehr niedrige Frequenzen (f -> 0Hz), (2) sehr hohe Frequenzen (f -> unendlich). Prüfen Sie die Ergebnisse auf Plausibilität.

Für niedrige Frequenzen: Die Kapazität kann ignoriert werden. Das Zweitor ist dann auch symmetrisch, d.h. $s_{11}=s_{22}$. Lösung: $s_{11}=s_{22}= 1/3$, $s_{12}=s_{21}= 2/3$.

Für hohe Frequenzen: Die Kapazität kann als Kurzschluss betrachtet werden. In Vorwärtsrichtung ist die Schaltung von der Quelle aus betrachtet angepasst (da R vor dem Kurzschluss), d.h. $s_{11}=0$. In Rückwärtsrichtung ist die Schaltung kurzgeschlossen, d.h. $s_{22}=-1$. Wegen des Kurzschlusses wird weder in Vorwärtsrichtung noch in Rückwärtsrichtung eine Spannung U_2 bzw. U_1 übertragen, d.h. $s_{12}=s_{21}=0$.

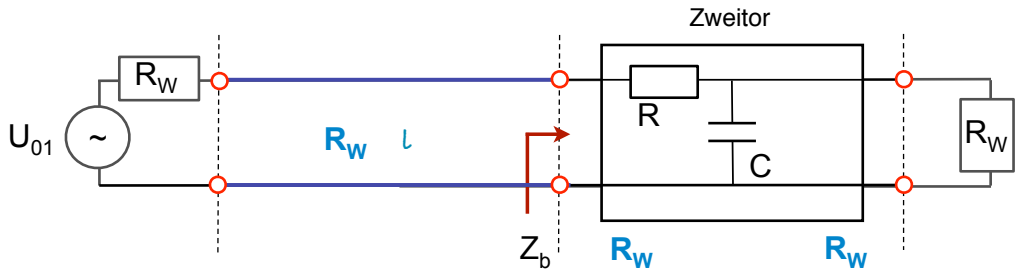
Frage 2.6: Bei Einspeisung an Tor 1 und Betriebsfrequenz aus Frage 2.4: (1) Welcher Anteil der Wirkleistung wird an Tor 1 reflektiert? (2) Welcher Anteil der Wirkleistung läuft auf Tor 2 an? (2) Welcher Anteil der Wirkleistung wird im Zweitor konsumiert?

Die Leistungsanteile berechnen sich aus dem Betragsquadrat der Streuparameter. Bei Betrieb in Vorwärtsrichtung ergeben sich folgende Werte:

- $s_{11} = (1/13)*(3 - j2)$ -> $|s_{11}|^2= (1/13^2)*(9+4) = 1/13$ (reflektierte Wirkleistung)
- $s_{21} = (2/13)*(3 - j2)$ -> $|s_{21}|^2= (4/13^2)*(9+4) = 4/13$ (übertragene Wirkleistung)
- Somit werden 13/13 - 1/13 - 4/13 = 8/13 im Zweitor konsumiert.

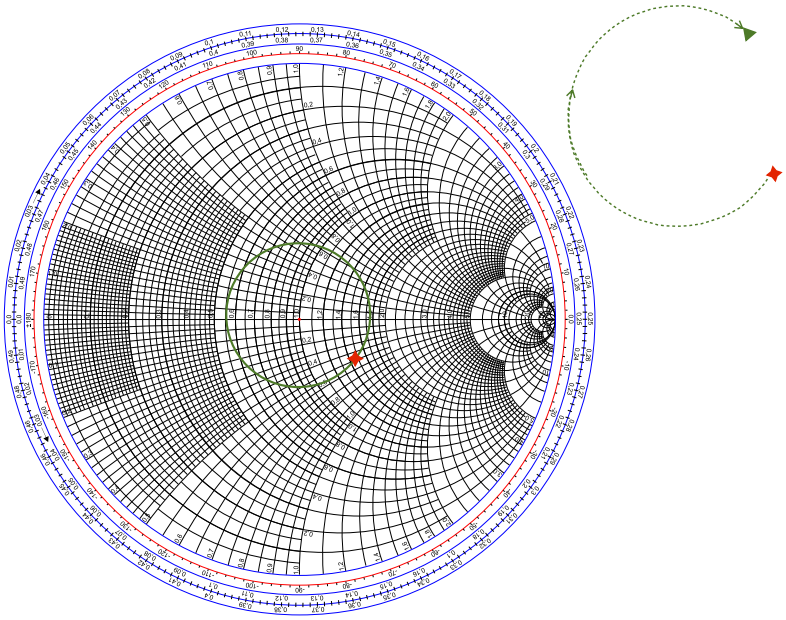
6.18. Anschluss des Zweitors mit Hilfe einer Leitung

Das Zweitor aus Aufgabe 2 (gleiche Werte und gleiche Betriebsfrequenz) wird mit Hilfe einer Leitung der Länge ℓ und mit Wellenwiderstand R_W an eine Quelle mit Innenwiderstand R_W angeschlossen, wie in der folgenden Abbildung gezeigt.



Frage 3.1: Welchen Effekt hat die Leitung in Abhängigkeit ihrer Länge auf die Impedanz Z_b? Stellen Sie den Zusammenhang im Smith-Diagramm dar.

Lösung: Leitungstransformation, d.h. Drehung des Reflexionsfaktors mit der Leitungslänge. Hierdurch auch Transformation der Impedanz Z_b gemäß der Werte auf dem Kreis (im Smith-Diagramm in normierter Schreibweise $z_b = Z_b/R_W$). Die Eingangsimpedanz beträgt z_b = 1,5 - j 0,5.



Frage 3.2: Ermitteln Sie den Eingangsreflexionsfaktor am Tor 1 rechnerisch aus dem Eingangswiderstand Z_b. Welcher Reflexionsfaktor ergibt sich in Abhängigkeit der Leitungslänge am Anfang der Leitung?

$r_b = s_{11}$= (1/13)*(3 - 2j),

In Abhängigkeit der Leitungslänge gilt: $r(l) = r_b\, e^{-j2\beta l}$, d.h. Änderung des Phasenwinkels.

Frage 3.3: Kann die Leitung die aufgenommene Wirkleistung verbessern? Welche Wirkleistung nimmt die Schaltung mit einem Viertelwellentransformator $\ell = \lambda/4$ auf?

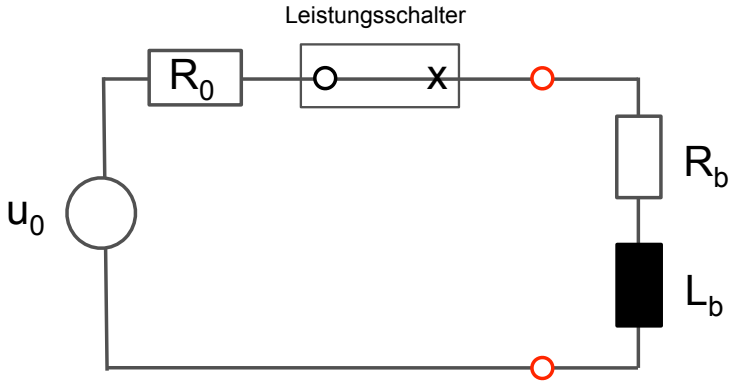
Die Leitung ändert den Betrag des Reflexionsfaktors nicht, kann die Aufnahme der Wirkleistung also nicht verbessern. $|s_{11}|^2$= 1/13 (reflektierte Wirkleistung). Somit werden 1 - $|s_{11}|^2$ = 12/13 der Wirkleistung aufgenommen.

Frage 3.4: Mit welcher Massnahme könnte eine Anpassung an den Innenwiderstand der Quelle erzielt werden? Beschreiben Sie eine mögliche Lösung (keine Berechnung, nur den Lösungsweg darstellen). Welche Verbesserung der Leistungsaufnahme könnte hierdurch erzielt werden?

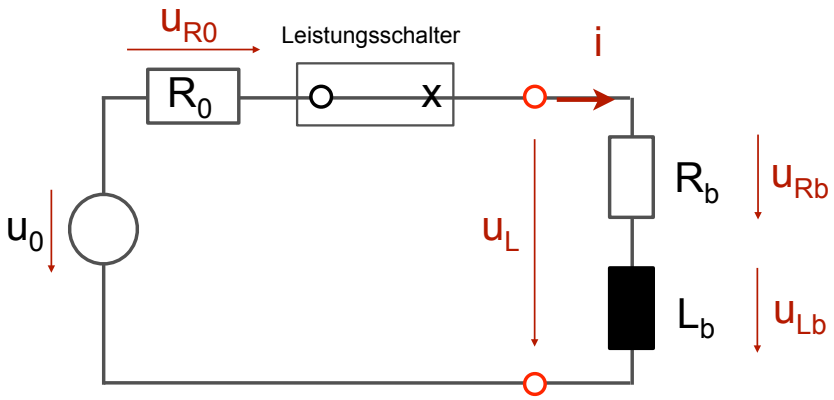
Kombination von Leitungstransformation und Kompensation. Die Leitung transformiert den Realteil von Z_b zu $Re(Z'_b)=R_W$. Dadurch ändert sich zwar der Betrag des Reflexionsfaktors nicht, jedoch liefert die Leitung eine Vorlage hierfür. Dann Kompensation dem Imaginärteils der transformierten Impedanz $Im(Z'_b) = X_s$ z.B. durch ein konzentriertes Bauelement der Grösse $-X_s$. Verbesserung: Reflexionsfaktor = 0, die Wirkleistung wird komplett aufgenommen.

6.19. Induktive Last

Eine Spannungsquelle mit Innenwiderstand R_0 wird mit einer Wirklast R_b und einer induktiven Last L_b betrieben, wie in folgender Abbildung gezeigt.



Frage 1.1 (8 Punkte): Erstellen Sie die Differentialgleichung der Schaltung. Hinweis: Geben Sie bitte Zählpfeile für Strom und Spannung vor, aus denen sich die Vorzeichen ableiten lassen.



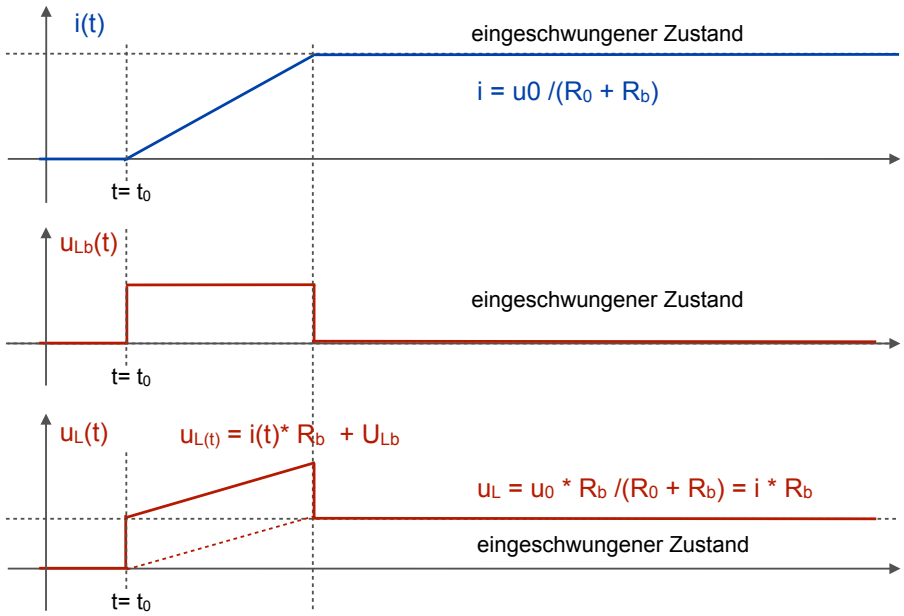
Lösung: Aus der Maschenregel folgt mit den angegebenen Zählpfeilen:

- $u_0 = u_{R0} + u_{Rb} + u_{Lb}$, wobei ausserdem gilt
- $u_{R0} = R_0 * i$
- $u_{Rb} = R_b * i$
- $u_{R0} = L_b * di/dt$

Insgesamt erhält man also: $u_0 = R_0 * i + R_b * i + L_b * di/dt$

Frage 1.2 (8 Punkte): Es wird eine Gleichspannungsquelle u_0 verwendet. Zum Zeitpunkt $t = t_0$ wird die Spannungsquelle eingeschaltet (durch Schließen des vorher geöffneten Leistungsschalters). Skizzieren Sie den Verlauf des Stroms, den Spannungsverlauf über der Induktivität, sowie den Spannungsverlauf über der Last (R_b und L_b) auf der Zeitachse.

Lösung:



Frage 1.3 (8 Punkte): Die Schaltung wird mit Gleichspannung betrieben. Im eingeschwungenen Zustand wird der Leistungsschalter zur Unterbrechung des Stromes zum Zeitpunkt $t = t_1$ geöffnet, es entsteht ein Lichtbogen im Leistungsschalter. Wie groß muss die Spannung über dem Lichtbogen werden, damit der Strom ausgeschaltet werden kann? Was geschieht beim Ausschalten mit der in der Induktivität gespeicherten Energie?

Lösung: (1) Die Spannung U_{Ls} über dem Lichtbogen (Leistungsschalter) wird in der Gleichung mit Zählrichtung wie U_{R0} ergänzt: $u_0 = R_0 * i + u_{Ls} + R_b * i + L_b * di/dt$

Für die Spannung über dem Lichtbogen ergibt sich somit:

$u_{Ls} = u_0 - (R_0 + R_b) * i - L_b * di/dt$

Da di/dt negativ sein muss, damit der Strom abnimmt, liegt die Spannung über dem Leistungsschalter während des Ausschaltvorgangs oberhalb von $u_{Ls} > u_0 - (R_0 + R_b) * i$. Nach Abklingen der transienten Vorgänge gilt $u_{Ls} = u_0$.

(2) Die in der Induktivität gespeicherte Energie wird im Lichtbogen und in den ohmschen Widerständen in Wärme umgesetzt.

Frage 1.4 (6 Punkte): Die Schaltung wird mit Wechselspannung der Frequenz 50 Hertz betrieben. Erstellen Sie die Differentialgleichung in Phasorenschreibweise. Stellen Sie die Spannung über der Last als Zeiger dar und berechnen Sie den Kosinus des Phasenwinkels (cos (ϕ)) zwischen Strom und Spannung.

Lösung: Die Induktivität L_b wird als Reaktanz $jX = j\omega L_b$ behandelt. Man erhält:

$$U_0 = (R_0 + R_b) * I + j\omega L_b * I$$

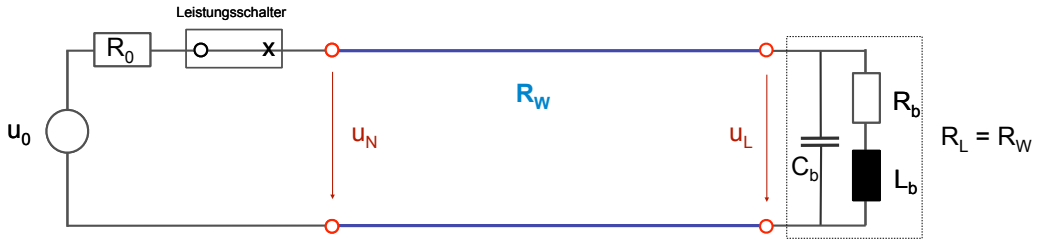
$U_L = R_b * I + j\omega L_b * I$ Zeiger mit Realteil ($R_b * I$) und Imaginärteil ($\omega L_b * I$)

$\cos(\phi) = U_{Rb} / |U_L| = Rb / \sqrt{(R_b^2 + (\omega L_b)^2)}$

Frage 1.5 (6 Punkte): Abschalten von Wechselstrom. Die zu Frage 1.1 erstellte Differentialgleichung gilt auch für das Abschalten von Wechselstrom. Wodurch vereinfacht sich bei Wechselstrom im Vergleich zum Gleichstrom der Abschaltvorgang? Gemessen an der Spannung über der Last, wann wäre ein günstiger bzw. ungünstiger Zeitpunkt zum Betätigen des Leistungsschalters?

Lösung: Wechselstrom hat Nulldurchgänge, an denen der Lichtbogen verlöschen kann. Die Spannung über der Last eilt dem Strom um den Phasenwinkel ϕ vor. Vom Nulldurchgang der Spannung an gemessen, wäre $t = \phi * 20$ ms/ 2π ein günstiger Zeitpunkt. Den ungünstigsten Zeitpunkt erhält man an den Maxima des Stroms.

Frage 1.6 (6 Punkte): Die Last soll nun mit Hilfe einer Leitung an das Netz angeschlossen werden. In der elektrischen Energieversorgung spricht man von der natürlichen Leistung einer Leitung, wenn die Leitung mit einer Last der Größe ihres Wellenwiderstandes abgeschlossen ist, d.h. $R_L = R_W$. Folgende Abbildung zeigt hierzu eine Kompensation des induktiven Anteils der Last mit Hilfe einer Kapazität, so dass diese Bedingung erfüllt sei.



Welche Leistung überträgt die Leitung in Abhängigkeit der Netzspannung U_N und des Wellenwiderstandes R_W? Wie groß ist die Spannung U_L über der Last im Verhältnis zu U_N? Wie groß ist cos (ϕ) (der Kosinus des Phasenwinkels zwischen Strom und Spannung) am Anfang der Leitung und am Ende der Leitung?

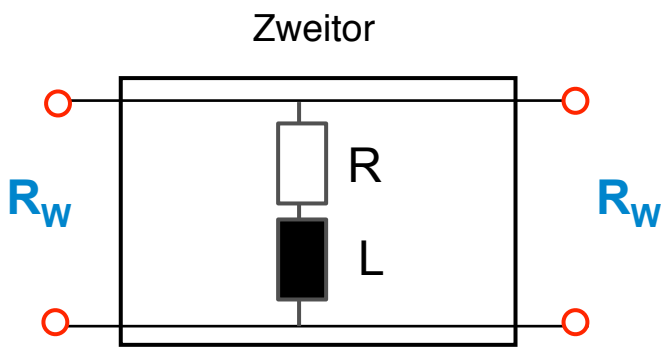
Lösung: (1) $P_N = U_N * I = U_N^2 / R_W$.

(2) $|U_L| = |U_N|$ (verlustlose Leitung), phasenverschoben durch die Leitungstransformation (abhängig von der Leitungslänge im Verhältnis zur Wellenlänge).

(3) U_N ist in Phase mit dem Strom am Anfang der Leitung. U_L ist in Phase mit dem Strom am Ende der Leitung (fortschreitende Welle ohne Reflexionen), daher ist stets $\cos(\phi) = 1$.

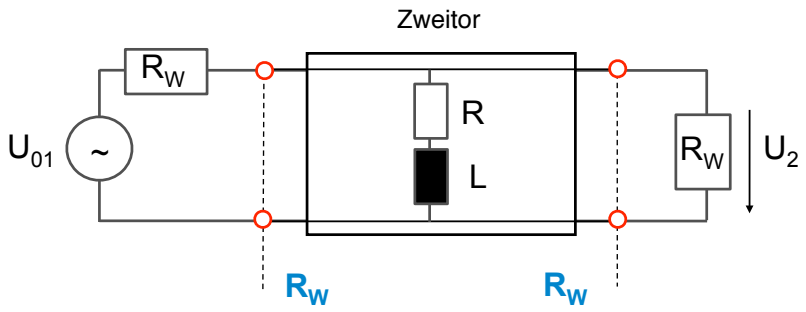
6.20. Berechnung der Streuparameter

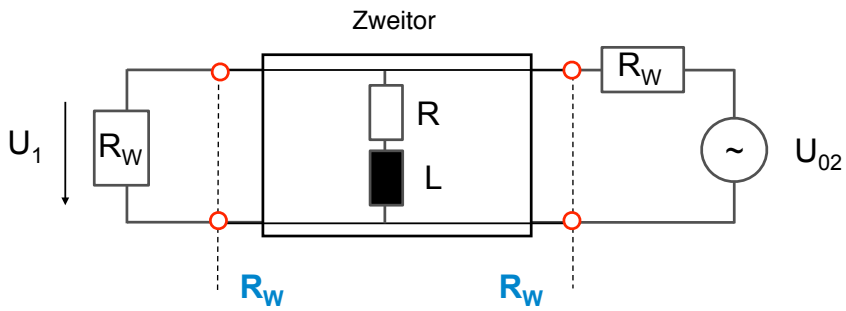
Ein Zweitor aus konzentrierten Bauteilen (keine Leitungen und Leitungseffekte) besteht aus einem Widerstand und einer Induktivität, wie in der Abbildung gezeigt. Die Komponenten haben folgende Werte: R = 50 Ω, L = 125 nH. Die Bezugsgröße R_W beträgt 50 Ω.



Frage 2.1 (8 Punkte): Geben Sie die Beschaltung zur Ermittlung der Streuparameter an (Skizze).

Lösung: Jeweils an einem Ende einspeisen, am anderen Ende mit Wellenwiderstand abschliessen.





Frage 2.2 (4 Punkte): Ist das Zweitor übertragungssymmetrisch (reziprok, d.h. $s_{21} = s_{12}$)? Geben Sie bitte eine qualitative Begründung an. Ist das Zweitor verlustfrei?

Lösung: (1) Reziprozität: Ja, wegen des völlig symmetrischen Aufbaus des Zweitors ist die Vorwärtstransmission offensichtlich gleich der Rückwärtstransmission. Generell ist dieser Fall bei Verwendung passiver Bauelemente ohne richtungsabhängige Komponenten gegeben. (2) Verlustfreiheit: Nein, im Widerstand R geht Leistung verloren.

Frage 2.3 (4 Punkte): Ist das Zweitor symmetrisch ($s_{22} = s_{11}$)? Geben Sie bitte eine qualitative Begründung an.

Lösung: Ja, die Schaltung ist völlig symmetrisch aufgebaut, d.h. es gibt keinen Unterschied zwischen Tor 1 und Tor 2 in der Beschaltung zur Ermittlung der Streuparameter.

Frage 2.4 (8 Punkte): Berechnen Sie die Streumatrix für die Frequenz f = 400/2π MHz mit den weiter oben angegebenen Werten für R, L und R_W. Hinweis: Beschreiben Sie bitte auch kurz den Lösungsweg, z.B. durch eine Skizze bzw. Formel.

Lösungsweg:

- Eingangsreflexionsfaktor s11 und Ausgangsreflexionsfaktor s22 gemäß Formel r = $(Z/R_W - 1) / Z/R_W + 1)$, wobei sich Z jeweils aus der Beschaltung ergibt
- Vorwärtstransmissionsfaktor S_{21} und Rückwärtstransmissionsfaktor S_{12} aus der Formel $s_{21}=2U_2/U_{01}$ bzw. $s_{12}=2U_1/U_{02}$ aus Spannungsteiler mit den gegebenen Werten
- Für die Berechnung gilt: $R = R_W = 50\ \Omega$, $X_L = \omega L = 50\ \Omega$; $Z_q = R_W + j\ X_L$
- für $s_{11} = s_{22}$: $Z = Z_q // R_w = Z_q * R_w / (Z_q + R_w)$; $z=Z/R_W$; $s_{11} = s_{22} = (z -1)/(z +1)$
- $s_{11} = s_{22} = R_w / (2\ Z_q + R_w)$;
- für $s_{21} = s_{12}$: aus Spannungsteiler $U_2/U_{01} = Z / (R_W + Z) = R_W // Z_q / (R_W + (R_W // Z_q))$
- $s_{21} = s_{12} = 2U_2/U_{01} = 2\ Z_q /(2\ Z_q + R_W)$

Lösung:

- $s_{11} = s_{22} = - 1/ (3 + 2j) = -(1/13) * (3 - 2j)$
- $s_{12} = s_{21} = (2 + 2j) / (3 + 2j) = (2/13) * (5 + j)$

Frage 2.5 (8 Punkte): Plausibilitätsprüfung. Wie lautet die Streumatrix für folgende Fälle: (1) Frequenz f = 0Hz, (2) sehr hohe Frequenzen (f -> unendlich). Prüfen Sie die Ergebnisse auf Plausibilität.

Lösung: (1) Für niedrige Frequenzen: Die Reaktanz X_L kann ignoriert werden, d.h. $Z_q=R=R_W$. Es ergeben sich:

- $s_{11} = s_{22} = R_w / (2\ Z_q + R_w) = 1/3$
- $s_{21} = s_{12} = 2\ Z_q /(2\ Z_q + R_W) = 2/3$

(2) Für hohe Frequenzen: Die Reaktanz kann als offene Leitung betrachtet werden (Zq -> unendlich). Es ergeben sich:

- $s_{11} = s_{22} = R_w / (2\ Z_q + R_w) = 0$
- $s_{21} = s_{12} = 2\ Z_q /(2\ Z_q + R_W) = 1$.

Frage 2.6 (6 Punkte): Leistungsbilanz. Bei Einspeisung an Tor 1 und Betriebsfrequenz aus Frage 2.4: (1) Welcher Anteil der Wirkleistung wird an Tor 1 reflektiert? (2) Welcher Anteil der Wirk-leistung läuft auf Tor 2 an? (2) Welcher Anteil der Wirkleistung wird im Zweitor konsumiert? Wie lautet die Leistungsbilanz bei den Spezialfällen aus Frage 2.5, d.h. für niedrige Frequenzen (f -> 0Hz), bzw. für sehr hohe Frequenzen (f -> unendlich)

(1) Lösung für Betriebsfrequenz gemäß Frage 2.4: Die Leistungsanteile berechnen sich aus dem Betragsquadrat der Streuparameter. Bei Betrieb in Vorwärtsrichtung ergeben sich folgende Werte:

- $s_{11} = -(1/13) * (3 - 2j)$ -> $|s_{11}|^2= (1/13^2)*(9+4) = 1/13$ (reflektierte Wirkleistung)
- $s_{21} = (2/13) * (5 + j)$ -> $|s_{21}|^2= (4/13^2)*(25+1) = 8/13$ (übertragene Wirkleistung)
- Somit werden 13/13 - 1/13 - 8/13 = 4/13 im Zweitor konsumiert.

(2) Für niedrige Frequenzen: Die Reaktanz X_L kann ignoriert werden, d.h. $Z_q=R=R_W$. Es ergeben sich:

- $s_{11} = 1/3$ -> $|s_{11}|^2 = 1/9$ (reflektierte Wirkleistung)
- $s_{21} = 2/3$ -> $|s_{21}|^2= 4/9$ (übertragene Wirkleistung)

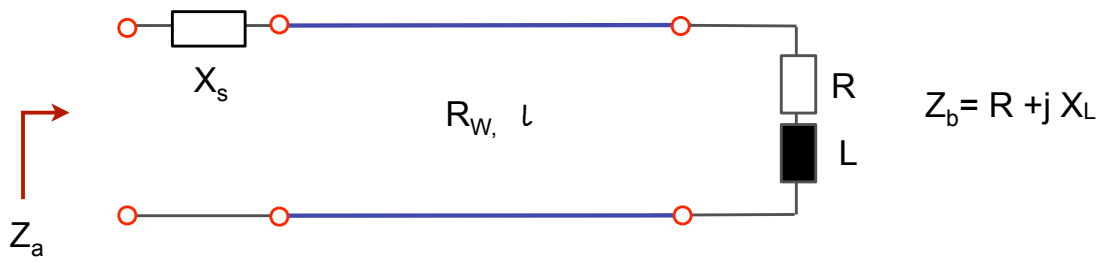
- Somit werden 9/9 - 1/9 - 4/9 = 4/9 im Zweitor konsumiert. Die Aufteilung der konsumierten und übertragenen Leistung erscheint logisch, da die Widerstände gleich groß sind.

(3) Für hohe Frequenzen: Die Reaktanz kann als offene Leitung betrachtet werden (Zq -> unendlich). Es ergeben sich:

- $s_{11} = 0$ -> $|s_{11}|^2 = 0$ (reflektierte Wirkleistung)
- $s_{21} = 1$ -> $|s_{21}|^2 = 1$ (übertragene Wirkleistung)
- Somit ergeben sich ideale Übertragungseigenschaften.

6.21. Anpassschaltung

Die Aufgabe soll mit Hilfe des Smith-Diagramms gelöst werden. Anpassschaltung: Die Abschlussimpedanz Z_b soll wie in der folgenden Abbildung gezeigt mit Hilfe einer Leitung der Länge ℓ und einer Serienreaktanz X_s auf die Eingangsimpedanz Z_a angepasst werden.

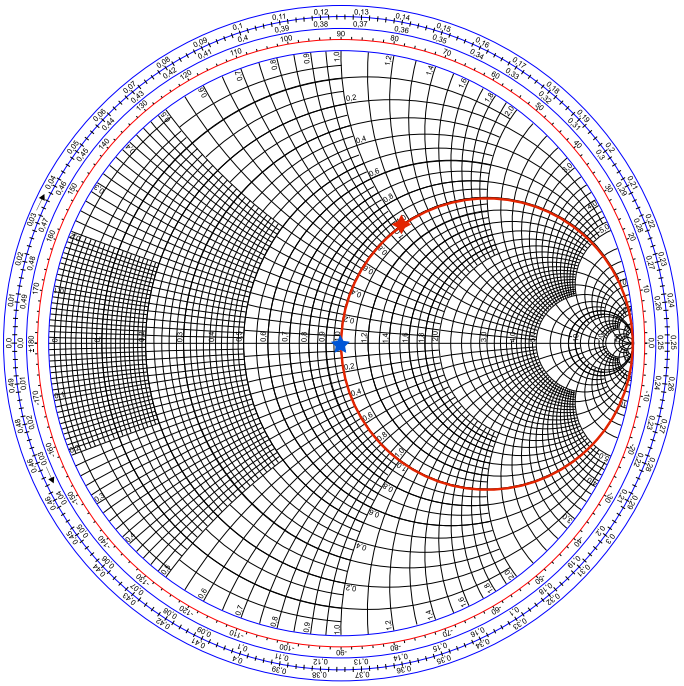


Gegeben sind folgende Werte: $R_W = 50\ \Omega$, $Z_b = (50 + j50)\ \Omega$, $Z_a = 50\ \Omega$. Zur Anpassung soll eine Leitung der Länge ℓ, sowie ein konzentriertes Bauteil verwendet werden.

Die Schaltung wird einer Frequenz von $f = 400/2\pi$ MHz betrieben. Der Verkürzungsfaktor der Leitung beträgt $v/c = 2/3$.

Frage 3.1 (8 Punkte): Erläutern Sie den Lösungsweg. Beschreiben Sie hierzu Startpunkt und Ziel der Transformation, sowie mögliche Wege der Transformation im Smith Diagramm. Beschreiben Sie die möglichen Lösungen. Wählen Sie eine Lösung aus.

Startpunkt ist die Abschlussimpedanz Z_b, in normierter Schreibweise $z_b = 1 + j$. Ziel der Transformation ist eine angepasste Eingangsimpedanz $Z_a = R_W$, bzw. in normierter Schreibweise $z_a = 1$.



Anpasskreis: Re (Z_b) = R_W

Startpunkt:

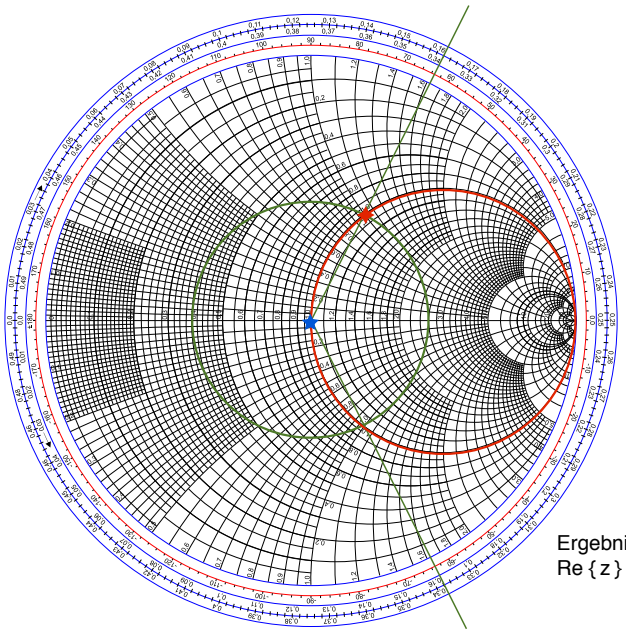
$z_b = 1 + j\,1$

Ziel: $z_a = 1$

Lösungswege: (1) Da der Startpunkt in diesem Fall bereits auf dem Anpasskreis liegt, könnte man eine Serienreaktanz $X_s = -X_L$ ohne Leitungstransformation unmittelbar an Z_b anschliessen. Damit ist $Z_b' = R_W$ und die Leitungslänge hat keinen Einfluss mehr. (2) Man transformiert auf einen konjugiert komplexen Schnittpunkt mit dem Anpasskreis und kompensiert am Anfang der Leitung mit einer Serienreaktanz $X_s = X_L$.

Frage 3.2 (4 Punkte): Berechnen Sie die benötigte Kapazität bzw. Induktivität bzw. Leitungslänge für die von Ihnen gewählte Lösung.

Lösung (1): Serienreaktanz $x_s = -1 \Rightarrow X_s = -50\ \Omega = -1/\omega C \Rightarrow C = 50$ pF.



Anpasskreis: Re (Z) = R_W

Kompensation:

(1) $l/\lambda = 0$ (ohne Leitung)

mit Kapazität $x_s = -1$

(2) $l/\lambda = 0{,}338 - 0{,}162 = 0{,}176$

und weiterer Induktivität mit $x_s = +1$

Ergebnis in beiden Fällen:
Re { z } = 1

Lösung (2): Transformation mit $\ell/\lambda = 0{,}176$ zum konjugiert komplexen Schnittpunkt mit dem Anpasskreis und anschliessender Serienreaktanz $X_s = 50\ \Omega = \omega L \Rightarrow L = 125$ nH.

Leitungslänge: $\lambda = c * v/c / f = 3{,}11$ m => $\ell = 0{,}547$ m

Frage 3.3 (4 Punkte): Welche Wirkleistung im Verhältnis zur eingespeisten Leistung im angepassten Fall nimmt die Schaltung auf in den folgenden Fällen: (1) ohne Anpassschaltung (Z_b direkt an der Quelle angeschlossen), (2) mit Anpassschaltung. Hinweis: Verwenden Sie den Reflexionsfaktor.

Ohne Anpassschaltung:

- Reflexionsfaktor: Betrag aus dem Smith-Diagramm ermitteln, $|r_b| = 0{,}45$ (durch Vermessen mit Hilfe eines Zirkels bzw. durch Ablesen von z auf der reellen Achse und errechnen aus $|r_b| = |(z-1)/(z+1)|$.
- reflektierte Wirkleistung: $P_r = |r_b|^2 P_{in}$. Anteil $P_r / P_{in} = |r_b|^2 = 0{,}2$. Es werden also 20% der Wirkleistung reflektiert und somit 80% der Wirkleistung aufgenommen.

Mit Anpassschaltung:

- Reflexionsfaktor: $r_a=0$
- reflektierte Wirkleistung: Null, somit wird die gesamte Wirkleistung aufgenommen.

Frage 3.4 (4 Punkte): Wie wirken sich Ungenauigkeiten in der Leitungslänge aus? Erläutern Sie den Einfluss einer zu langen bzw. zu kurzen Leitung auf die Anpassung.

Lösung (1): Kompensation am Leitungsende: kein Einfluss der Leitungslänge. Ungenauigkeiten der Kompensation führen zu einem Reflexionsfaktor ungleich 0, dessen Phase durch die Leitung gedreht wird.

Lösung (2): Leitungstransformation plus Kompensation am Leitungsanfang: Der Anpasskreis wird nicht genau getroffen, d.h. (a) es verbleibt für z_a ein Realteil ungleich dem Wellenwiderstand, (b) die Kompensation des Imaginärteils mit der berechneten Reaktanz funktioniert ebenfalls nicht mehr genau, es verbleibt ein Imaginärteil.

Abkürzungen

$y = y(t)$	Auslenkung, Elongation [m]
$\hat{y}$	Amplitude, Maximalwert der Auslenkung [m]
$T = 1/f$	Schwingungsdauer, Periodendauer [s]
$f = 1/T$	Frequenz, Anzahl der Schwingungen pro Zeiteinheit [1/s]
$\omega = 2\pi f = 2\pi/T$	Kreisfrequenz, Winkelgeschwindigkeit der Kreisbewegung [1/s]
$\phi = \omega\, t + \phi_0$	Phasenwinkel, Schwingungszustand zur Zeit t
ϕ_0	Phasenwinkel zur Zeit t=0
E	Energie [Joule, J, N m, W s, kg m^2/s^2] potentielle Energie $E_p = 1/2\, k\, y^2$, kinetische Energie $E_k = 1/2\, m\, v^2$, Energie elektrisches Feld $E_C = 1/2\, CU^2$, Energie magnetisches Feld $E_L = 1/2\, LI^2$
R_W	Wellenwiderstand der verlustlosen Leitung (Wirkwiderstand)
Z_W	komplexer Wellenwiderstand (Impedanz) der verlustbehafteten Leitung
Z	Impedanz (komplexer Widerstand mit Realteil R und Imaginärteil X)
X	Blindwiderstand (Reaktanz, Imaginärteil der Impedanz)
R	Wirkwiderstand (Resistanz, Realteil der Impedanz)
Y	Admittanz (komplexer Leitwert mit Realteil G und Imaginärteil B)
G	Wirkleitwert (Konduktanz, Realteil der Admittanz)
B	Blindleitwert (Suszeptanz, Imaginärteil der Admittanz)
r	Reflexionsfaktor

Mathematischer Hintergrund

Einige Erläuterungen zu den vektoranalytischen Operationen im Vorlesungsteil.

Divergenz

Die Divergenz beschreibt die Quelldichte des Vektorfeldes V im angegebenen Raumpunkt, d.h. wie viele Feldlinien in einem Raumpunkt entstehen.

$$s = \text{div } V = \nabla V = \partial V_x/\partial x + \partial V_y/\partial y + \partial V_z/\partial z$$

Die Divergenz ist eine skalare Größe.

Nabla Operator ∇

Der Nabla-Operator ist ein Kürzel für partielle Ableitungsoperationen in vektorieller Schreibweise (z.B. Ableitungen nach den Raumrichtungen in kartesischen Koordinaten):

$$\nabla = \partial/\partial x\ e_x + \partial/\partial y\ e_y + \partial/\partial z\ e_z$$

Hierbei bedeuten e_x, e_y, und e_z Einheitsvektoren in den Richtungen x, y, und z (kartesische Koordinaten). Die Divergenz oben ist als Skalarprodukt des Nabla-Operators mit dem Vektorfeld zu verstehen.

Rotation

Die Rotation beschreibt die Wirbeldichte eines Vektorfeldes V im angegebenen Raumpunkt. Die Rotation ist eine vektorielle Größe, ergibt also in jedem Raumpunkt einen Vektor W, der Richtung und Stärke der Wirbel des Vektorfeldes V beschreibt.

$$W = \text{rot } V = \nabla \times V = e_x\,(\partial V_z/\partial y - \partial V_y/\partial z) + e_y\,(\partial V_z/\partial x - \partial V_x/\partial z) + e_z\,(\partial V_y/\partial x - \partial V_x/\partial y)$$

Die Rotation lässt sich als Vektorprodukt (Kreuzprodukt) des Nabla-Operators mit dem Vektorfeld beschreiben.

Literatur

(1) Horst Kuchling, Taschenbuch der Physik; Hanser Verlag GmbH & CO. KG; 20. aktualisierte Auflage (2010), ISBN-13: 978-3446424579

(2) Bronstein, Semendjajew, Musiol, Mühling; Taschenbuch der Mathematik: Verlag: Harri Deutsch; 7. Auflage (2008); ISBN-13: 978-3817120079

(3) Frank Gustrau; Hochfrequenztechnik: Grundlagen der mobilen Kommunikationstechnik; Carl Hanser Verlag; (2011); ISBN-13: 978-3446425880